Vienmačiai atvaizdai

Nagrinėsime dinamines sistemas, kurių laikas yra diskretusis (retais atvejais – tolydusis). Tokios dinaminės sistemos gali būti vadinamos skirtuminėmis lygtimis (turėjome matematinių modelių ekonomikoje kurse), rekursiniais sąryšiais, iteruotais atvaizdais arba tiesiog atvaizdais.

Pavyzdžiui, pradėję nuo bet kurios reikšmės $x_0 \in \mathbb{R}$ ir skaičiuodami pagal rekurentinę formulę $x_{n+1} = \cos x_n$ mes pastebime, kad po tam tikro iteracijų skaičiaus rezultatas jau nebekinta ($\sim$ po 36 iteracijų). Tačiau tokios sąvokos neturės sin x f-je.

$x_{n+1} = \cos x_n$ yra vienmačio atvaizdo pavyzdys.

Vienmatis atvaizdas, nes $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \in$ vienmatei $\mathbb{R}$ erdvei. ($\in \mathbb{R}^1$).

Seka $x_0, x_1, \ldots$ vadiname orbita, prasidedančia taške x_0.

Atvaizdai sutinkami:

1) kaip įrankiai dif. lygtims tirti, pvz. Lorenco atvaizdis,

2) kaip natūraliai egzistuojančių reiškinių modeliai (skaitmeninė elektronika, ekonominiai modeliai su diskrečiuoju laiku)

Pvz.: Ekonominio modeliavimo kurse nagrinėjome makroekonominį modelį

$$Y_t = C_t + I_t$$

$I_t = I$ – fiksuoto dydžio investicijos, C_t – vartojimas,

$C_t = a + b Y_{t-1}$, Y_t – pajamos.

Kai $a = 1000$, $b = 0{,}7$, $I = 500$, o $Y_0 = 3000$, tai nuo $i = 20$ pajamos beveik nekinta, t. y., kai $t \to \infty$, $Y_t \to Y^* = 5000$.

Y^* – ramybės taškas, kuriame $Y_t = Y_{t-1}$.

3) tiriant chaosą.

Atvaizdų tyrimas suaktyvėjo tobulėjant skaičiavimo technikai ir kompiuteriams. Galime lengvai ir greitai juos tirti diskrečiose sistemose. Kas įdomu, atvaizdai generuoja chaotinį elgesį puslaidininkiuose, konvekcinėse tėkmėse, lazeriuose, cheminiuose oscil(i)atoriuose.

Aptarsime atvaizdų savybes ir jų analizės technikas.

Nagrinėkime vienmatį atvaizdą $x_{n+1} = f(x_n)$, kur f – tolydžioji f-ja, kuriai būdinga $x_i \in \mathbb{R}$, $f(x_i) \in \mathbb{R}$.

Turėdami atvaizdą mes turime ir skirtuminę lygtį:

Ramybės taškai

Jei x^* tenkina lygybę $f(x^*) = x^*$, tai x^* – ramybės taškas.

Vadinasi, jei $x_n = x^*$, tai $x_{n+1} = f(x^*) = x^*$, t.y. orbita nuo x^* išlieka visose tolimesnėse iteracijose.

Norėdami ištirti x^* stabilumą, tiriame mažą nuokrypį $\varepsilon_n = x_n - x^*$ ir aiškinamės, ar x^* pritraukia ar nustumia orbitą, t.y. x^* – atraktorius ar repeleris. Todėl svarbu žinoti, kas atsitinka su ε_n (jei jis nyksta, tai turime atraktorių, o jei auga, tai repelerį).

$$x_{n+1} = f(\varepsilon_n + x^*)$$

$f(\varepsilon_n + x^*)$ skleidžiame Teiloro eilute (x^*) aplinkoje iki pirmosios eilės narių imtinai, t.y.

$$f(\varepsilon_n + x^*) = f(x^*) + f'(x^*)\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2).$$

