3 skyrius

Kursinio darbo temos

3.1. Paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų pradinis uždavinys

1 tema. Nagrinėkime Mėnulio judėjimą aplink Žemę jų traukos jėgų lauke. Kadangi Žemės masė yra daug didesnė už Mėnulio masę, tai laikysime, kad Žemė nejuda ir yra koordinačių pradžios taške. Tada normuotosios Mėnulio padėties koordinatės $Y = (y_1, y_2)^T$ tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -\dfrac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}\,, \\ \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = -\dfrac{y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} \end{cases}$$

ir pradines sąlygas:

$$\begin{aligned} &y_1(0) = 1 - e, \quad y_1'(0) = 0\,, \\ &y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- Parodykite, kaip šis matematinis modelis yra gaunamas iš bendro dviejų planetų judėjimo jų tarpusavio traukos lauke uždavinio.
- Išspręskite diferencialinių lygčių sistemą (modeliuokite Mėnulio judėjimo trajektoriją) naudodami išreikštinius Eulerio, ketvirtosios eilės Rungės Kuto ir adaptyvųjį Rungės-Kuto ir Fehlbergo metodus. Įvertinkite integravimo žingsnio dydį, garantuojantį 0.001 dydžio sprendinio paklaidą.

- Vizualizuokite skaičiavimo rezultatus, ypač pageidautina juos pateikti naudojant animaciją.

2 tema. Nagrinėkime cheminę reakciją, kurios metu vyksta tokie virsmai

$$\begin{aligned} &A \xrightarrow{0{,}04} B\,,\\ &B+B \xrightarrow{3\cdot 10^7} C+B\,,\\ &B+C \xrightarrow{10^4} A+C\,. \end{aligned}$$

Matome, kad reakcijų greičiai yra labai skirtingi: antroji reakcija vyksta labai greitai, trečioji – greitai, o pirmoji – labai lėtai.

- Taikydami masės tvermės dėsnį ir kinetinių reakcijų teoriją, gaukite tokį matematinį modelį:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = -0,04u_1 + 10^4 u_2 u_3\,,\\ \dfrac{du_2}{dt} = 0,04u_1 - 10^4 u_2 u_3 - 3\cdot 10^7 u_2^2\,,\\ \dfrac{du_3}{dt} = 3\cdot 10^7 u_2^2\,,\\ u_1(0)=1, \quad u_2(0)=0, \quad u_3(0)=0\,, \end{cases}$$

- Išspręskite diferencialinių lygčių sistemą naudodami trečiosios tikslumo eilės išreikštinį Rungės Kuto, Giro ir neišreikštinį Rungės-Kuto metodus. Integravimo žingsnį parinkite adaptyviai naudodami Rungės taisyklę. Modeliavimo paklaidos dydis 0.0001.
- Vizualizuokite skaičiavimo eksperimento rezultatus.

3 tema. Nagrinėkime pradinį paprastųjų diferencialinių lygčių sistemos uždavinį (Van der Polio lygtis):

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_2\,,\\ \dfrac{du_2}{dt} = \mu\left(1-u_1^2\right)u_2 - u_1\,,\\ u_1(0)=2, \quad u_2(0)=0\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

- Pateikite pavyzdžių, kai šis uždavinys yra svarbus modeliuojant įvairius fizikinius procesus.

- Išspręskite diferencialinių lygčių sistemą naudodami trečiosios tikslumo eilės išreikštinį Adamso, neišreikštinį Adamso ir Giro metodus. Integravimo žingsnį parinkite adaptyviai naudodami Rungės taisyklę. Modeliavimo paklaidos dydis 0.001.

- Ištirkite, kaip sprendinio savybės priklauso nuo parametro μ (imkite reikšmes $\mu = 1, 10, 50, 150$). Vizualizuokite skaičiavimo eksperimento rezultatus.

