

Lorenco sistemos tyrimas

Naiguėliuė Lorencio sistema:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x), \\ y' = \tau x - y - xz, \\ z' = xy - \beta z. \end{cases}$$

MATLAB helpe
lorenz.m

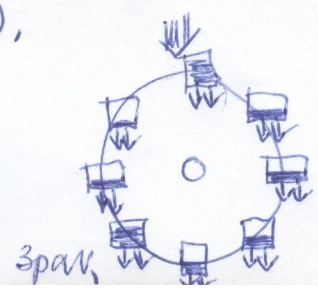
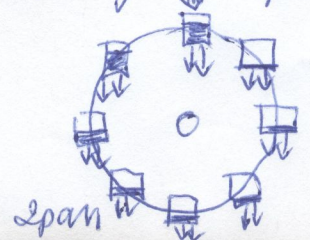
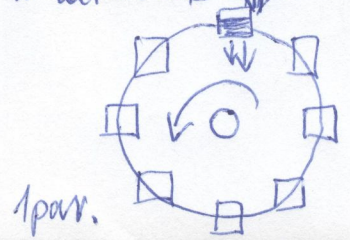
Cia $\sigma, \tau, \beta > 0$ - parametrai. 1963m. Lorenco sudarė šio sistemos kaip labai supaprastintą konvekcijos modelį atmosferoje. Toliau patos lygtys tūlė ir laseris modeliuantini tūlo vandens rato judėjimui.

Toliau papasta sisteme gali būti uaprinama kaip plačios dinamikos atrėjis. Tai liecia parametrai. Spėndimvai neregulėwai osciluoja, melioda negėzta ir gė patė tashė, taėiau ir vėreke tam tikrame fėziniė erdvė regione. Spėndimvai yre roluėwai stipniau atraktoriau. Taėiau šiuo atreju stiprusis atraktoriau uėra rėmybė tashas ar vėruis colias, pėntėrus. Ji yre fėraktalas, kurio dimėnsija (fėraktalinė) yre tarp 2 ir 3.

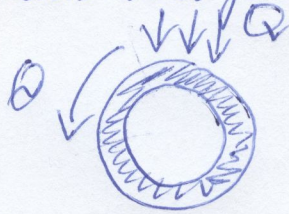
Domėsimėis šia Lorenco sisteme, kad supastume stiprusi atraktoriau ir jame vykstanti chaosi judėjimė.

Naiguėliuė vandens rato. Ji mėsais uolatos yre plėama vanduo. Jei stėkėjimo greitis per maėtas, tai mėsutėris vėdas mėlėuomet uėbus uėprėdamau tūre, kad sėvidėtis tūitėis fėgė t.y. vandens ratas nėjudėis. Kai stėkėjimo greitis yre didėnis, tai vėdas yre labiau uėprėdamau ir ratas pradėda sukėtis (1 par.). Papastai mėsutėri tolygtis judėjimas ir mėsas ar ir kėtė juė. (2 par.)

Ir kuris juė judėis sisteme pėmėlėuro uėro pradėlinė sėlyga. Ir toliau didėndama stėkėjimo greitė mes destabilizuojame sisteme. Tūmet judėjimas tampa chaotiėkas: tai ratas sukėti, tai vėdai tūnyre pėprėdyti ir jė pėvėdėis inertėkumė nepakeltė jė aukštėjn (judė žemyn). Tūmet ornyojant gali apėgėrėti judėjimas ir ratas iėsis sukėtis ir kėtė juė (3 par.).



Įprasdykite rašyti rato judėjimą.



$\theta = 0$, kai laikas 12:00 val.

$\omega(t)$ - rato kampinis greitis, $m(\theta, t)$ - masės pasiskirstymo rate, t.y. masė tarp kampų θ_1 ir θ_2 apskaituojama taip:

$$M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$$

- $Q(\theta)$ - šiluminis greitis,
- c - rato spindulys,
- K - viltkinis greitis,
- v - sukimosi slopinimo greitis,
- J - rato inercijos momentas.

Minuomeji yra $m(\theta, t)$ ir $\omega(t)$.

1. Masės trėmimo dėsnis.

Medžiagos masė sektoriuje (θ_1, θ_2) yra švertinama taip:

1) š sektorių pateiktas medžiagos kiekis per laiką Δt :

$$\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q d\theta \right] \Delta t,$$

2) š sektoriaus ištekantis kvadratinis kiekis per laiką Δt :

$$\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} K m d\theta \right] \Delta t.$$

Šiame integrale m rodo ryšį tarp medžiagos kiekio sektoriuje ir jo viltkinio. Viltkinio greitis yra proporcingas rašyti kiekiai sektoriuje: tuo daugiau rašyti pateikta, tuo didesnis šilgis ir tuo daugiau rašyti išberga.