Kadangi x^* – ramybės taškas, tai pagal $f(x^*) = x^*$ turime

$$x_{n+1} = x^* + f'(x^*)\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2)$$

arba

$$\underbrace{x_{n+1} - x^*}_{\varepsilon_{n+1}} = f'(x^*)\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2)$$

$$\varepsilon_{n+1} = f'(x^*)\varepsilon_n + O(\varepsilon_n^2).$$

Atmetę antrosios eilės narius įtakę, turime linearizuotą atvejį

$$\varepsilon_{n+1} = f'(x^*)\varepsilon_n.$$

Jei pažymime $f'(x^*) = \lambda$, tai ε_0, $\varepsilon_1 = \lambda\varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \lambda^2\varepsilon_0, \ldots$

$\rho_n = \lambda^n \rho_0$. Jei $|\lambda| < 1$, tai $\rho_n \to 0$, kai $n \to \infty$. Vadinasi ramybės taškas x^* tiesiškai stabilus. Jei $|\lambda| > 1$, tai x^* – nestabilus.

Šios išvados apie lokalųjį stabilumą gautos linearizuojant atvaizdį. Lieka neaišku, kas nutinka, kai $|\lambda| = 1$, t.y. kai $|f'(x^*)| = 1$. Vadinasi norėdami ištirti lokalųjį stabilumą turime tirti antrosios eilės narius. Jie tai lemiančią įtaką.

Pvz.: Surasime atvaizdo $x_{n+1} = x_n^2$ ramybės tašką ir ištirsime jo stabilumą.

Ramybės taške x^*: $x^* = (x^*)^2 \Rightarrow x_1^* = 0$ arba $x_2^* = 1$.

Vadinasi, turime du ramybės taškus.

$$f(x_n) = x_n^2, \quad f'(x_n) = 2x_n$$

Ramybės taške $f'(x^*) = 2x^*$

Kai $x^* = 0$, $|f'(x^*)| < 1$ ir taškas $x^* = 0$ – stabilusis.

Kai $x^* = 1$, tai $|f'(x^*)| = 2 > 1$ ir taškas $x^* = 1$ – nestabilusis.

Ramybės taškai, kuriems $|\lambda| = |f'(x^*)| = 0$ yra vadinami superstabiliaisiais.

Patyrinėkite konvergavimą, kai x_0 pakankamai mažas. Ką pastebite?

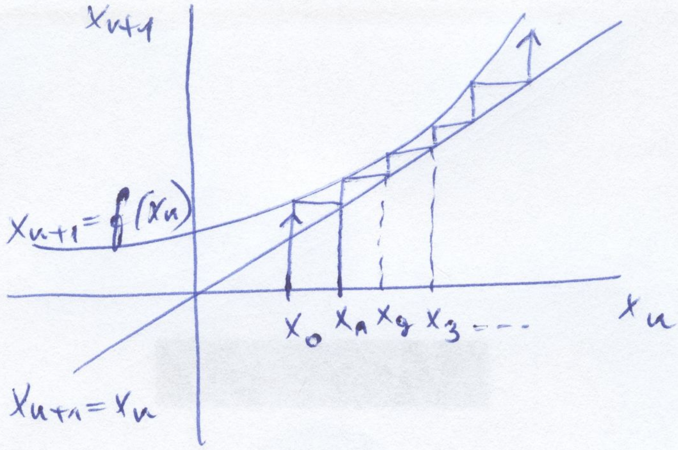
Fazinės diagramos

Turime atvaizdį $x_{n+1} = f(x_n)$ ir pradinę sąlygą x_0.

Brėžiame f jo $x_{n+1} = f(x_n)$ grafiką ir tiesę $x_{n+1} = x_n$.

