Pvz., nagrinėkime priverstinį harmoninį oscilatorių, t.y. turime priverstinės mechaninės sistemos dif. lygtį:

$$m x'' + c x' + k x = F \cos t.$$

Šię lygtį atitinkančią normaliąją dif. lygčių sistemą gauname taip: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = t$, t.y.

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = \frac{1}{m}(F\cos x_3 - c x_2 - k x_1) \\ x_3' = 1. \end{cases}$$

Įvesdami trečią dimensiją mes eliminuojame laiką iš sistemos. Tačiau sistema šiuo atveju yra netiesinė.

Iš vel susiduriame su netiesine sistema, kurią sunku spręsti (dažnai net neįmanoma gauti analizinių sprendinių išraiškų). Lygiai taip, kaip prisimename iš dif. lygčių kurso, tiesinės DL ir jų sistemos sprendžiamos nesunkiai. Tačiau aprašant realius procesus dažnai sistemos yra netiesinės: turbulencija skysčių dinamikoje, lazerio veikimas ar superlaidumas puslaidininkiuose.

pvz. 10 pav. aptarti. (1.3.1)

Vienmačio atvejo analizė (sprendiniai tiesėje)

Šiuo atveju mes turime tik vieną autonominę normaliąją dif. lygtį $\frac{dx}{dt} = f(x)$, čia $x = x(t)$, o $f(x)$ - tolydi realiojo argumento f-ja.

Taigi turime vienmatę arba pirmosios eilės dinaminę sistemą. Tai - autonominė sistema.

Prisiminkime, kad su dif. lygtimi yra siejamas vektorinis laukas.

Pvz.: spręsdami dif. lygtį $\frac{dx}{dt} = \sin x$, kuri yra autonominė pirmosios eilės dinaminė sistema, mes gauname

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int dt$$

$$\int \frac{-d(\cos x)}{\sin^2 x} = \int dt$$

$$-\int \frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x} = \int dt$$

$$\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x - 1} = \int dt$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| = t + \ln|C|$$

$$\ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| = 2t + \ln|C|$$

Tačiau tokios formos sprendinys (galima jį truputį pertvarkyti)

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln|C| = t$$

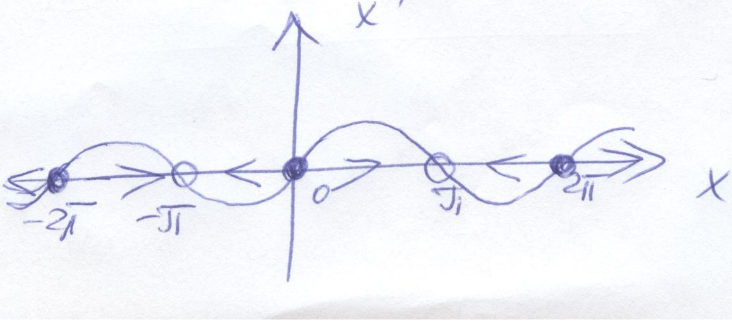
nėra patogus tolesnei analizei.

Kaip apibūdinti sprendinio kokybinę elgseną, kai $t > 0$?
Kas nutinka, kai $t \to \infty$?

Jei pradiniu laiko momentu $x(0) = x_0$, tai kas bus su sprendiniu, kai $t \to \infty$?

Tačiau mes galime nagrinėti pavyzdžio dinaminę sistemą neturėdami jos sprendinio.

Pati dif. lygtis nustato kiekviename taške x pokyčio greitį $x' = \sin x$, t.y. mes turime tokį grafinį vaizdą



Ten, kur grafikas, t.y. $x' > 0$, turime rodykles nukreiptas į dešinę (dvilypa), o kur $x' < 0$, turime rodykles į kairę. Kokia viso to fizikinė prasmė?

Jei įsivaizduojame, kad x ašies kryptimi teka skystis, tai ten, kur $x' > 0$ jis teka į dešinę, o ten, kur $x' < 0$ – į kairę. Taškai, kuriuose $x' = 0$, t.y. $\sin x = 0$ yra ramybės taškai. Šiame uždavinyje turime dviejų tipų ramybės taškus. Iš tiesų tiesėje iš viso gali būti 3 tipų ramybės taškai (žinome iš dif. lygčių kurso).

Pvz. taškai, kuriuose

$\rightarrow\circ\leftarrow$ yra stabilūs, t.y. judėjimai nukreipti į ramybės tašką.

taškai, kuriuose

$\leftarrow\bullet\rightarrow$ yra nestabilūs, t.y. mes tolstame nuo ramybės taško.

Stabilieji taškai dar vadinami <u>atraktoriais</u>, o nestabilieji <u>repeleriais</u>. Dar yra taškai, kurie vadinami šuntais.