3) pateiktas ratui š sektorių (θ_1, θ_2) pateikta mės kvadratinis kiekis, t.y. $m(\theta_1) \omega \Delta t$

4) tuo patiu š sektoriaus išteka tam šilmas rašyti kiekis - $m(\theta_2) \omega \Delta t$.

todėl

$$M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$$

$$\Delta M = \Delta t \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} Km d\theta \right] + m(\theta_1) \omega \Delta t - m(\theta_2) \omega \Delta t$$

$$m(\theta_1) - m(\theta_2) = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial \theta} d\theta$$

Padaliję iš Δt turime

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta$$

Pereiname prie ribos, kai $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta \quad (*)$$

Taciau pagal apibrėžimą

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial t} d\theta$$

Duomet iš (*)

$$\frac{\partial m}{\partial t} = Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta}$$

Garame solydumo lygtis. Tai - diferencialinė lygtis su dalinėmis išvestinėmis.

2. Sukimo momento brėžis dėsnis.

Rato judėjimas nustatomas II Newtono dėsniu $F = ma$, kuris išreikšta sukimo jėgos ir jos sukulto judėjimo balansą. Ši yra rato merkajis momentas. Suprantame, kad jis priklauso nuo vairo poslinkio st. y. $J = J(t)$. Rankone, kad, kai $t \rightarrow \infty$, tai $J(t) \rightarrow J(\text{konstanta})$.

Toliau atrepi judėjimo lygtis

$$J\omega' = F_{\text{trintis}} + F_{\text{gravitacinė}}$$

$$J\omega' = -r\omega + mgr \sin \theta d\theta$$

Kai $\sin \theta > 0$, tai sukimo momentas padidina ω , o mažina

$$m = \int_0^{2\pi} m(\theta, t) d\theta$$

Tuomet

$$JW' = -vW + gz \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta,$$

Garame suhimo momento tvermės dėsnis kaip integro-diferencialinis lygtis.

Tolydumo lygtis ir suhimo momento tvermės dėsnis leidžia svertinti m ir W lygtis, kai turime $m(\theta, t)$ ir $W(t)$ tam tikru momentu. Toliau jį analizi yra sudėtinga.

Naudojame Furje analizę.

$m(\theta, t)$ yra periodinė f-jė, tai jį išrašome Furje eilute:

$$m(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta)$$

Šis išraiškų išraiškis: tolydumo ir suhimo momento tvermės dėsnis mes gauname amplitudės lygtis.

Išėjimo lygtis išrašome taip pat Furje eilute:

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta \text{ (kurie } \sin n\theta \text{ narys, nes maudus spindulius ir nraus).}$$

Išrašę eilutes į tolydumo lygtis, gauname

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n'(t) \sin n\theta + b_n'(t) \cos n\theta) = -W \sum_{n=0}^{\infty} (na_n(t) \cos n\theta + n b_n(t) \sin n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta - K \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta).$$

Sulygtis narius prie $\sin n\theta$ ir $\cos n\theta$ turime:

$$(*) \quad \begin{aligned} a_n'(t) &= +nW b_n(t) - K a_n(t), \\ b_n'(t) &= -nW a_n(t) - K b_n(t) + q_n, \quad n=0, 1, \dots \end{aligned}$$

Furje eilutes išrašę į suhimo momento tvermės dėsnį turime

$$JW' = -vW + gz \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta \right) \sin \theta d\theta$$

Del ortogonalumo lygtis tik narys $a_1(t) \sin \theta$, t.y.

$$Jw' = -v w + g z \int_0^{2\pi} a_1(t) \sin^2 \theta d\theta$$

122

arba

$$(*) (*) \quad Jw' = -v w + J g z a_1(t)$$

Sudareme sistemą:

$$\begin{cases} a' = w b - k a, \\ b' = -w a - k b + q, \\ w' = (-v w + J g z a) / J. \end{cases}$$

Cia $a = a_1$, $b = b_1$, $q = q_1$, nes $\vec{n} (*) (*)$ lyko tok $a_1(t)$ (apmuo-
sime $n=1$ modeliu).

Kai $n \neq 1$, gamami aukštesnės eilės modeliai

Garime Lorenco sistema. Nagrinėkime ją.

