Bifurkacijos autonominėse dviejų lygčių sistemose

Prisiminkime pirmosios eilės dinamines sistemas ir bifurkacijas jose. Kaip žinome, tokiose sistemose ramybės taškai gali išnykti arba atsirasti, gali pakisti jų stabilumas priklausomai nuo valdančiųjų parametrų.

Dvimačiu atveju viso tai netinka orbitoms. Tyrinėsime situacijas, kada osciliacijos atsiranda arba išnyksta. Naprinešime platesnį bifurkacijos sąvoką, kai bifurkacija suprantame kaip fazinio portreto topologinis pokytis keičiantis parametrams. Pavyzdžiuose matysime kintantį ramybės taškų skaičių arba jų stabilumo pokyčius, uždaras orbitas arba balnus kintant sistemos parametrams.

Balno-mazgo, transkritinės ir Pitčforko bifurkacijos

Šios bifurkacijos yra vienmačio atvejo bifurkacijų analogai. Tai iš esmės reiškia, kad nepasirodo nieko naujo. Visos veiksmas yra perkeliamas į vienadimensį poerdvį, kuriame ir stebime bifurkacijas, o kitos dimensijos tik tik paprastas pritraukimas prie to poerdvio (t.y. trajektorijos pritraukiamos prie poerdvio, kuriame ir vyksta bifurkacijos).

I. Balno-mazgo bifurkacija.

Tai – bazinė bifurkacija, kurios metu sukuriami nauji arba išnyksta jau esami ramybės taškai. Tipinis pavyzdys 2-mačiu atveju:

$$\begin{cases} x' = \mu - x^2, \\ y' = -y. \end{cases}$$

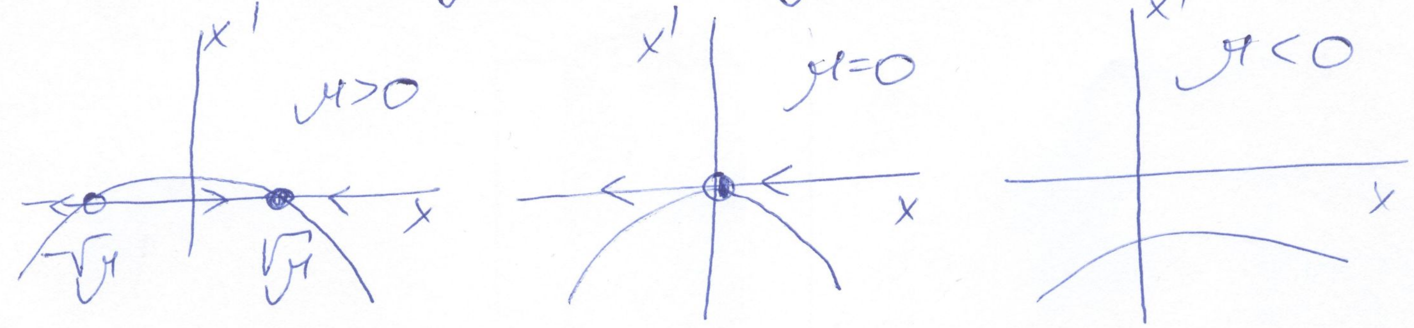
Šiuo atveju bifurkaciją stebime x kryptimi, t.y. turime vienmatį atvejį. y kryptimi sprendiniai eksponentiškai gęsta. Nagrinėkime fazinį portretą, kai μ kinta.

1) kai $\mu > 0$, tai $\mu - x^2 = 0 \Rightarrow x^*_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$

Turime du ramybės taškus $(\sqrt{\mu}, 0)$, $(-\sqrt{\mu}, 0)$.