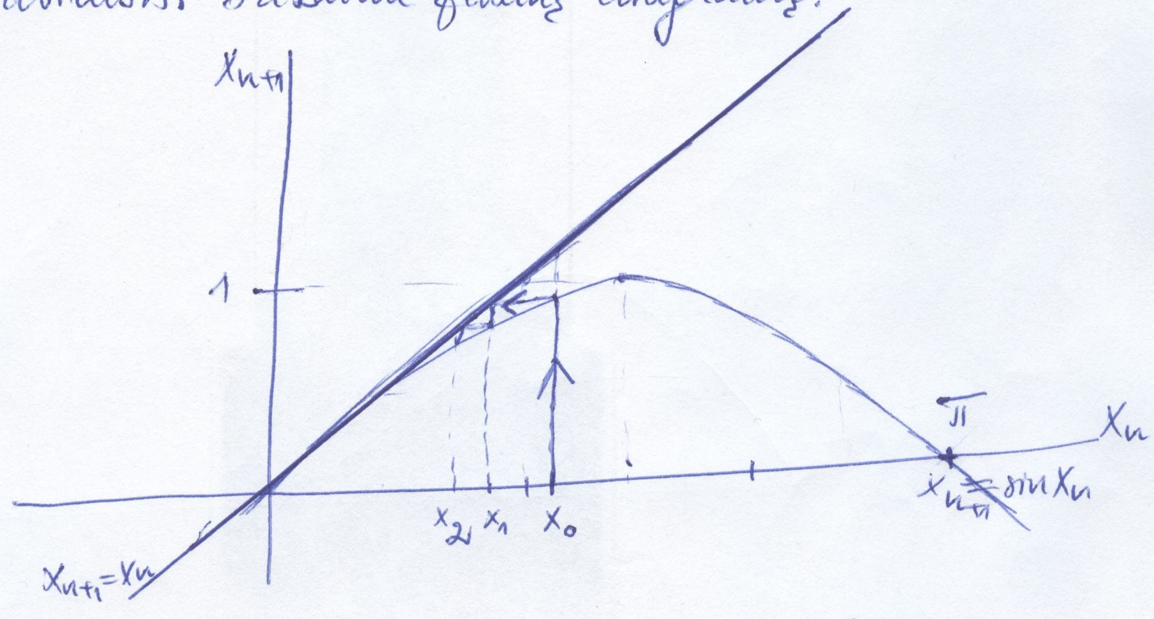
Vadinasi taške x_0 keliame statmenį iki $x_{n+1} = f(x_n)$ grafiko ir nuo susikirtimo taško brėžiame tiesę, lygiagrečią Ox_n ašiai iki susikirtimo su $x_{n+1} = x_n$ tiese. Nuleidę statmenį turime tašką x_1 ir t.t. (žr. pav.)

Fazinės diagramos parodo globalią sprendinio (atvaizdo) elgseną. Tai labai praverčia tais atvejais, kai netinka tiesinė analizė.



Pvz.: 1) Nagrinėkime atvaizdį $x_{n+1} = \sin x_n$. Parodysime, kad ramybės taške $x^*=0$ stabilumo negalime ištirti linearizuodami atvaizdį. Brėšime fazinę diagramą.

Randame $f'(x_n) = \cos x_n$. Ramybės taške $x^*=0$, $f'(x^*)=1$, t.y. $|\lambda|=1$ ir tiesinė analizė negali atsakyti, ar ramybės taškas $x^*=0$ yra stabilusis. Brėžiame fazinę diagramą.

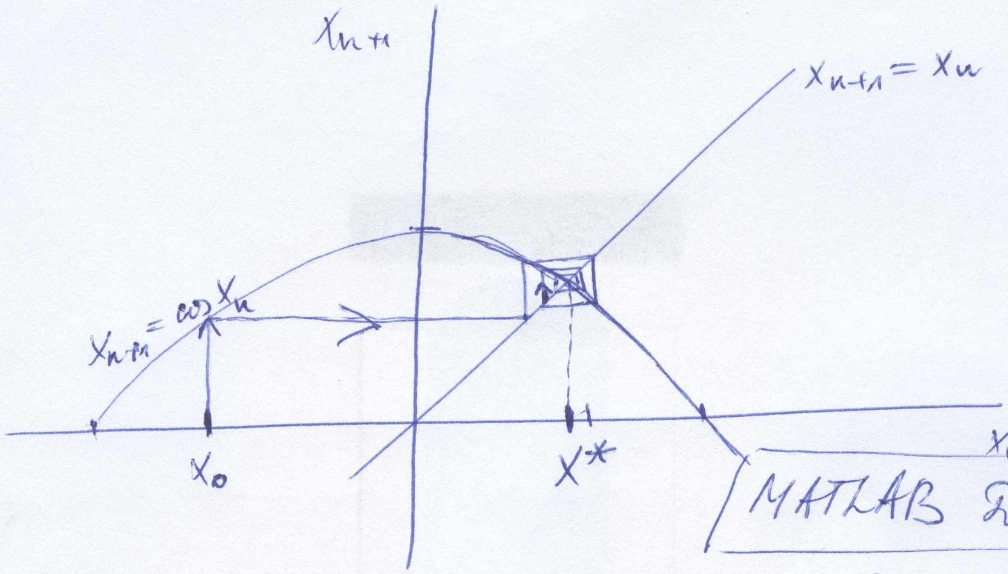


Matome, kad $\forall x_0$, $x_n \to 0$. Kiekvienai x_0 reikšmei mes gauname $-1 \le x_1 \le 1$, nes $|\sin x| \le 1$. Tokiu būdu konvergavimas garantuotas.