Raudame sistemos rangės taškus, t.y. taškus, kuriuose
visi trys dešiniai pusės f jėgų lygtis 0:

$$\begin{cases} w b - k a = 0, \\ -w a - k b + q = 0, \\ \frac{(-v w + J g z a)}{J} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{w b}{k} \quad (1) \\ w a = q - k b \quad (2) \\ a = \frac{v w}{J g z} \quad (3) \end{cases}$$

Kadaupi $a = \frac{w b}{k}$ ir $a = \frac{v w}{J g z}$, tai

$$\frac{w b}{k} = \frac{v w}{J g z} \quad \text{arba} \quad \frac{J g z w b - v w k}{J g z k} = 0$$

ji ra

$$b = \frac{k v}{J g z} \quad \text{arba} \quad w = 0.$$

1) Jei $w = 0$, tai $a = 0$, o $b = \frac{q}{k}$. Tadaut rangės taškas
 $(0, \frac{q}{k}, 0)$.

$a^* = 0$, $b^* = \frac{q}{k}$, o $w^* = 0$, ($w^* = 0$ - nėra sudėtingo -
ratas nesistuka),

2) Jei $w \neq 0$, tai $b^* = \frac{k v}{J g z}$, o $\vec{n} (2)$ sistemos lygtis

$$\omega \cdot \frac{\omega b}{K} = q - K \cdot b$$

arba

$$\omega^2 = \frac{Kq - K^2 b}{b}, \quad \omega^2 + K^2 = \frac{Kq}{b}$$

$$\omega^2 + K^2 = \frac{Kq}{Kv} \cdot \pi g^2 z \Rightarrow \omega^{*2} = \frac{\pi g^2 z q}{v} - K^2$$

Kai $\frac{\pi g^2 z q}{v} - K^2 > 0$, tai turime du sprendimus:

$$\omega_{1,2}^* = \pm \sqrt{\frac{\pi g^2 z q}{v} - K^2}$$

Dydis, nustatantis kada sprendiniai egzistuoja

$$\frac{\pi g^2 z q}{K^2 v} > 1 \text{ yra Relejanus sharcus.}$$

Todel judėjimas pastoviu greičiu ω galimas tik tuo atveju, jei Relejanus sharcus yra pakankamai didelis. Relejanus sharcus išvysta miliauso dygtis tarp gravitacinės jėgos ir silpnėjimo bei Relejanus ir slopinimo, t.y. tarp to, kas skatina judėjimą ir kas jį stabdo. Tačiau dar labiau didinant Relejanus sharcus, judėjimas tampa chaotiškas.

Lorenco lygtis sąlyš

Grįžtume prie pradinės Lorenco lygtis sistemos:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = xy - \beta z, \end{cases}$$

$\sigma, r, \beta > 0$ - parametrai σ - Prandto sharcus, r - Relejanus sharcus.

Ši sistema turi tik du nestiprumus xz ir xy . Analogiškai kaip ir vandenys rato sistemoje, kuri turi 2 nestiprumus: ωa ir ωb .

Pakeičę x į $-x$, o y į $-y$ mes gauname tą pačią

systeme. (Tadinau, jei (x, y, z) - sprendinys, tai $(-x, -y, z)$ - sprendinys.

Kaip τ reikšmės rato judėjimą nustatanti sistemoje, Lorenco sistemoje turi 2 ramybės taškus.

$$\begin{cases} y-x=0, \\ \tau x-y-xz=0, \\ xy-bz=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y, \\ \tau y-y-yz=0 \\ y^2-bz=0 \end{cases}$$

$$(\tau-1-z)y=0 \Rightarrow y=0 \text{ arba } z=\tau-1.$$

Kai $y=0$, tai $x=0, z=0$, t.y. ramybės taškas $(0,0,0)$.

Kai $z=\tau-1$, tai

ramybės taškas yra $y^2 = b(\tau-1)$ ir $(\pm \sqrt{b(\tau-1)}, \pm \sqrt{b(\tau-1)}, \tau-1)$.

Lorenco simetriškus ramybės taškus, kai $\tau > 1$ radimo C^+ ir C^- . Kai $\tau \rightarrow 1^+$, tai C^+ ir C^- sprendimai su ramybės tašku $(0,0,0)$ ir stabilumo pitaikymo bifurkacija.