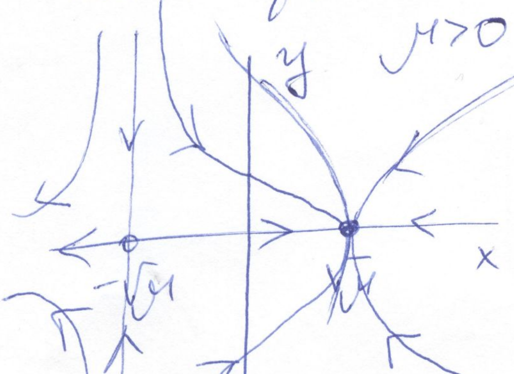
Taškas $(\sqrt{r}, 0)$ yra stabilusis mazgas, o taškas $(-\sqrt{r}, 0)$ – nestabilusis balnas.

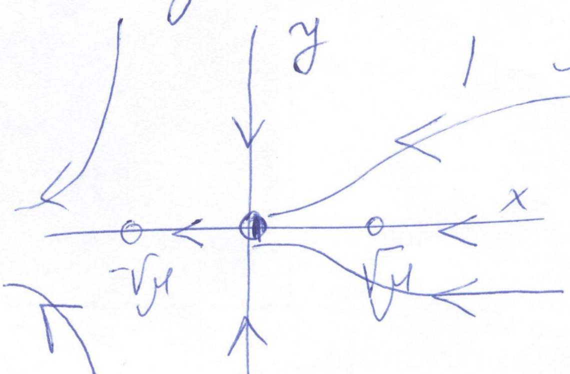
Kai r mažėja, tai ramybės taškai artėja vienas prie kito. Esant $r=0$, jie susilieja (taškas $r=0$ yra pusiau stabilus), o kai $r<0$, tai ramybės taškas išnyksta.

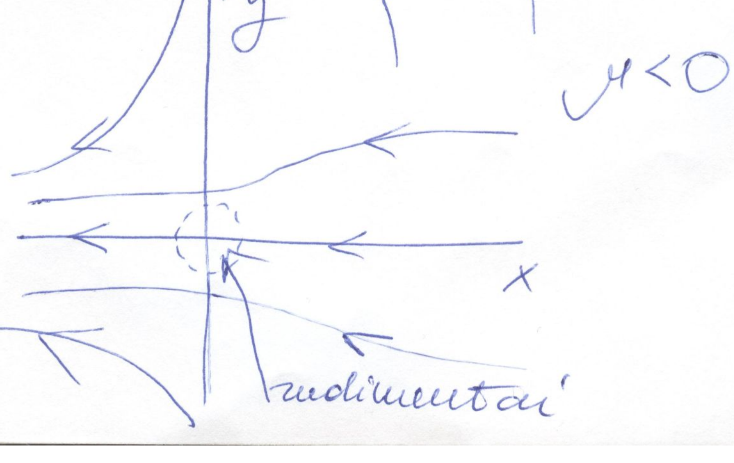


Po to, kai ramybės taškai susilieja ir galiausiai išnyksta, jie rudimentai dar išlieka faziniame portrete, t.y. ties $x=0$ yra siaura sritis, kurioje fazinio taško judėjimas yra labai lėtas. Charakteringasis trajektorijų sulėtėjimo laikas auga proporcingai dydžiui $(r-r_c)^{-1/2}$, r_c – kritinė parametro r reikšmė, ties kuria įvyksta balno ir mazgo bifurkacija.

Tuomet faziniai portretai yra tokie:



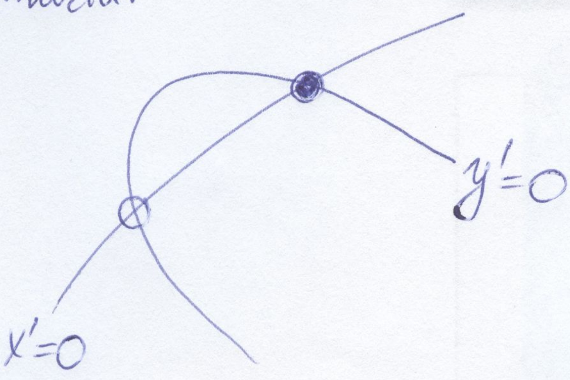




Panagrinėkime bendresnę dinaminę sistemą

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y), \end{cases}$$ kuri priklauso nuo parametro μ.