$\rightarrow\circ\rightarrow$ arba $\leftarrow\circ\leftarrow$

Iš mūsų nagrinėjamo pavyzdžio matyti, kad sprendinio elgsena priklausys nuo pradinės sąlygos, t.y. tuo atveju, jei taške x_0, $x' > 0$, tai taškas juda į dešinę iki artimiausio pusiausvyros taško, o jei $x' < 0$, tai taškas juda į kairę iki artimiausio pusiausvyros taško.

Pvz. su MATLAB

$x' = \sin x.$ $\boxed{\text{AS-paskaita-1pavz.m}}$

<u>Pirmosios eilės dinaminės sistemos ramybės taškai ir stabilumas</u>

$$x'(t) = f(x).$$

Bendroji tyrimo schema:

1) surandame ramybės taškus

2) nubrėžiame f-jos $f(x)$.

3) nustatome, kur $f(x)>0$, o kur $f(x)<0$

4) turime pradinę sąlygą ir pradedame judėjimą taške x_0, bėgant laikui dalelė iš taško x_0 juda tam tikra trajektorija (sp. yra $x=x(t)$), tačiau fazinėje portrete mes matome tik dalelės judėjimą arti ramybės taškų ir jos judėjimo greičio dinamiką.

5) kai kurie ramybės taškai esti stabilūs, kai kurie – nestabilūs. Tai priklauso nuo dalelės judėjimo greičio ženklo tų taškų aplinkoje.

Jei pradinė sąlyga sutampa su ramybės tašku, tai judėjimo nebus visą laiką, t.y. $x(t)=x^*$, jei x^* yra toks, kad $f(x^*)=0$.

Stabilumas tam tikro taško suprantamas taip: maži poslinkiai to taško aplinkoje užgęsta, o nestabilu atveju bėgant laikui sp. „pabėga" nuo taško.

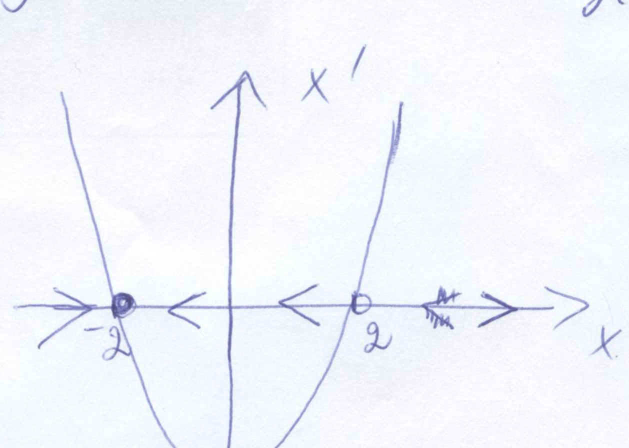
Pvz.: 1) Suraskime visus ramybės taškus ir ištirkime jų stabilumą:

$$x'=4x^2-16$$

$$4x^2-16=0$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$



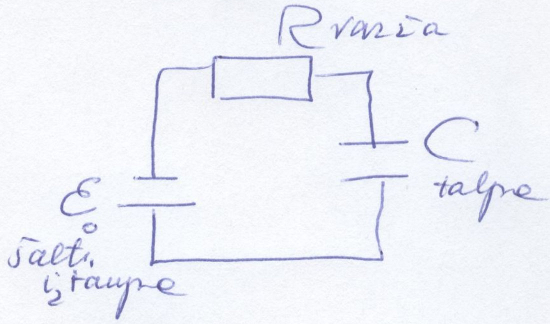
-2 – stabilus

2 – nestabilus

Taškų stabilumas yra lokalusis. Nes jei imtume didesnes x reikšmes ne taško -2 aplinkoje, o jau už 2, tai stabilumą prarastume ir pan.

2) Nagrinėkime nuoseklaus jungimo elektrinę grandinę, sudarytą iš rezistoriaus ir kondensatoriaus. El. grandinėje įjungtas el. srovės šaltinis. Tokią grandinę aprašo dif. lygtis

$$RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0$$



$q = q(t)$, o $I = \frac{dq}{dt}$

Perrašome šią dif. lygtį:

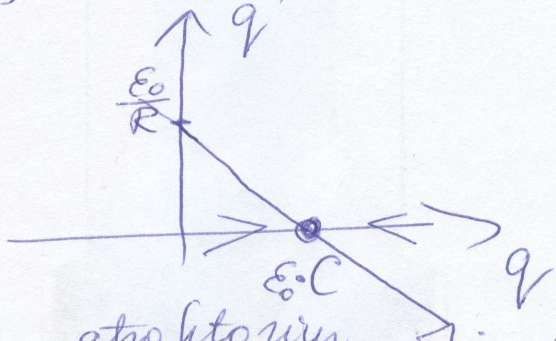
$$R\frac{dq}{dt} = \mathcal{E}_0 - \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} - \frac{1}{RC}q$$

Ramybės taškai:

$$\frac{\mathcal{E}_0}{R} - \frac{1}{RC}q = 0 \Rightarrow \underline{q = \mathcal{E}_0 \cdot C}$$

Fazinis portretas



Ramybės taškas yra atraktorius. Jis – stabilus.