2) Kitas atvaizdas, paskaitos pradžioje nagrinėtas atvaizdas $x_{n+1} = \cos x_n$. Kaip elgiasi x_n, kai $n \to \infty$?

Skaičiuodami iteracijas pastebėjome, kad $n \to \infty$, $x_n \to 0{,}739...$, ir rezultatas nepriklauso nuo x_0. Ką reiškia šis keistas skaičius? Šis keistas skaičius — taškas, kuriame kertasi $\cos x$ ir x grafikai.

Tai – atvaizdo ramybės taškas $x^* \approx 0{,}739\ldots$
Brėžiame fazinę diagramą.



MATLAB DS-paskaita-11pavz.m

Matome stiprią orbitą – spiralę ramybės taške $x^*=0{,}739\ldots$, kai $n \to \infty$.

Spiralė parodo, kad $x_n \to x^*$ osciliuojant. Osciliacijos nuolatos gęsta.

Logistinis atvaizdas

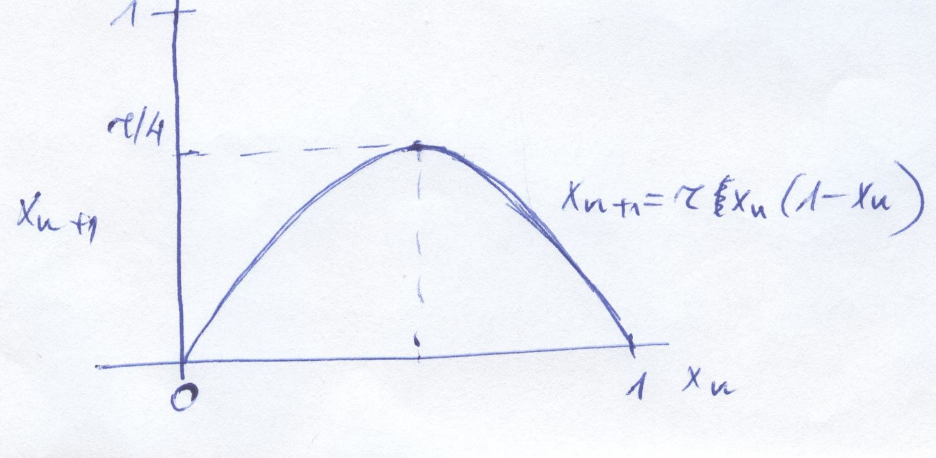
Parodo, kad iš pažiūros paprasti netiesiniai atvaizdai gali turėti sudėtingą dinamiką.

Iliustracijai pasitelksime gerai pažįstamą logistinį atvaizdą:

$$x_{n+1}=r\, x_n(1-x_n).$$

Tai – populiacijos dinamikos modelio diskretusis analogas. Čia $x_n \geq 0$ – bedimensis n-tosios generacijos populiacijos matas, o $r \geq 0$ – vidinis augimo greitis.

Nagrinėkime atvejį, kad $x \in [0,1]$. Tuomet atvaizdo f-je yra parabolė, kuri savo didžiausią reikšmę įgyja, kai $x=\frac{1}{2}$, o max reikšmė – $r/4$.



Periodo dvigubinimasis logistiniame atvaizde

Nagrinėkime logistinį atvaizdį su skirtingomis r reikšmėmis.

MATLAB DS_paskaita_11pav1.m
(t_n, x_n) grafikai pateikti

$\boxed{x_0 = 0{,}1.}$

Kai $r<1$, tai $x_n \to 0$, kai $n \to \infty$.