Sakykime, kad esant tam tikrai μ reikšmei nulinės izoklinės susikerta.



Kiekvienas iš susikirtimo taškų yra ramybės taškas, nes kartu $x'=0$ ir $y'=0$ tame taške. Norėdami stebėti kaip juda ramybės taškai kintant μ reikšmei mes turime stebėti tokių kreivių (nulinių izoklinių) susikirtimą. Kintant μ ramybės taškai artėja vienas prie kito (nulinės izoklinės stumia viena kitą tolyn) ir susilieja, kai $\mu = \mu_c$, kuriame viena nulinė izoklinė tampa kitos liestine. Nulinėms izoklinėms toliau tolstant viena nuo kitos jos prasiskiria ir ramybės taškas išnyksta. Todėl visos balno-mazgo bifurkacijos elgiasi taip, kaip ką tik buvo aptarta.

Pvz.: Nagrinėkime genetinę sistemą

$$\begin{cases} x' = -ax + y, \\ y' = \dfrac{x^2}{1+x^2} - by, \end{cases}$$

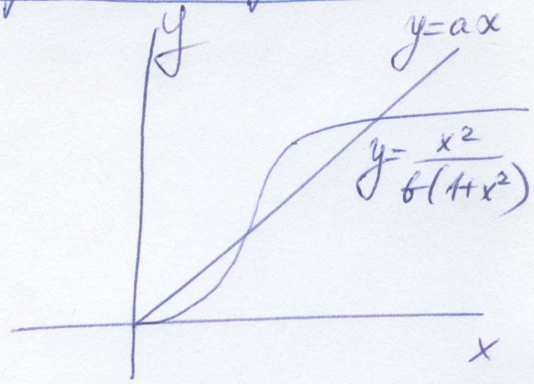
x ir y yra baltymo ir RNR iš kurios jis išskiriamas koncentracijos, $a>0$, $b>0$ - parametrai, kurie reguliuoja x ir y skilimo greitį.

Parodysime, kad sistema turi 3 ramybės taškus, kai $a < a_c$, a_c turi būti nustatytas. Parodysime, kad du iš jų susijungia į mazgo-balno bifurkaciją, kai $a = a_c$. Nubrėšime fazinį portretą, kai $a<a_c$.

Randame nulines izoklines

MATLAB
DS-paskaita-10pav4.m

$$\begin{cases} x'=0, \\ y'=0. \end{cases}$$



$$-ax+y=0 \Rightarrow y=ax$$

$$\frac{x^2}{1+x^2}-by=0 \Rightarrow y=\frac{1}{b}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}.$$

(S-kreivė)

Sakykime, kad b – fiksuotas, o keičiame tik a.

Kaip matome, mažiems a turime 3 susikirtimo taškus. Didinant a, viršutiniai du ramybės taškai susilieja, kai tiesė tampa S kreivės liestine. Toliau didinant a tie du taškai išnyksta ir lieka tik vienas taškas – koordinačių pradžios taškas.

Norėdami surasti a_c, randame nulinių izoklinių susikirtimo taškus:

$$ax=\frac{x^2}{b(1+x^2)}$$

$$abx(1+x^2)=x^2 \quad (*)$$

$$x=0, \quad ab(1+x^2)-x=0$$

$$abx^2-x+ab=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4a^2b^2}}{2ab}$$

Vienas ramybės taškas yra $(0,0)$, o kiti taškai priklauso nuo a.