Šiuo atveju mes turime globaliai stabilų ramybės tašką $q = \mathcal{E}_0 C$.

Logistinis (populiacijos augimo) modelis

$$P'(t) = k P(t), \quad k \text{ – augimo daugiklis.}$$

Tai – paprasčiausias įvairių organizmų populiacijų augimo modelis.

Kaip žinome iš dif. lygčių teorijos šio modelio sprendinys

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$ čia P_0 – populiacijos individų skaičius laiko momentu $t = 0$.

Suprantame, kad toks augimas negali trukti begalo ilgą laiką, nes populiacijos augimą riboja maisto ištekliai, gyvenamasis arealas ir pan.

Augimo daugiklis iš dif. lygties (populiacijos modelio)

$$k = \frac{P'(t)}{P(t)}$$ tokiu atveju esant didelei populiacijai ima mažėti, t.y. mes tvirtiname, kad populiacijos individų skaičiui perkopus tam tikrą kritinę ribą K individų skaičius ima mažėti, t.y. augimo daugiklis tampa neigiamas. O tai reiškia, kad mirčių skaičius viršija gimimų skaičių, t.y. didesnis yra mirčių daugiklis nei augimo daugiklis.

Ši idėja matematiškai realizuojama laikant, kad santykis $\frac{P'(t)}{P(t)}$ (populiacijos kitimo greitis tenkantis vienam individui) kinta tiesiškai, t.y.

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

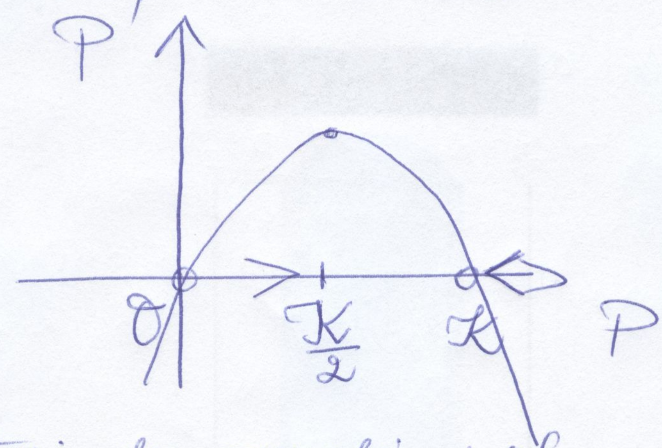
Gauname logistinį modelį (arba Verhulsto 1838 m. paskelbtą dėsnį)

$$P'(t) = k P \left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Iš dif. lygčių kurso žinome, kad nesunku rasti šios lygties analizinių sprendinių išraišką, tačiau mus domina kiek kiti klausimai, todėl apsiribosime tik grafine analize.

Logistinės lygties dešinės pusės f-jos grafikas (P', P) koordinačių sistemoje

$$P' = \frac{k}{K}\left(PK - P^2\right)$$



Ši lygtis turi du ramybės taškus $P=0$ ir $P=K$.

Neigiamos pusplokštumės grafikas nedomina, nes $P \geq 0$.

$P=0$ yra nestabilusis ramybės taškas, o $P=K$ – stabilusis.

Ką tai reiškia?

$P=0$ – nestabilusis, t.y. maža populiacija turi tendenciją augti ir „pabėgti" iš taško $P=0$.

Kita vertus, jei populiacija yra didesnė už tam tikrą ribinę reikšmę K, tai bėgant laikui ji mažėja ir artėja prie K, t.y. $P(t) \to K$, $t \to \infty$.

Vadinasi bet kuriuo atveju populiacija artėja prie tam tikros ribinės reikšmės K.

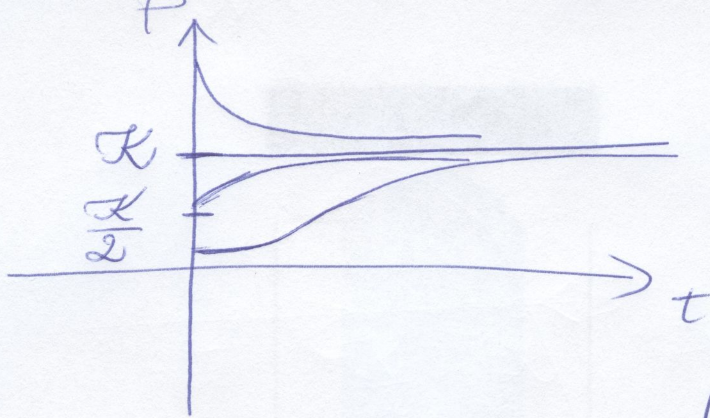
Tačiau tuo atveju, kai $P_0 = 0$, t.y. populiacijoje nėra individų, tai jų neatsiras, t.y. $\forall t \; P(t) = 0$.