Kai $1<r<3$, tai populiacija auga ir pasiekia nenulinį stabilumo tašką. Rezultatai pav. pateikti kaip laiko eilutės (t_n, x_n). Taškai sujungti tiesių atkarpomis tik dėl vaizdumo. Atvaizdas – tik taškai!

Kai $r>3$, tai su $r=3{,}3$ populiacija osciliuoja apie ramybės tašką. Vienoje generacijoje turime didelę populiaciją, o kitoje – mažą. Toks osciliacijų tipas vadinamas periodo dvigubinimusi.

Kai $r=3{,}5$, tai populiacija taip pat kinta cikliškai, tačiau šiuo atveju cikliškumo skaičius yra 4. Aukštesnis ciklas dvigubinosi.

Vėliau periodas taip pat dvigubinasi; 8, 16, 32, ... ir t.t. periodų ciklus.

Jei turime r reikšmę, su kuria „gimsta" (atsiranda) ciklas, šiuo atveju $r=3$, tai galima pastebėti, kad vėliau bifurkacijos vis greitėja ir greitėja.

r_n – r reikšmė, su kuria atsiranda 2^n ciklas

$r_1 = 3$, 2

$r_2 = 3{,}449...$, 4

$r_3 = 3{,}54409...$, 8

$r_4 = 3{,}5644...$ 16

$r_5 = 3{,}568759...$ 32

— — —

$r_\infty = 3{,}569946...$ ∞

$r_n \to r_\infty$. Tai – geometrinis konvergavimas, t.y. atstumas tarp perėjimų išlieka pastovus

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4{,}669...,$$

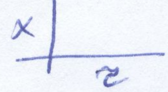
Chaosas ir periodiniai langai

Tačiau daugeliui $r > r_\infty$ $\{x_n\}$ neartėja nei prie ramybės taškui nei prie orbitų. Be to elgsena yra neperiodinė. Tai – chaosas diskrečiojoje sistemoje.

Fazinė diagrama yra labai kompleksinė.

> DS-paskaita-11par3.mn
> nenuspėjama fazinė diagrama

Norėdami pamatyti kaip kinta dinaminės sistemos elgsena didinant r, turime tyrinėti <u>orbitų diagramą</u>, t.y. sistemos atraktorius grafike pateikiamas kaip r argumento f-ja



Grafike matyti, kad išsišakojimo diagrama, kai $3{,}4 \le r \le 4$.

Kai $r = 3{,}4$, tai atraktorius yra 2 periodų ciklas, nes turime 2 šakas. Didėjant r abidvi šakos toliau dalijasi sudarydamos jau 4 periodų ciklą ir t.t. Taigi turime periodo dvigubinimąsi. Taip periodas dvigubinasi iki kol pasiekiame ribinę $r = r_\infty \simeq 3{,}57$. Tuo metu atvaizdas tampa chaotinis ir atraktorius iki šio momento buvęs baigtinio taškų skaičiaus tampa begalinio taškų skaičiaus atraktoriumi.

Kai $r > r_\infty$ diagrama (orbitų diagrama) parodo nenumatomą elgseną su <u>periodiniais langais</u> besikaitaliojančiais su chaotiniais taškų debesimis. Didelis langas prasideda arti $r \simeq 3{,}83$. Jis turi stabilų 3 periodų ciklą. Jei imsime tik šią diagramos dalį, pastebėsime, kad ji tiksliai atkartoja visą platesnį vaizdą.

Logistinio atvaizdo analizė

Pabandykime paaiškinti tai, ką nustatėme.

Tyrinėkime logistinį modelį

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \text{ kai } 0 \le x_n \le 1{,}0, \quad 0 \le r \le 4.$$

Nustatykime visus ramybės taškus ir jų tipą.

Kaip žinome, ramybės taškams turi galioti lygybė:

$$x^* = f(x^*), \text{ t.y.}$$

$$x^* = r x^*(1 - x^*).$$

Iš čia

$$x^*(1 - r(1 - x^*)) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0, \text{o kitas}$$

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$$

Ramybės taškas $x_1^* = 0$ nepriklauso nuo r. Jis yra ramybės taškas nagrinėjamame logistiniame modelyje su visomis r reikšmėmis.

Tuo tarpu x_2^* bus ramybės taškas tik tuo atveju, jei x^* patektų į intervalą $[0,1]$. Tokiu būdu turi būti $r \geq 1$.