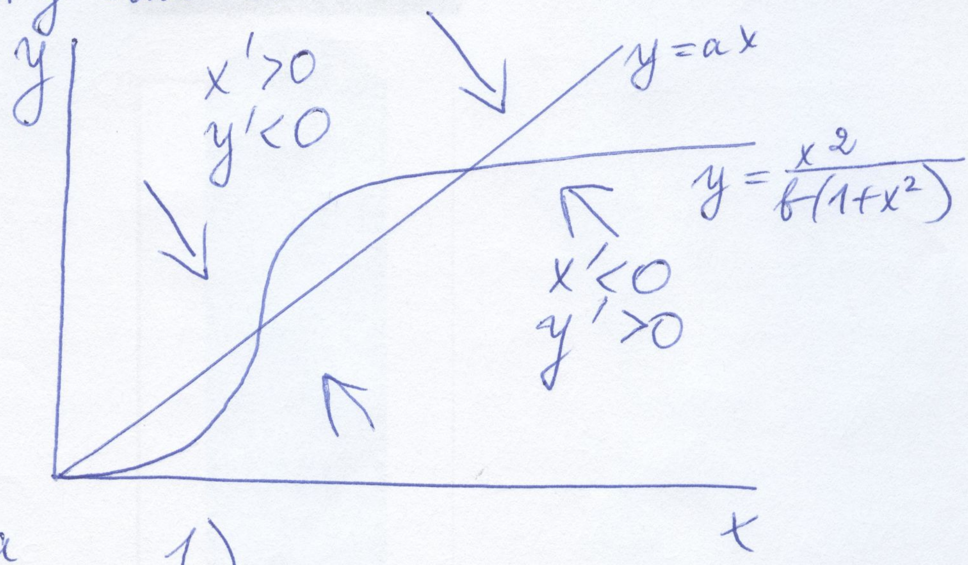
Jei $1-4a^2b^2>0$, t.y. $2ab<1$, tai turime du taškus.

Jei $1-4a^2b^2=0$, t.y. $2ab=1$, $a_c=\frac{1}{2b}$ – nustatyta ribinė reikšmė, kai turime vieną tašką.

Šiuo atveju $x_{1,2}=\frac{1}{2ab}$ arba $x^*_{1,2}=1$, $y^*=\frac{1}{2b}$. Šiame taške ir vyksta bifurkacija.

Nulėnės izoklinės suteikia daug informacijos apie fazinį portretą, kai $a < a_c$. (102)

Tiesėje $y = ax$ ($x' = 0$), t. y. vektorinis laukas yra vertikalusis (tiesėms lygiagrečios Oy ašiai). S kreivėje $y' = 0$ ir vektorinis laukas yra horizontalusis. Kitas vektorinio lauko kryptis nustatome tirdami x' ir y' ženklus.



Matrica $A = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + (a+b)\lambda + ab - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$\tau = -(a+b) < 0$$

Rimties ramybės taškų tipas priklauso nuo Δ, t. y. nuo determinanto.

Taške $\underline{(0,0)}$, $\Delta = ab$, o $a > 0$, $b > 0$, t. y. $\underline{\Delta > 0}$. $\underline{(\tau < 0)}$

Todėl taškas $(0,0)$ yra stabilusis (židinys arba mazgas).

Kadangi $\tau^2 - 4\Delta = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$, tai taškas yra <u>stabilusis mazgas</u> ($\underline{D > 0}$), išskyrus, kai $a = b$.

Kitais atvejais

$$\Delta = ab - \frac{2x^*}{(1+x^{*2})^2}$$

Remdamiesi lygybe (*) turime, kad

$$x^* = ab(1+x^{*2})$$

Tuomet

$$\Delta = ab - \frac{2ab(\cancel{1+x^{*2}})}{(1+x^{*2})^{\cancel{2}}} = ab\left(1-\frac{2}{1+x^{*2}}\right) =$$

$$= ab\left(\frac{1+x^{*2}-2}{1+x^{*2}}\right) = ab\cdot\frac{x^{*2}-1}{1+x^{*2}}$$

Todėl atveju, $\underline{\Delta<0}$, kai $0<x^*<1$. Vadinasi viduriniysis taškas yra <u>balnas.</u>

Kai $x^*>1$, tai $\underline{\Delta>0}$, bet $\Delta< ab$, o

$$D = (a+b)^2 - 4ab\,\frac{x^{*2}-1}{1+x^{*2}} = a^2+2ab+b^2-4\underbrace{ab\frac{x^{*2}-1}{x^{*2}+1}}_{<ab} >$$