Toliau stabilumo. Atliekame linearizaciją atnesdami netiesinius narius, t.y. $(0,0,0)$ aplinkoje

$$\begin{cases} x' = \sigma(y-x), \\ y' = \tau x - y, \\ z' = -bz. \end{cases}$$

Panauktinė sistemos lygtis rodo, kad $z(t) \rightarrow 0$ eksponentiniu greičiu. Kitoms dviem kryptims reikia tolimesnės sistemos:

$$\begin{cases} x' = \sigma y - \sigma x, \\ y' = \tau x - y, \end{cases}$$

kurios matrica $\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \tau & -1 \end{pmatrix}$, kurios pidsakias $\tau = -\sigma - 1 < 0$,

$$\Delta = \sigma(1-\tau).$$

Kai $\tau > 1$, tai $\Delta < 0$ ir ramybės taškas $(0,0,0)$ yra balnas.

Āia gautas balnas ģe lotohs, nes turime 3-mats (125)
 nēdantus. Pūjums z eksponentiškai gestaučis luyptis
 turime dvi sēmanētasi neis veimaučis balno tasho
 luyptis.

Ķei $z < 1$, tai ~~nos~~ luyptys ģe sēmanēos ū $(0,0,0)$ ģe
 marģas. Kadangi $\Delta = \tau^2 - 4\Delta = (\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\tau) =$
 $= \sigma^2 + 2\sigma + 1 - 4\sigma + 4\sigma\tau = (\sigma-1)^2 + 4\sigma\tau > 0$, tai
 $(0,0,0)$ -stabileis marģas, kai $z < 1$.

Tuo atveju, kai $z < 1$ mros trefektoujis, kai $t \rightarrow \infty$ parselis
 raunytis tasho $(0,0,0)$, Todėl šis tashas ģe globaliai stabilus,
 Todėl šuo atveju neatiras jokus nūbrūis ciklus ar chaoso.

Kai $z > 1$, tai uogūmėjame C^- ū C^+ stabilumę.

Raudame lineauzacię

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \tau-2 & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

ū vestuome tūbrūis, uolūmūis, raunytis tashūi
 $(\pm\sqrt{b(\tau-1)}, \pm\sqrt{b(\tau-1)}, \tau-1)$, t.y.

$$\begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -x \\ y & x & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(\sigma+\lambda)(1+\lambda)(b+\lambda) - \sigma xy - (\sigma+\lambda)x^2 + (b+\lambda)\sigma = 0$$

$$-(\sigma + \sigma\lambda + \lambda + \lambda^2)(b+\lambda) - \sigma xy - \sigma x^2 - \lambda x^2 + b\sigma + b\lambda = 0$$

$$-b\sigma - \sigma\lambda - \sigma b\lambda - \sigma\lambda^2 - b\lambda - \lambda^2 - b\lambda^2 + \lambda^3 - \sigma xy - \sigma x^2 -$$

$$-\lambda x^2 + b\sigma + \sigma\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + (\sigma+1+b)\lambda^2 + (\sigma b + b + x^2)\lambda + \sigma(xy + x^2) = 0$$

$$x^2 = b(\tau-1), y = \pm\sqrt{b(\tau-1)}$$

$$\lambda^3 + (\sigma+1+b)\lambda^2 + (\sigma+\tau)b\lambda + 2b\sigma(\tau-1) = 0$$

Kaip žinome dabar stabilumo tyrimui yra svarbus atvejis, kai $Re \lambda < 0 \rightarrow Re \lambda > 0$, t.y. svarka susimoti, kada $Re \lambda = 0$. Todėl dabome tikrovės reikšmę $\pm i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Šias s. t.r. lygtis turime:

$$-i\omega^3 - (\sigma + 1 + \beta)\omega^2 + (\sigma + \tau)\beta i\omega + 2\beta\sigma(\tau - 1) = 0$$

Re dalys:

$$-(\sigma + 1 + \beta)\omega^2 + 2\beta\sigma(\tau - 1) = 0, \quad (1)$$

Im dalys:

$$-\omega^3 + (\sigma + \tau)\beta\omega = 0. \quad (2)$$

At (2):

$$\omega(\sigma + \tau)\beta - \omega^2 = 0$$

$$\omega = 0 \text{ arba } (\sigma + \tau)\beta - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = (\sigma + \tau)\beta$$