Stabilumą tiriame skaičiuodami $f'(x^*)$.

$$f'(x) = r - 2rx$$

Taške $x_1^* = 0$, $f'(x_1^*) = r > 0$, bet $|f'(x_1^*)| < 1$, kai $0 \leq r < 1$.

Todėl taškas $x_1^* = 0$ yra stabilusis ramybės taškas, kai $0 \leq r < 1$ ir nestabilusis, kai $r > 1$.

Kitas ramybės taškas, turime

$$f'(x_2^*) = 2 - r, \text{ t.y. } |f'(x_2^*)| < 1, \text{ kai}$$

$$-1 < 2 - r < 1 \Rightarrow 1 < r < 3.$$

Vadinasi taškas $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ yra stabilusis, kai $1 < r < 3$ ir nestabilusis, kai $r > 3$.

Šiuos rezultatus galime pateikti grafiškai. Grafike matyti, kad tuo atveju, kai $r < 1$, tai turime tik vieną ramybės tašką, nes parabolė nekerta tiesės $y = x$, o turi tik vieną bendrą tašką — 0. Kai r didiname, tai parabolės viršūnė kyla ir artėja prie tiesės $y = x$. Kai $r = 1$, tai tiesė yra parabolės liestinė taške $x = 0$. Toliau didindami r gauname situaciją, kurioje atsiranda antrasis ramybės taškas (t.y. parabolė kerta tiesę dviejuose taškuose) — $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$. Šiuo metu ramybės taškas $x_1^* = 0$ praranda stabilumą.

Taigi stebime transkritinę bifurkaciją taške $x^*=0$, kai $r=1$.

Kai $r>1$ ir toliau didėja, tai antrasis taškas $x_2^*=1-\frac{1}{r}$ praranda stabilumą, kai liestinė pasiekia kritinę reikšmę, t.y. $f'(x_2^*)=-1$. Taip nutinka, kai $r=3$. Ši bifurkacija vadinama atšakotine bifurkacija. Tokios bifurkacijos dažnai siejamos su periodo dvigubinimu.

DS-paskaita – 11pav5.mn
ramybės taškai

Parodysime, kad logistinis modelis turi du ciklus, kai $r>3$.

Kaip žinome du ciklus turime tada ir tik tada, jei $\exists$ du taškai p ir q, kuriems galioja: $f(p)=q$ ir $f(q)=p$.

Ekvivalentus teiginys $f(f(p))=p$, čia $f(x)=rx(1-x)$.

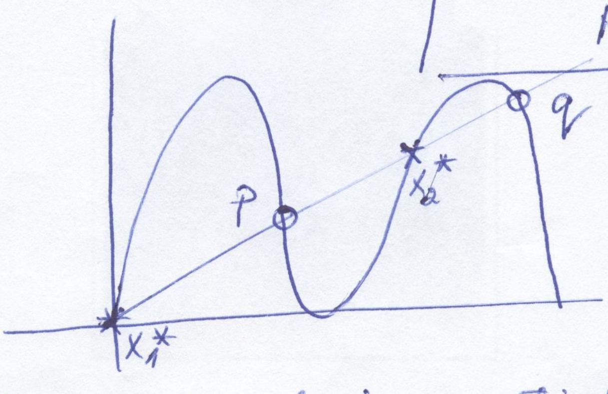
Turime

$$f(f(x)) = r(rx(1-x))\,(1-rx(1-x)) =$$

$$= (r^2x-r^2x^2)(1-rx+rx^2) = r^2x-r^3x^2+r^3x^3-r^2x^2+$$

$$+r^3x^3-r^3x^4 = -r^3x^4+2r^3x^3-r^3x^2-r^2x^2+r^2x.$$

DS-paskaita – 11pav5.mn
p ir q nustatymas
$r=4$



Norėdami nustatyti p ir q turime rasti lygties šaknis:

$$f(f(x)) = x, \text{ t.y.}$$

$$x(1+r^3x^3-2r^3x^2+r^3x+r^2x\mp r^2)=0$$

atskyrę ir antrąją šaknį $x_2^*=1-\frac{1}{r}$, gauname

$$r^2x^2-r^2x-rx+r+1=0$$

DS-paskaita – 11pav5.mn
šaknų atskyrimas

$$D = (r^2+r)^2 - 4r^2(r+1) =$$

$$= r^2(r+1)^2 - 4r^2(r+1) = (r+1)(r^2(r+1) - 4r^2) =$$

$$= r^2 (r+1)(r-3)$$

Tuomet

$$x_{1,2} = \frac{r^2+r \pm r\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r^2};$$

$$x_{1,2} = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r}.$$

Taigi p ir q yra

$$p,q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r},$$ kai $r>3$, tai

turime realiąsias šaknis. Todėl ir turime situaciją, kad tik $r>3$ egzistuoja du ciklai. Kai $r=3$, tai $p=q=\frac{2}{3}$ ir turime dviejų ciklų bifurkaciją. Kai $r<3$, tai p ir q – kompleksiniai skaičiai, t.y. ciklai neegzistuoja.

Parodysime, kad du ciklai, kai $3<r<1+\sqrt{6}=3,449\ldots$ tikrai yra.

Norėdami ištirti ciklų stabilumą, turime tirti taškų p ir q stabilumą. Tuo tikslu tiriame $f(f(x))$ išvestinės taškuose p ir q.

Taške p:

$$\frac{d}{dx} f(f(x))_{x=p} = f'(\underbrace{f(p)}_{q}) \cdot f'(p) = f'(q)\cdot f'(p).$$

Analogišką situaciją ir kitame ramybės taške – q. Vadinasi, jei jau šakos bifurkuoja, tai abi kartu. Mes tai matime grafiniame vaizde.

$$\frac{d}{dx} f(f(x))_{x=p} = (r-2rp)(r-2rq) = r^2(1-2p)(1-2q) =$$

$$= r^2(1-2p-2q+4pq) = r^2(1-2(p+q)+4pq)$$

Įrašome p ir q išraiškas ir gauname:

$$\frac{d}{dx}\, f(f(x))_{x=p} = r^2\left(1 - 2\,\frac{r+1}{r} + \cancel{4}\cdot\frac{(r+1)^2 - (r+1)(r-3)}{\cancel{4}r^2}\right) =$$

$$= r^2\left(1 - \frac{2(r+1)}{r} + \frac{4(r+1)}{r^2}\right) = r^2 \cdot \frac{r^2 - 2r^2 - 2r + 4r + 4}{r^2} =$$

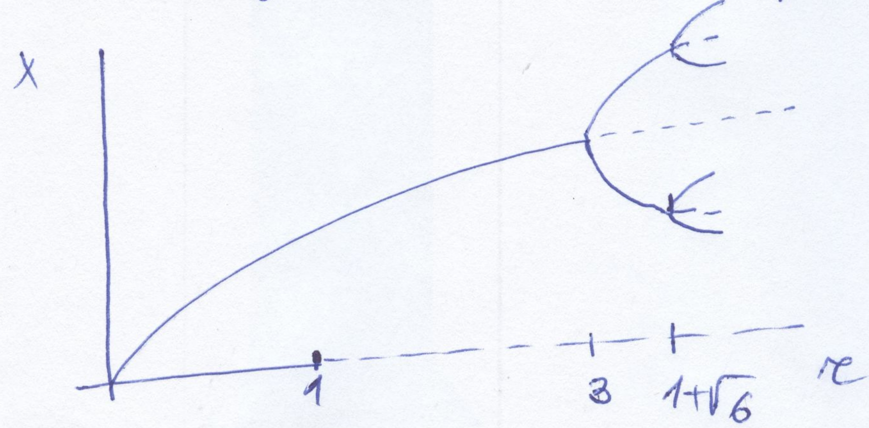
$$= 4 + 2r - r^2$$

Tuomet

$$\left|\frac{d}{dx}\, f(f(x))_{x=p}\right| < 1, \text{ kai } |4 + 2r - r^2| < 1, \text{ t.y.,}$$

kai $3 < r < 1+\sqrt{6}$.

Žemiau pateiktoje bifurkacinėje diagramoje matome tik atraktorius (kad būtų aiškiau, nestabilūs objektai nežymėti)



Kitas klausimas, kurį turime panagrinėti yra periodiniai langai, kurie atsiranda, kai $r > r_\infty$. 3 periodo langas atsiranda, kai $3,8284... \leq r \leq 3,8415...$ Šį pavyzdį atskirai nagrinėsime siekdami suprasti visų kitų langų susiformavimą.