Iš paveikslėlio matyti, kad tuo atveju, kai $P_0 < \frac{K}{2}$, tai populiacija pradžioje auga greičiau ir greičiau kol pasiekia $P = \frac{K}{2}$ (čia parabolės max taškas). Toliau augimas sulėtėja ir artėjame prie taško $P = K$.

Kai $\frac{K}{2} < P_0 < K$, tai greitis yra neigiamas $P' < 0$ ir populiacija auga ne taip greitai.

Tais atvejais, kai $P_0 = 0$ arba $P_0 = K$ populiacijos dydis nekinta ir lieka nekintamu visą laiką $t \to \infty$.

Tokiu būdu galime populiacijos elgseną iliustruoti (sprendinių) taip:



Žr. MATLAB
DS_paskaita_2param

Tiesinė stabilumo analizė
(netiesinių uždavinių linearizacija)

Paprastai nepakanka vien tik nustatyti stabilumo taškus, bet domina ir sprendinių kokybinė elgsena. T.y. įdomus slopinimo koeficientas kurio dėka ir judame į ramybės tašką.

Tarkime, kad x^* – ramybės taškas, o $\eta(t) = x(t) - x^*$ yra perturbacija toli nuo ramybės taško.

Norėdami ištirti perturbacijos augimą arba slopinimą turime sudaryti dif. lygtį, t.y. diferencijuojame perturbaciją.

$$\eta'(t) = (x(t) - x^*)'$$

Kadangi x^* – const, tai

$$\eta' = x', \text{ o}$$

$x' = f(x)$ arba iš perturbacijos

$$x' = f(\eta + x^*)$$

F-ją $f(\eta + x^*)$ skleidžiame Teiloro eilute taške x^*:

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + f'(x^*) \cdot \eta + O(\eta^2)$$

$f(x^*) = 0$, nes x^* – ramybės taškas, tai

$$\eta' = \eta f'(x^*) + O(\eta^2)$$

Jei $f'(x^*) \neq 0$, tai $O(\eta^2)$ galime atmesti ir nagrinėti

$$\eta' = \eta f'(x^*),$$ kuri yra tiesinė η atžvilgiu.

Tai – <u>linearizacija ramybės taško x^* aplinkoje.</u>

Iš jos matyti, kad

$$\eta = C e^{f'(x^*)t},$$ t.y.

kai $f'(x^*) > 0$, $\eta(t)$ eksponentiškai auga, o kai $f'(x^*) < 0$, $\eta(t)$ eksponentiškai mažėja.

Tuo atveju, kai $f'(x^*) = 0$, tai turime tirti antrosios eilės narius, t.y. negalime atmesti $O(\eta^2)$. Stabilumo tyrimui teks naudoti netiesinę analizę.

Kaip matome, kad taško stabilumą nulemia išvestinės ženklas ramybės taške, t.y. $f'(x^*)$. <u>Jei $f'(x^*) < 0$</u>, tai <u>x^* – stabilus.</u>

<u>Pvz.:</u> Prisiminkime ankstesnius pavyzdžius:

1) $x' = \sin x$

$f(x) = \sin x$. Ramybės taškai

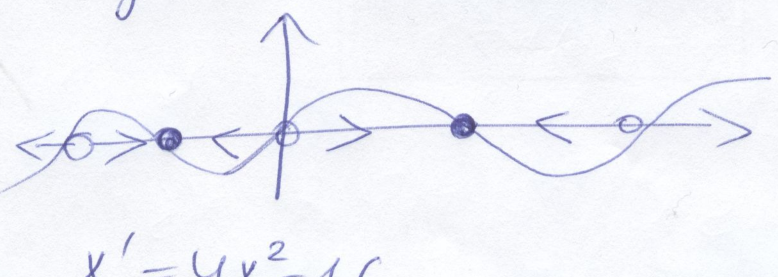
$$x^* = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$f'(x) = \cos x$

taškuose $x^* = \pi 2l, \ l \in \mathbb{Z}$ $\quad f'(x^*) > 0$, o

taškuose $x^* = \pi(2l+1), \ l \in \mathbb{Z}$ $\quad f'(x^*) < 0$ (stabilūs taškai)

Taip ir brėžėme



2) $x' = 4x^2 - 16$

$f(x) = 4x^2 - 16$

Ramybės taškai $\quad x^* = \pm 2$

$f'(x) = 8x$ taške $x^* = 2$, $f'(x^*) > 0$, o

taške $x^* = -2$, $f'(x^*) < 0$ – stabilus.