$\lambda_1 = 0$

Tuomet iš (1) gauname kvadratinę reikšmę:

$$-(\sigma + 1 + \beta)(\sigma + \tau)\beta + 2\beta\sigma(\tau - 1) = 0 \quad /: \beta > 0$$

$$-(\sigma + 1 + \beta)(\sigma + \tau) + 2\sigma(\tau - 1) = 0$$

$$-(\sigma + 1 + \beta)\sigma - 2\sigma + \tau(2\sigma - \sigma - 1 - \beta) = 0$$

$$\tau = \frac{\sigma(+\sigma + 1 + \beta + 2)}{\sigma - \beta - 1}$$

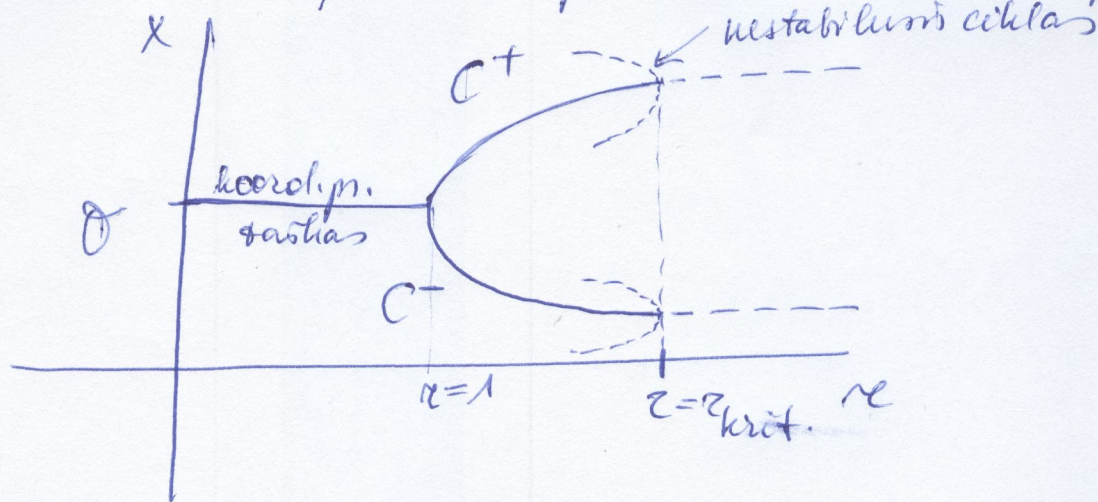
$$\tau_{krit.} = \frac{\sigma(\sigma + \beta + 3)}{\sigma - \beta - 1} \quad \sigma - \beta - 1 > 0$$

Nadlinari, kai $\tau > 1$, bet $\tau < \tau_{krit.}$, tai C^+ ir C^- yra stabilūs.

Kai $\tau = \tau_{krit.}$, tai C^+ ir C^- patiria Hopfo bifurkaciją. Ši harto po bifurkacijos, kai τ tik truputį didinamas už $\tau_{krit.}$ sunku nusipėti elgseną, bet turime subkritinę Hopfo bifurkaciją. Todėl ribiniai atvejai egzistuoja tik, kai $\tau < \tau_{krit.}$

Kai $\tau < \tau_{krit.}$, tai raumybės taškai yra stabilūs, tačiau (194) jai yra apgauti balno ciklu. Tai naujas ribinio ciklo tipas, kuris sutinkamas triuštis ir olidinesė sistemoje.

Kai $\tau \rightarrow \tau_{krit.}$, tai ribinio ciklas trunka aplink raumybės tašką ir kai patenama slopsio bifurkacijoje raumybės taškas iš absorbuoja ir paliečia balno ciklo balno tašką. Kai $\tau > \tau_{krit.}$, aplinkoje nėra atraktoriaus. Todėl, kai $\tau > \tau_{krit.}$, trajektorijos tolsta laukiau, kai $\tau > \tau_{krit.}$ nėra užuominų apie stabilūs taškus (šv. par.).



Daciau trajektorijos nėra nušėpiančios ir begalytė. Jos yra nūstai tauri šluose nūdarose suityje, kurioje inglak žuolė, bet nesunkerta nedon lūstais trajektorijomis, nei kerta pacios sara (duigelio par.).

Tai kastas atraktoriaus. Atrodo, kad tauri suvūnyra du pamisai. Daciau tik tag atrodo, tai - ilurijė, tai - fraktalas - aobė taškus, kuris tūris lygus 0, bet pamisus - begalinis, shartūwai elqurūneutai mūrodo, kad ^{fr}fraktalo dūmūrijė yra 2,05!

Judėjimas atraktoriuje paktus pūadūnūmū sūlygūmū, T. y. trajektorijos, kuris pūadūnūmū arti nūmū lūtos elqūmū labai slūntūgū. Tūlūmū sūstūmū mūlo nūgalūmū nūmūlyti.