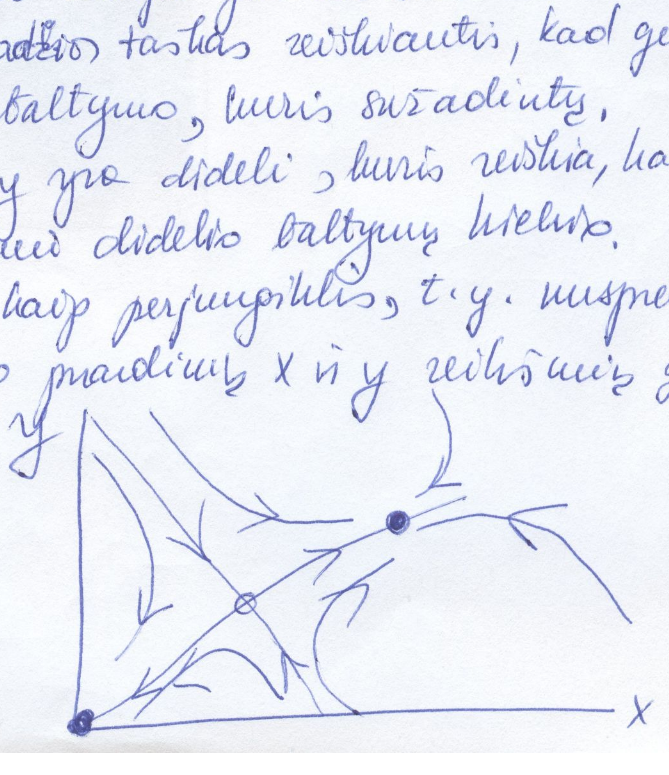
$$>(a-b)^2>0$$

$$\underline{D>0}.$$

Taigi trečiasis taškas yra <u>stabilusis mazgas.</u>

Nestabilioji sritis yra tarp dviejų nulinių izoklinių (siauroje srityje). Stabilioji sritis yra dviejose dalyse.

Biologinė interpretacija: sistema veikia kaip biocheminis jungiklis, tačiau tik tuo atveju, jei skilimo greitį reguliuojantys parametrai tenkina sąlygą $ab<\frac{1}{2}$. Šiuo atveju yra du stabilūs taškai. Vienas - koordinačių sistemos pradžios taškas reiškiantis, kad genai yra ramūs ir aplinkui nėra baltymo, kuris susidarytų. Kitas ramybės taškas, kai x ir y yra dideli, kuris reiškia, kad genai yra aktyvūs ir veikiami didelio baltymų kiekio. Stabilioji balno ašis veikia kaip perjungiklis, t.y. nusprendžiama, kada priklausomai nuo pradinių x ir y reikšmių genai įjungiami arba išjungiami.



Kaip matome, bifurkacijos iš esmės yra vienmačiai reiškiniai, t.y. taškai juda tiese vienas pro kito. Todėl tiek daug dėmesio ir skyrėme bifurkacijų analizei vienmačiu atveju.

Transkritinė ir pitčforko bifurkacijos

Remdamiesi tomis pačiomis idėjomis kaip ir anksčiau mes galime nagrinėti ir transkritinę bei pitčforko bifurkacijas.

Remdamiesi vienmačiais atvejais tirkime tokias dinamines sistemas:

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^2, \\ y' = -y \end{cases} \text{(transkritinė)}, \quad \begin{cases} x' = \mu x - x^3, \\ y' = -y \end{cases} \text{(superkritinė pitčforko)},$$

$$\begin{cases} x' = \mu x + x^3, \\ y' = -y \end{cases} \text{(subkritinė pitčforko)}.$$

Visų trijų atvejų analizė yra analogiška. Detaliai aptarsime tik superkritinę pitčforko bifurkaciją. Kitos dvi lieka sav. darbui.