4 tema. Nagrinėkime dviejų populiacijų, kovojančių tarpusavyje dėl maisto, koncentracijas u_1 ir u_2. Jos tenkina tokią lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = (g_1 - m_1 u_1 - k_1 u_2)\, u_1\,, \\ \dfrac{du_2}{dt} = (g_2 - m_2 u_2 - k_2 u_1)\, u_2\,, \\ u_1(0) = 1, \quad u_2(0) = 1\,, \end{cases} \tag{3.2}$$

čia $g_i u_i$ aprašo gimimų skaičių, $m_i u_i^2$ – mirčių skaičių dėl ligų, o $k_i u_1 u_2$ – nuostolius dėl konkurencijos tarp skirtingų populiacijos atstovų.

- Atlikite apžvalgą kitų modelių, aprašančių skirtingų populiacijų bendrą egzistavimą toje pačioje terpėje.

- Išspręskite uždavinį naudodami antrosios ir ketvirtosios eilės Rungės Kuto ir adaptyvųjį Rungės-Kuto ir Fehlbergo metodus. Įvertinkite integravimo žingsnio dydį, garantuojantį 0.0001 dydžio sprendinio paklaidą. Kaip pavyzdį imkite tokias parametrų reikšmes

  $$g_1 = g_2 = 1, \quad m_1 = m_2 = 0,01, \quad k_1 = 0,1, \quad k_2 = 0,01.$$

  Vizualizuokite skaičiavimo eksperimento rezultatus.

- Koks gautojo sprendinio stabilumas pradinių sąlygų mažų pokyčių atžvilgiu?

5 tema. Nagrinėkime cheminę reakciją, kurios metu tarpusavyje reaguoja šešios medžiagos A, B, D, E, X, Y. Lefeveris ir Nikolis (*Lefever, Nicolis*) sudarė supaprastintą modelį, kai medžiagų A ir B koncentracijos laikomos nekintančiomis, o D ir E medžiagos atsiranda tik kaip reakcijos produktai ir nedalyvauja kituose virsmuose. Tada yra svarbios tik tokios cheminės reakcijos:

$$
\begin{aligned}
& A \xrightarrow{k_1} X \,, \\
& 2X + Y \xrightarrow{k_2} 3X \,, \\
& B + X \xrightarrow{k_3} Y + D \,, \\
& X \xrightarrow{k_4} E \,.
\end{aligned}
$$

- Taikydami masės tvermės dėsnį gaukite diferencialinių lygčių sistemą, kuri dar vadinama Briuseliatoriaus modeliu (angl. *Briusselator model*)

$$
\begin{cases}
\dfrac{dX}{dt} = k_1 A - k_2 BX + k_3 X^2 Y - k_4 X \,, \\
\dfrac{dY}{dt} = k_2 BX - k_3 X^2 Y \,, \\
X(0) = X_0, \ \ Y(0) = Y_0 \,.
\end{cases}
$$

- Išspręskite diferencialinių lygčių sistemą naudodami antrosios tikslumo eilės išreikštinį Adamso, neišreikštinį Adamso ir Giro metodus. Integravimo žingsnį parinkite adaptyviai naudodami Rungės taisyklę. Integravimo tikslumas 0.0001.

- Ištirkite sprendinio stabilumą, imdami $B < A^2 + 1$ (stabilus sprendinys) ir $B > A^2 + 1$, kai atsiranda cikliniai svyravimai.

  Modeliuokite sprendinio dinamiką

  $$A = 1, \ B = 3, \ k_i = 1, \ 1 \leqslant i \leqslant 4,$$

  eksperimente pasirinkite 3-4 skirtingus pradinių reikšmių variantus.

- Vizualizuokite skaičiavimo eksperimento rezultatus (pageidautina panaudoti animaciją).

6 tema. Išspręskite intervale $(-1, 1)$ diferencialinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \sin y + \cos(tx), & y(-1) = 2,37\,, \\ \dfrac{dx}{dt} = t^{-1}\sin(ty), & x(-1) = -3,48\,. \end{cases}$$

- Sudarydami skaičiavimo procedūrą atkreipkite dėmesį į sistemos dešiniosios pusės vektoriaus F skaičiavimą taško $t = 0$ aplinkoje.