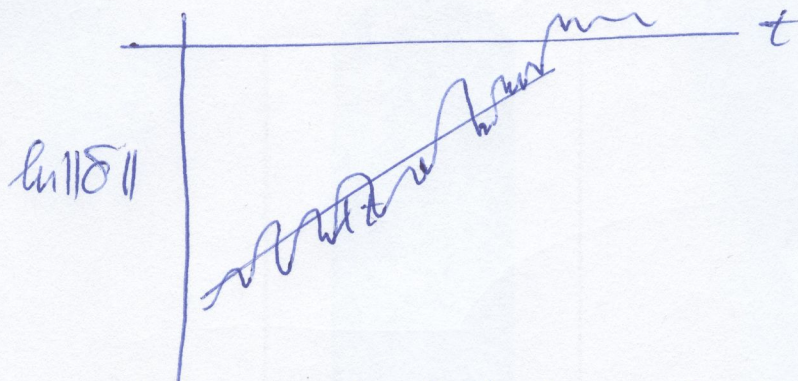
Nūpūnūkūmū atraktoriūmū trajektorijū $x(t)$ yra trajektorijos taškas laiko momentu t . Dūpū $x(t) + \delta(t)$ yra šalta esantū taškas, o δ yra pūo abūmūantū rektoriū, kuris pūadūnūmū ilqūmū $\|\delta_0\| = 10^{-15}$.

Lorenco atraktoriūmū shartūmū analūmū parūolū, kad $\delta(t)$ aūga elqūpūnūntūshai, tūy. $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t}$, $\lambda = 0,9$.

Todėl greičiau trajektorijos išsiskiria eksponentiniu greičiu. (128)

Jei uibrėšime $\ln \|\delta(t)\|$ grafiškai, tai matysime, kad jis artimas tiesei, su teigiamu polininiu koeficientu λ (kryptas)

$$\frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta_0(t)\|} \approx e^{\lambda t} \Rightarrow \ln \frac{\|\delta(t)\|}{\|\delta_0\|} \approx \lambda t.$$

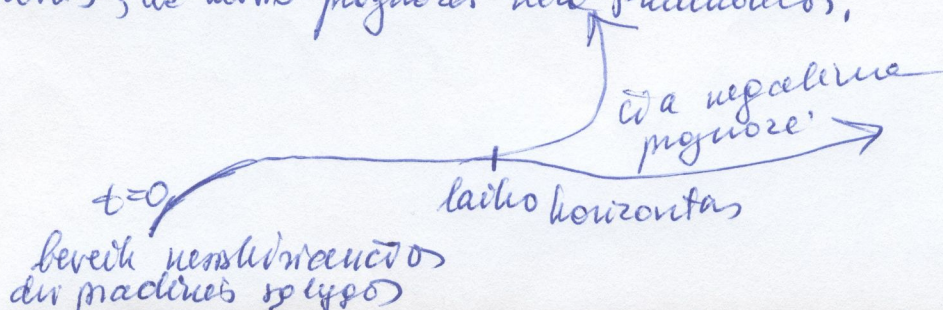


Greiči meliada nėra tiesi, ji banguoja, nes kinta eksponentinis divergavimas atraktoriuje.

Skaitinis λ rodiklis Lapunovo eksponente.

Taip apibūdus n -matę dinaminę sistemą pagrįstuopa ir skirtingų Lapunovo eksponentių. Naupiuokime polycius pradinius slygus mažo diametro sferoje, kertant pradinius slygus sferą paimta mažu elipsoidu. Jėgal $\delta_k(t)$, $k=1, \dots, n$ išvoluta k -toms elipoido ašies ilgs. Tuoomet $\delta_k(t) \sim \delta_k(0)e^{\lambda_k t}$, λ_k - Lapunovo eksponentis. Ilgu laiko intervalu elipoido diametro valdo labiausiai sergama λ_k . Todėl pamastai λ yra didžiausia Lapunovo eksponentė. Šio vertus, λ miklausius $\lambda < 0$, kuris trajektorijos sugrįžtume. Norėdami nustatyti λ turėtume suvaidinti reikšmes daugelyje skirtingų sugrįžtamos trajektorijos taškų.

Kai sistemoje turi teigiamą Lapunovo eksponentę yra laiko horizontas, už kurio prognozės nėra tiksliosios.



Jei mes pradins slyps pamatavome labai tiksliai ($\|\delta_0\|$ paklaida). Po tam tikro laiko skirtingas vaizgas olti $\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t}$. Jei aye mity tolerancijos matas, tai ju prognoze yre besilinianti uolauptau kaip a, tai je laiko me tukaime. Toliau atrefu, kai $\|\delta(t)\| \geq a$ mes jau neturime tukaime prognozes. Kuris laiko prognoze buo tukaime?