<u>Pvz.:</u> Nubrėšime fazinį portretą superkritinei pitčforko sistemai

$$\begin{cases} x' = \mu x - x^3, \\ y' = -y, \text{ kai } \mu < 0, \mu = 0 \text{ ir } \mu > 0. \end{cases}$$

Ramybės taškai:

$$x(\mu - x^2) = 0$$

$$x_1^* = 0, \quad x_{2,3}^* = \pm\sqrt{\mu}$$

Kai $\mu < 0$, tai turime tik vieną ramybės tašką $(0,0)$, kuris yra stabilusis ($f' = \mu - 3x^2 < 0$).

Kai $\mu = 0$, tai turime taip pat vieną ramybės tašką $(0,0)$, kuris taip pat yra stabilusis ($f' = -3x^2 < 0$, $\forall x \neq 0$). Taško $(0,0)$ stabilumą tyrėme grafiniu būdu.

Kai $\mu > 0$, tai turime 3 ramybės taškus: $(0,0)$, $(-\sqrt{\mu}, 0)$ ir $(\sqrt{\mu}, 0)$. Šiuo atveju taškas $(0,0)$ jau praranda stabilumą, nes $f' = \mu - 3x^2 > 0$. Taškai $(-\sqrt{\mu}, 0)$ ir $(\sqrt{\mu}, 0)$ yra stabilūs. Įvyko šiuo atveju atsiranda.

Kai $x^*=\pm\sqrt{\mu}$, tai $f'(\pm\sqrt{\mu})=\mu-3\mu=-2\mu<0$, kai $\mu>0$.

Sudarome linearizacijos matricą:

$$A=\begin{pmatrix}\mu-3x^2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

<u>Kai $\mu<0$:</u>

$$A_{(0,0)}=\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda^2-(\mu-1)\lambda-\mu=0$$

$$\tau=\mu-1,\quad \Delta=-\mu.$$

Kai $\mu<0$, tai $\tau<0$, $\Delta>0$, o $D=(\mu+1)^2>0$

Taškas $(0,0)$ - <u>stabilusis mazgas.</u> Lėtinės krypties vektorius $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

<u>Kai $\mu=0$:</u>

$$A_{(0,0)}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda^2-(-1)\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-1$$

$\tau<0$, $\Delta=0$ - taškų tiesė

<u>Kai $\mu>0$:</u>

$A_{(0,0)} \Rightarrow \tau=\mu-1,\ \Delta=-\mu<0 \Rightarrow (0,0)$ - <u>balnas.</u>

