3 skyrius

Matematinės fizikos uždavinių skaitiniai sprendimo metodai

3.1. Baigtinių skirtumų metodas

Srityje $Q_T = \{(x,t):\ 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T\}$ spręsime tiesinį vienmatį pernešimo uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T\,, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1\,. \end{cases} \tag{3.1}$$

Tarkime, kad lygties koeficientas $v(x,t) \geqslant 0$, kai $(x,t) \in Q_T$. Tada kraštinę sąlygą formuluojame kairiajame intervalo gale, t. y. taške $x = 0$:

$$u(0,t) = \mu_0(t), \quad t > 0\,.$$

Dažnai (3.1) uždavinys yra sprendžiamas visoje tiesėje $\mathcal{R}$, tada kraštinės sąlygos iš viso nereikia. Matematiniuose modeliuose naudojamos ir periodiškumo kraštinės sąlygos:

$$u(0,t) = u(1,t)\,.$$

Jeigu lygties koeficientai $v(x,t), f(x,t)$ ir pradinė sąlyga $u_0(x)$ irgi yra periodinės funkcijos, tai vėl gauname pradinį uždavinį visoje tiesėje $\mathcal{R}$. Todėl galime tikėtis, kad (3.1) uždavinio skaitinis sprendimas yra paprastesnis, kai turime periodiškumo kraštinę sąlygą.

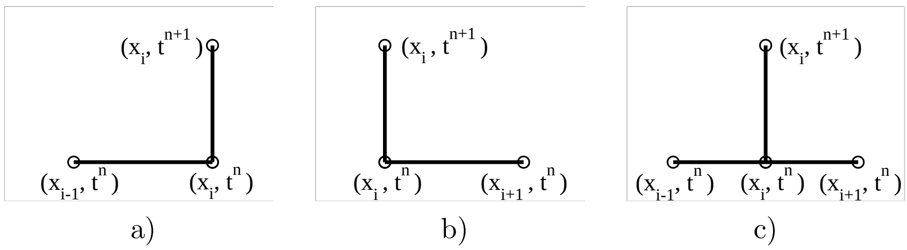
Srityje Q_T apibrėžkime diskretųjį tinklą $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$:

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, \ \ i = 1, 2, \dots, N, \ x_N = 1 \right\},$$
$$\omega_\tau = \left\{ t^n = n\tau, \ \ n = 1, 2, \dots, K, \ t^K = T \right\}.$$

Baigtinių skirtumų metodu aproksimuosime pernešimo lygtį. Pateiksime paprasčiausias baigtinių skirtumų schemas.

3.1.1. Išreikštinės baigtinių skirtumų schemos

Imkime diskrečiojo tinklo taškų šablonus, pavaizduotus 3.1 pav., ir aproksimuokime pernešimo lygtį tokiomis baigtinių skirtumų schemomis:



3.1 pav. Išreikštinių baigtinių skirtumų schemų šablonai: a) (3.2) schemos, b) (3.3) schemos, c) (3.4) schemos

a) išreikštine kairiųjų vienpusių skirtumų schema:

$$y_t + v_i^n y_{\bar{x}} = f(x_i, t^n), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \tag{3.2}$$

b) išreikštine dešiniųjų vienpusių skirtumų schema:

$$y_t + v_i^n y_x = f(x_i, t^n), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \tag{3.3}$$

c) išreikštine centrinių skirtumų schema:

$$y_t + v_i^n y_{\overset{\circ}{x}} = f(x_i, t^n), \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}. \tag{3.4}$$

Lygčių sistemą papildome pradine sąlyga:

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad x_i \in \bar{\omega}_h$$

ir viena iš kraštinių sąlygų. Pirmojo tipo kraštinę sąlygą pakeičiame lygybe:

$$y_0^n = \mu_0(t^n), \quad t^n \in \bar{\omega}_\tau. \tag{3.5}$$

Periodiškumo kraštinę sąlygą pakeičiame lygybėmis

$$y_N^n = y_0^n, \quad y_{N+1}^n = y_1^n, \quad t^n \in \bar{\omega}_\tau \,.$$

Aptarsime išreikštinių baigtinių skirtumų schemų realizavimą. Išskirsime tris uždavinio atvejus: pradinį uždavinį, uždavinį su periodiškumo kraštine sąlyga ir uždavinį su kraštine sąlyga.