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t}$$

$$a \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t} \Rightarrow \ln \frac{a}{\|\delta_0\|} \approx \lambda t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\text{horizontas}} \sim \left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\|\delta_0\|} \right)$$

Okaz matome, mes negalime prognozuoti ilgiau nei $t_{\text{horizontas}}$. Javegi negalime prognozuoti chaotines sistemos elgseno ilgiam laikotarpiu.

Prz.: Sakylime, kad tolerancije yre $a = 10^{-3}$ ir mes norime prognozuoti chaotines sistemos elgsena. Tarkime, kad pradines slyps netiksnumas (paklaida) yre $\|\delta_0\| = 10^{-7}$. Tiksl laiko galime prognozuoti nepateisdamu tolerancijos?

$$t_{\text{horiz.}} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = \frac{1}{\lambda} 4 \ln 10$$

Pavildinome pradines slyps tikslumo 1000 karto.

$$t_{\text{horiz.}} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-10}} = \frac{1}{\lambda} 7 \ln 10$$

Tols pradines slyps tikslumo pavildinome tik 2,5 karto patigmo prognozavimo laiko.

Pavildinome tikslumo 10^6 karto

$$t_{\text{horiz.}} = \frac{1}{\lambda} 10 \ln 10$$

Prognozavimo laikas patigmo 2,5 karto lygriaus su pradiniu. Tai rodo, kad prognozavimo yre beprasmi chaotinese sistemoje.

Nebe gresio chaoso apibrėžimo, tačiau yra aišku, kas turi sudaryti chaosą, t.y. tai, kas pats būdinga.

Chaosas - tai ilgalaikė nepastoviai deterministinio sistemos elgseno jautri pradiniams sąlygoms.

1. Reprodukcinė elgsena reikšima, kad ilgai laukiant trajektorijos neartėja prie ramybės būsenos ar periodinio oscilacijos, kai $t \rightarrow \infty$, Toliau trajektorijos būsenos trūkumai turėtų būti nelygi 0.

2. Deterministinio sistemo, tai sistemo, kuri neturi atraktorių ar traukimo namų. Nereguliarus elgsenas kyla iš sistemos netiesiškumo.

3. Jautrumas pradiniams sąlygoms reikšima, kad artimo trajektorijos eksponentiška greitai išsiskiria, t.y. sistemo turi Lyapunovo eksponentą.

Pvz: Meritina pavyzdži chaoso ir nestabilumo.

Autonominė sistemo

$x' = x$ yra deterministinė ir iliustruojama

eksponentiškai greitai trajektorijos atskyrimas, nes

$x(t) = C e^t$.

Tačiau ši sistemo nėra chaotiška, nes trajektorijos yra nuolat atskiriamos; bealybė ir meliade negyžte atgal, t.y. taškas $x^* = 0$ yra repeleris. Šiuo atveju bealybė reikšima kaip atraktorių. Chaotiškai elgsena turi būti aperiodinė.

Atraktorių ir limitas atraktorių

Atraktorių taip pat yra sunku gūvestai apibrėžti. Apibrėžimas turi būti pakankamai platus, kad s'trauktis nors "natūralūs" kandidatus ir pakankamas, kad pasalinti netikrus kandidatus.

Taip pat sahaat atraktorių - aibė, kuri pritraukia trajektorijas, t.y. taškai, s' kuriuos komer guoja artimo trajektorijos. Atraktorių parysčiai yra stabilius ramybės būsenai arba stabilius vėlavai vėlavai.

Triūtesnis atraktorių apibrėžimas būto tols:

tegu A - uždaro aibė turinti žaundau išvardytas sąlygas:

1) A - invariantinė: \forall trajektorije $x(t)$, prasideclauti

atberje A, jope ir liela nīša laiks.

2) A priekšmeta atvēršanas leņķis ir α ; ja atvēršanas leņķis ir α , tad $x(t)$ atstums ir A ar laiku $t=0$, kad $t \rightarrow \infty$, tad rezultāts, kad A priekšmeta nīša laiks, kurš parāda pakaušamā ar laiku A. Un ja nīša laiks A priekšmeta sistēmā.

3) A pie minimālā: nīša laiks A priekšmeta, kuram galotās 1) un 2) savienās.

Pzi: Nagrināsim sistēmu:

$$\begin{cases} x' = x - x^3, \\ y' = -y \end{cases} \quad \text{J: } -1 \leq x \leq 1, y = 0.$$

Ar Timanautas? Ar priekšmeta atvēršanas leņķi α ?
Ar Tye atraktoriem?