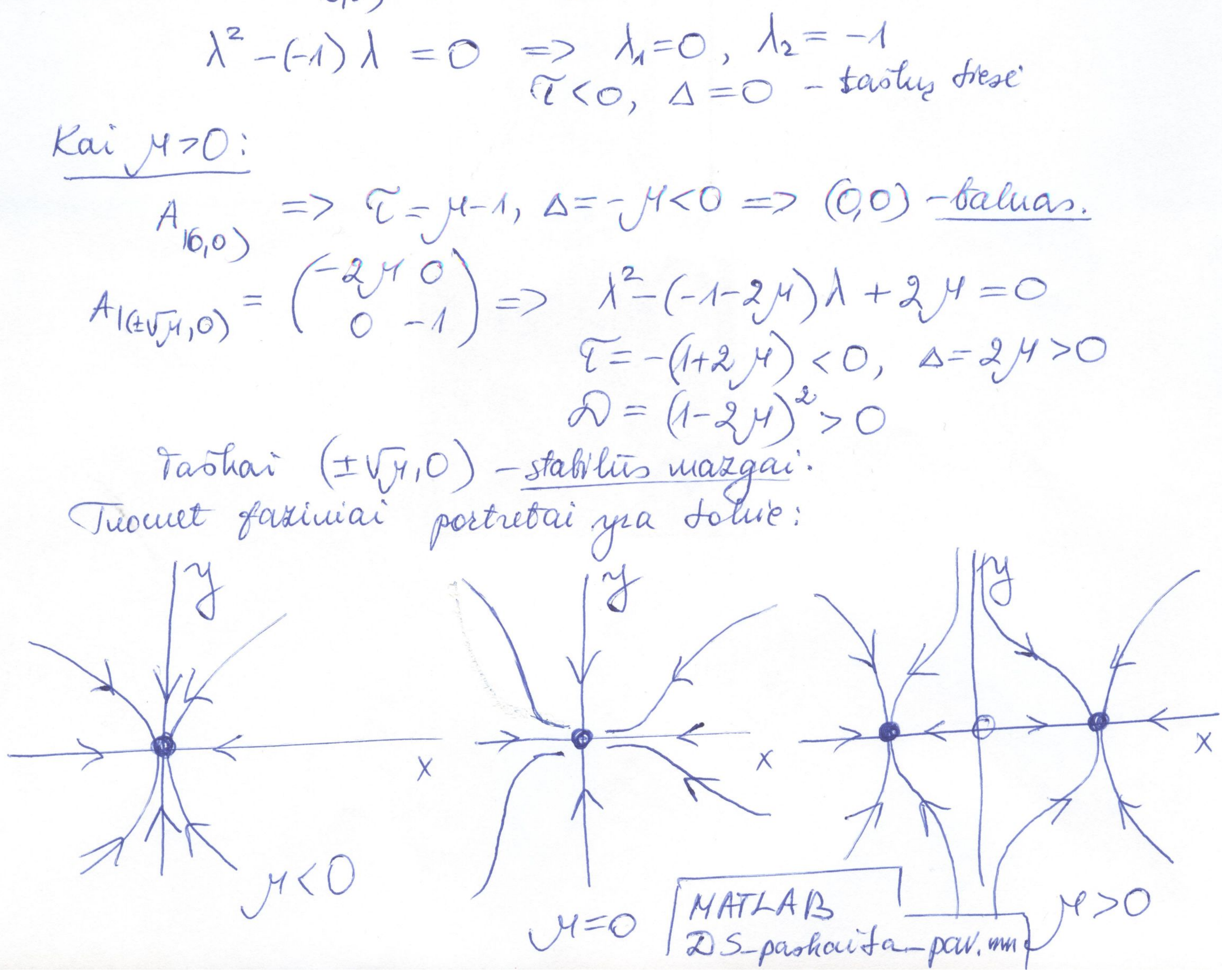
$$A_{(\pm\sqrt{\mu},0)}=\begin{pmatrix}-2\mu & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2-(-1-2\mu)\lambda+2\mu=0$$

$$\tau=-(1+2\mu)<0,\quad \Delta=2\mu>0$$

$$D=(1-2\mu)^2>0$$

Taškai $(\pm\sqrt{\mu},0)$ - <u>stabilūs mazgai.</u>

Tuomet faziniai portretai yra tokie:



Pvz. (su simetrija)

Parodysime, kad koordinačių sistemos pradžios taške stebime superkritinę pitchforko bifurkaciją dinaminei sistemai

$$\begin{cases} x' = \mu x + y + \sin x, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Rasime kritinę bifurkacijos reikšmę μ_c. Nubrėšime fazinį portretą taško $(0,0)$ aplinkoje, kai $\mu \gg \mu_c$.

Kadangi pakeitę $x \to -x$, o $y \to -y$ mes gauname tą pačią dinaminę sistemą, tai fazinis portretas bus simetrinis (simetrijos ašis eis per koordinačių pradžią).

Ramybės taškai: $\begin{cases} \mu x + y + \sin x = 0 \\ x - y = 0 \quad \Rightarrow x = y \end{cases}$

$$\mu y + y + \sin y = 0$$

$$y(\mu + 1) = -\sin y$$

$\boxed{\begin{matrix} y = 0 \\ x = 0 \end{matrix}}$ – ramybės taškas su visomis μ reikšmėmis.

Jakobianas:

$$A = \begin{pmatrix} \mu + \cos x & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ramybės taške $(0,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mu + 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (1 - \mu - 1)\lambda - \mu - 1 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \mu\lambda - (\mu + 2) = 0$$

$$\tau = \mu, \quad \Delta = -(\mu + 2)$$

Kai $\Delta < 0$, t.y., kai $\mu + 2 > 0 \Rightarrow \underline{\mu > -2}$, tai taškas $(0,0)$ – balnas.