$f(x) = rx(1-x)$, o logistinis atvaizdas yra

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

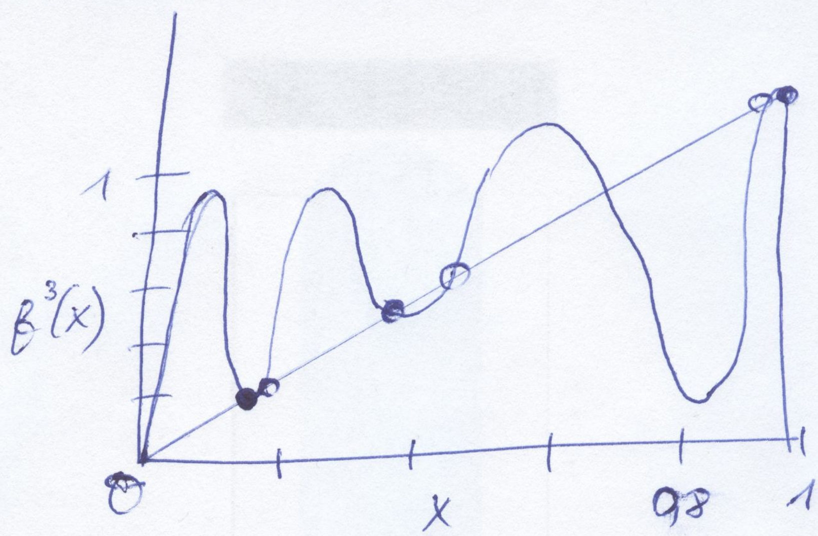
Tuomet $x_{n+2} = f(f(x_n))$ arba tiesiog $x_{n+1} = f^2(x_n)$.

Analogiškai ir $x_{n+2} = f^3(x_n)$ ir t.t.

Trijų periodų ciklo atsiradimą sąlygoja $f^3(x_n)$. Trijų periodo ciklo atvaizde taškas p kartojasi kas 3 iteracijos, t.y.

$p = f^3(p)$, o tai reiškia, kad p – ramybės taškas.

Tačiau $f^3(x)$ yra sudėtingas 8-ojo laipsnio daugianaris ir norėdami surasti jo susikirtimo su tiese $x_{n+1}=x$ taškus turėtume spręsti 8-ojo laipsnio lygtį. Taikydami grafinį sprendimo metodą, kai $r=3{,}835$.



Yra 8 sprendiniai. Mes dominu tik 6 pažymėti apskritimais. Nepažymėti sprendiniai yra ramybės taškai arba vieno ciklo taškai, kuriems $f(x^*)=x^*$. Užpildyti apskritimukai atitinka trijų ciklų stabiliuosius taškus. Šiuose taškuose $f^3(x)$ išvestinės modulis yra <1. Taškuose, kurie pažymėti tuščiaviduriais apskritimais, išvestinė yra >1.

Mažindami r artėjame prie chaotinio režimo. Grafikas keičia savo formą – tolsta nuo $y=x$ grafiko. Kai $r=3{,}8$, 6 pažymėti taškai išnyksta. Suprantame, kad tarp 3,8 ir 3,835 f-jos $f^3(x)$ grafikas paliečia taip, kad tiesė $y=x$ yra liestinė. Esant šiai kritinei r reikšmei įvyksta 3 ciklų periodo stabiliųjų ir nestabiliųjų taškų kolizija ir išnykimas esant tangentinei bifurkacijai. Šiuo metu prasideda periodinis langas. Yra nustatyta, kad tangentinė bifurkacija įvyksta, kai $r=1+\sqrt{8}\simeq3{,}8284...$

Kai $r=3{,}8282$, stebime įdomų reiškinį: dalis orbitos atrodo kaip 3 periodo ciklas, tačiau čia tas ciklas neegzistuoja. Tai 3 periodo ciklo šešėlis. Šešėliai visuomet atsiranda arti balno–mazgo bifurkacijų, o tangentinė bifurkacija ir yra ta pati balno–mazgo bifurkacija.