Raunysis tāsķai: $x(1-x^2)=0 \Rightarrow x_1^*=0, x_2^*=-1, x_3^*=1, y=0.$

$$A = \begin{pmatrix} -3x^2+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tāsķe (0,0): $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$+\lambda^2 - 1 = 0, \quad \xi = 0, \quad \Delta = -1 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

Tāsķas (0,0) - balnas.

Stabils asis nustatome t. rektoriem, kuri atdod t. rektoriem $k = -1$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{V} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = 0 \\ v_1 = 0, \quad v_2 \text{ - bet liels} \end{cases}$$

$$\vec{V} = (0, 1)$$

Tāsķe (1,0) un (-1,0) bus tā pati matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Stabils maršpai:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \begin{cases} \xi = -3 < 0 \\ \Delta = 1 > 0 \end{cases}$$

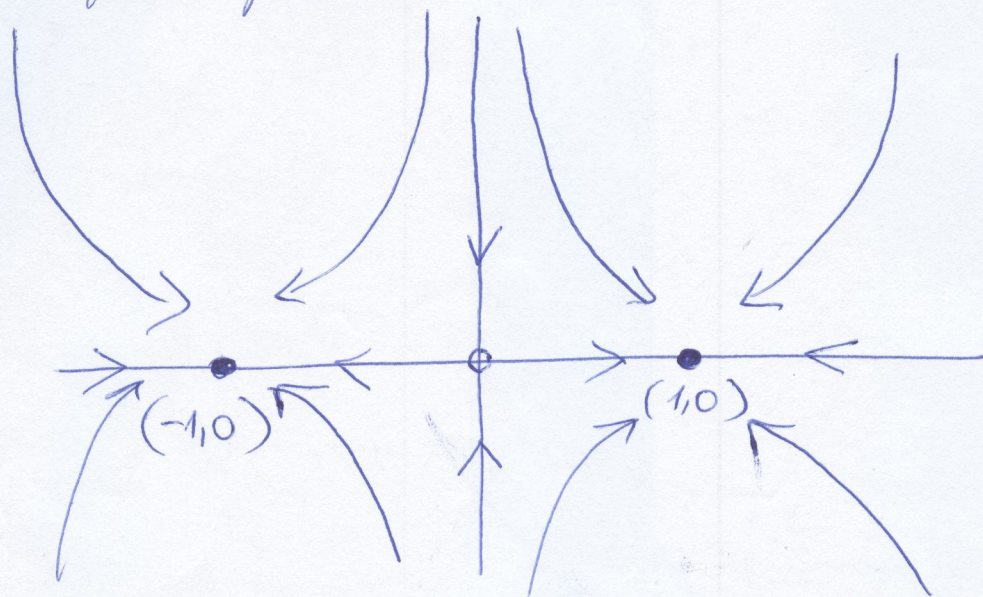
$$\lambda_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$ t. reiškinys atrodantis t. vektorius nustato parabolės vestigį.

$$\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \vec{V} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -v_1 = 0, \\ -2v_2 = 0 \end{cases} \vec{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1=0 \\ v_2 \text{ bet?} \\ \text{holis.} \end{matrix}$$

Tuomet fazinis portretas:



Matome, kad \forall trajektoriję, pradedanti \exists poje ir liecia $\forall t$. Tadinari \mathcal{I} -invariantine.

\mathcal{I} pritaikoma atviro pradines sąlygas aibe, t.y. ji pritaikoma visas xy p-luo trajektorijas. Todėl galime ir 2) sąlyge būdinga atraktoriui.

Tačiau galime sudaryti \mathcal{I} poabę ir taškus $(-1, 0)$ ir $(1, 0)$, kuris turės puo miestas 1) ir 2) sąlygas. Tadinari tik taškai $(-1, 0)$ ir $(1, 0)$ yra šio sistemos atraktoriai. Abi \mathcal{I} utenkimo minimumo reikšmės.

Analogiška situacija yra su Lorenco atraktoriu. Šio trajektorijos yra pritaikoma tame tikro ulvuo lieto aibe, bet ša aibe nebūtinai yra atraktoriu, nes ji gali nebūti minimali. Tačiau nere srodymų, bet visi ški, kad šai- atraktoriu.

Kestas atraktoriu - tai atraktoriu, kuris labai jautriai reaguoja į pradines sąlygas. Kesti, nes ji daruiai yra fraktals aibe.