- Išspręskite uždavinį naudodami išreikštinį Eulerio, trečiosios eilės Rungės-Kuto ir adaptyvųjį Rungės-Kuto ir Fehlbergo metodus. Įvertinkite integravimo žingsnio dydį, garantuojantį 0.0001 dydžio sprendinio paklaidą.

- Vizualizuokite skaičiavimo rezultatus.

7 tema. Išspręskite diferencialinių lygčių sistemą, aprašančią Belousovo ir Žabotinskio reakciją, kurios metu reaguojančių medžiagų koncentracija kinta periodiškai:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = 77,27\big(u_2 + (1 - 8,375\cdot 10^{-6}u_1 - u_2)\ u_2\big)\,, \\ \dfrac{du_2}{dt} = \dfrac{1}{77,27}\big(u_3 - (1+u_1)\ u_2\big)\,, \\ \dfrac{du_3}{dt} = 0,161(u_1 - u_3)\,, \\ u_1(0) = 1,\ \ u_2(0) = 2,\ \ u_3(0) = 3\,. \end{cases}$$

- Palyginkite išreikštinio trižingsnio Adamso, neišreikštinio trižingsnio Adamso ir trižingsnio Giro metodų efektyvumą.

- Integravimo žingsnį parinkite adaptyviai naudodami Rungės taisyklę.

- Vizualizuokite skaičiavimo rezultatus (pageidautina panaudoti animaciją).

8 tema. Tegul u_1 yra vandenyno temperatūra, u_2 yra oro temperatūra. Pateikiame modelį, aprašantį šilumos mainus tarp oro ir vandenyno. Šie mainai yra aprašomi Niutono dėsniu. Taip pat įvertiname išorinių šaltinių poveikį, jie kinta periodiškai su skirtingais periodais: paros ir metų laikų svyravimai. Temperatūrą normavome taip, kad viršutinių atmosferos sluoksnių temperatūra būtų lygi 0, o žemės paviršiaus temperatūra būtų 1.

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = \alpha(t)(u_2 - u_1) + \beta_1(t)(1 - u_1) + S_1 \sin(P_1 t), t > 0, \\ \dfrac{du_2}{dt} = \alpha(t)(u_1 - u_2) - \beta_2(t)u_2 + S_2 \sin(P_2 t), t > 0, \\ u_1(0) = \mu_0, \quad u_2(0) = \mu_2. \end{cases}$$

- Parodykite, kai išvedamos matemationio modelio lygtys.
- Išspręskite uždavinį naudodami trečiosios eilės Rungės Kuto ir adaptyvųjį Rungės-Kuto ir Fehlbergo metodus. Įvertinkite integravimo žingsnio dydį, garantuojantį 0.001 dydžio sprendinio paklaidą. Kaip pavyzdį imkite tokias parametrų reikšmes

  $$\alpha = 0.1, \ \beta_1 = \beta_2 = 0.01, \ S_1 = 0.005, \ P_1 = \frac{\pi}{180}, \ S_2 = 0.3, \ P_2 = \pi.$$
- Vizualizuokite skaičiavimo eksperimento rezultatus.

3.2. Paprastųjų diferencialinių lygčių kraštinis uždavinys

9 tema. Nagrinėkime uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left((1+x)\dfrac{du}{dx}\right) + x \cos x \, u = e^x, \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) = 2, \quad u'(1) = 0\,. \end{cases}$$

- Apžvelkite fizinius procesus, kurie aprašomi tokio tipo matematiniu modeliu. Paaiškinkite kiekvieno lygties ir kraštinės sąlygos nario fizikinę prasmę (konkrečios koeficientų reikšmės nėra svarbios).
- Baigtinių tūriu metodu išspręskite šį kraštinį diferencialinį uždavinį.
- Kraštinę sąlygą aproksimuokite naudodami paprastą baigtinių skirtumų ir baigtinių tūrių aproksimacijas. Palyginkite gautųjų schemų tikslumą.