Kai $\Delta > 0$, o $\tau < 0$, tai turime stabilųjį taškę (t.y., kai $\mu + 2 < 0 \Rightarrow \mu < -2$).
Nadinasi pitčforko bifurkacija stebime esant kritinei reikšmei $\mu_c = -2$.
Turime surasti ramybės taškų porą, esančią arti taško $(0,0)$, kai μ artimas μ_c.

T.y. grįžtame prie lygties ramybės taškų nustatymui:

$x = y$, tai

$$(\mu+1)x + \sin x = 0$$

$\sin x$ skleidžiame laipsnine eilute (x – mažas $\neq 0$):

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$$

Įvedame

$$(\mu+1)x + x - \frac{x^3}{6} = 0$$

$$x\left(\mu + 2 - \frac{x^2}{6}\right) = 0$$

$$x_1^* = 0, \quad x_{2,3}^* = \pm\sqrt{6(\mu+2)}.$$

Kadangi $(0,0)$ – balnas, tai bifurkacija yra superkritinė pitčforko bifurkacija ir dėl šios priežasties naujų ramybės taškų stabilumo galime ir netirti. Žinome, kad tokiai bifurkacijai jie – stabilūs.

Norėdami nubrėžti fazinį portretą taško $(0,0)$ aplinkoje, turime surasti tikrinius vektorius, kai $\mu > -2$.
Sudarome jakobianą $\mu_c = -2$, t.y.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

T. reikšmės: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$$\lambda(\lambda+2) = 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2.$$

Randame atitinkamus t. vektorius $\vec{V_1}$ ir $\vec{V_2}$:

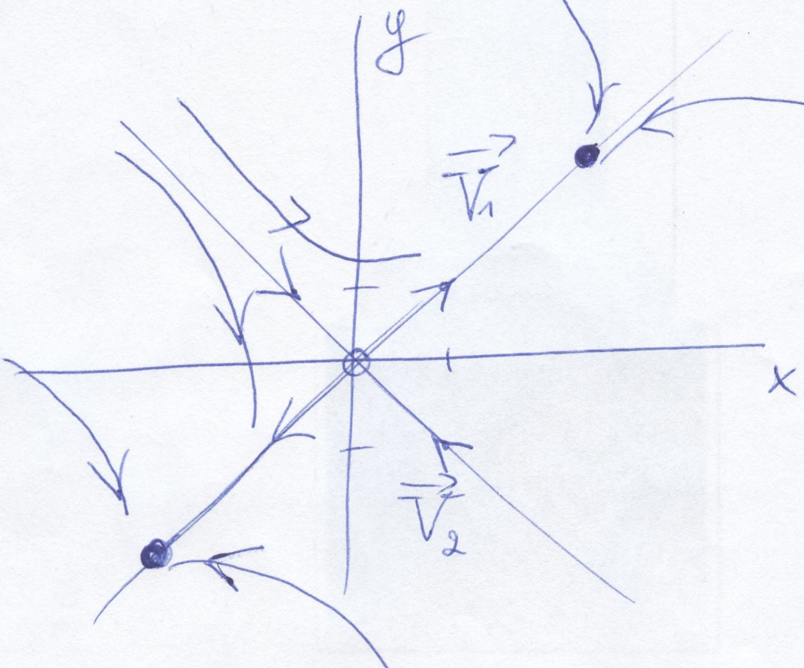
$\lambda_1 = 0$:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 + v_2 = 0, \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2, \text{ pvz. } \vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = -2$
$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 + v_2 = 0 \\ v_2 = -v_1, \text{ pvz. } \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Tuomet fazinis portretas



Reikėtų prisiminti, kad toks fazinis portretas yra galimas arti ramybės taško ir kai r artimas r_c. Kitais atvejais visa tai negalios.

MATLAB
DS_paskaita_pav.m