- Rungės metodu įvertinkite diskrečiojo sprendinio tikslumo eilę. Apskaičiuokite diferencialinio uždavinio sprendinio artinį 0.01 ir 0.0001 tikslumu. Kiek tinklo taškų reikėjo kiekvienu atveju?

10 tema. Nagrinėkime uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left((1+2x)\dfrac{du}{dx}\right) + x^2 \sin x\, u = e^{-x^2}, \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) = 2, \quad u'(1) = 0\,. \end{cases}$$

- Apžvelkite fizinius procesus, kurie aprašomi tokio tipo matematiniu modeliu. Paaiškinkite kiekvieno lygties ir kraštinės sąlygos nario fizikinę prasmę (konkrečios koeficientų reikšmės nėra svarbios).
- Uždavinį išspręskite Galiorkino metodu, kai bandomosios funkcijos $\{\varphi_j\}$ yra dalimis tiesinės interpoliacinės funkcijos. Tiesinės lygčių sistemos koeficientus apskaičiuokite Simpsono metodu.
- Pakartokite šiuos skaičiavimus su dalimis kvadratinėmis bandomosiomis funkcijomis, gautuosius rezultatus palyginkite su tiesinių funkcijų rezultatais.
- Rungės metodu įvertinkite diskrečiojo sprendinio tikslumo eilę. Apskaičiuokite diferencialinio uždavinio sprendinio artinį 0.01 ir 0.0001 tikslumu.

11 tema. Nagrinėkime uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\Big(rk(r)\dfrac{du}{dr}\Big) + q(r)u = f(r), \quad 0 < r < R\,, \\ \lim\limits_{r\to 0} rk(r)\dfrac{du}{dr} = 0\,, \\ u(R) = \mu_1\,. \end{cases}$$

- Apžvelkite fizinius procesus, kurie aprašomi tokio tipo matematiniu modeliu. Paaiškinkite kiekvieno lygties ir kraštinės sąlygos nario fizikinę prasmę (konkrečios koeficientų reikšmės nėra svarbios).
- Kokioje koordinačių sistemoje nagrinėjame uždavinį? Išveskite difuzijos operatoriaus formulę šioje koordinačių sistemoje.

- Baigtinių tūriu metodu išspręskite šį kraštinį diferencialinį uždavinį, kai $R = 1$,

$$k(r) = e^r, \quad q(r) = \frac{1}{1+r^2}, \quad f(r) = e^{-r}.$$

- Rungės metodu įvertinkite diskrečiojo sprendinio tikslumo eilę. Apskaičiuokite diferencialinio uždavinio sprendinio artinį 0.01 ir 0.0001 tikslumu. Kiek tinklo taškų reikėjo kiekvienu atveju?

12 tema. Nagrinėkime uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\Big(r^2 k(r)\dfrac{du}{dr}\Big) + q(r)u = f(r), \quad 0 < r < R\,, \\ \lim\limits_{r\to 0} r^2 k(r)\dfrac{du}{dr} = 0\,, \\ u(R) = \mu_1\,. \end{cases}$$

- Apžvelkite fizinius procesus, kurie aprašomi tokio tipo matematiniu modeliu. Paaiškinkite kiekvieno lygties ir kraštinės sąlygos nario fizikinę prasmę (konkrečios koeficientų reikšmės nėra svarbios).

- Kokioje koordinačių sistemoje nagrinėjame uždavinį? Išveskite difuzijos operatoriaus formulę šioje koordinačių sistemoje.

- Baigtinių tūriu metodu išspręskite šį kraštinį diferencialinį uždavinį, kai $R = 1$,

$$k(r) = e^{r^2}, \quad q(r) = \frac{1}{1+r^2}, \quad f(r) = \sin r.$$

- Rungės metodu įvertinkite diskrečiojo sprendinio tikslumo eilę. Apskaičiuokite diferencialinio uždavinio sprendinio artinį 0.01 ir 0.0001 tikslumu. Kiek tinklo taškų reikėjo kiekvienu atveju?