Pradinio uždavinio sprendimas

Analizę pradėkime nuo pradinio uždavinio sprendinio radimo, kai pradinė sąlyga yra apibrėžta visoje tiesėje $\mathcal{R}$. Tarkime, kad norime apskaičiuoti šį sprendinį diskrečiojo tinklo $\bar{\omega}_{h\tau}$ taškuose. Atsižvelgę į 3.1 pav. pavaizduotus išreikštinių baigtinių skirtumų schemų šablonus, gauname, kad skaičiuojamoji sritis $D_{h\tau}$ yra platesnė už $\bar{\omega}_{h\tau}$. Nesunku įsitikinti, kad išreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos apibrėžimo sritis $D_{h\tau}$ yra:

$$D_{h\tau} = \big\{(x_i, t^n), \;\; n = 1, 2, \ldots, K, \;\; i = -K + n, \ldots, N\big\}\,,$$

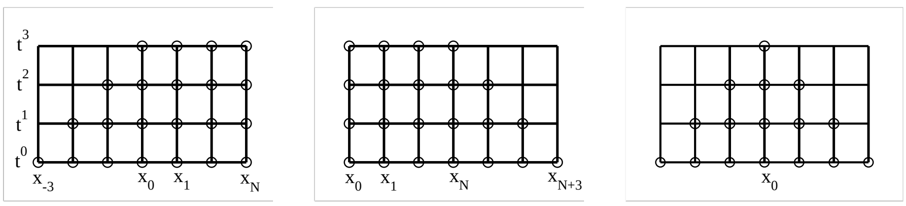
išreikštinės dešiniųjų vienpusių skirtumų schemos apibrėžimo sritis yra:

$$D_{h\tau} = \big\{(x_i, t^n), \;\; n = 1, 2, \ldots, K, \;\; i = 0, 1, \ldots, N + K - n\big\}\,,$$

išreikštinės centrinių skirtumų schemos apibrėžimo sritis yra:

$$D_{h\tau} = \big\{(x_i, t^n), \;\; n = 1, 2, \ldots, K, \;\; i = -K + n, \ldots, N + K - n\big\}\,.$$

Šios sritys yra pavaizduotos 3.2 pav.



a) b) c)

3.2 pav. Išreikštinių baigtinių skirtumų schemų pradinio uždavinio apibrėžimo sritys: a) (3.2) schemos, b) (3.3) schemos, c) (3.4) schemos

Periodinio uždavinio sprendimas

Dabar panagrinėkime uždavinį su periodine kraštine sąlyga.

Realizuodami *išreikštinę kairiųjų vienpusių skirtumų* schemą eiliniame laiko sluoksnyje t^{n+1} pagal (3.2) formulę apskaičiuojame sprendinį diskrečiojo tinklo ω_h taškuose ir iš periodiškumo kraštinės sąlygos randame sprendinio reikšmę taške x_0:

$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1}\,.$$

Todėl šio uždavinio skaičiuojamoji sritis yra $\omega_{h\tau}$.

Išreikštinė dešiniųjų vienpusių skirtumų schema realizuojama panašiu būdu: pagal (3.3) formulę apskaičiuojame sprendinį taškuose

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$$

ir panaudojame periodiškumo sąlygą:

$$y_N^{n+1} = y_0^{n+1}\,.$$

Išreikštinės centrinių skirtumų schemos sprendinį apskaičiuojame pagal (3.4) formulę diskrečiojo tinklo ω_h taškuose ir panaudojame periodiškumo sąlygas:

$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1}, \quad y_{N+1}^{n+1} = y_1^{n+1}\,.$$

Kraštinio uždavinio sprendimas

Išreikštinė kairiųjų vienpusių skirtumų schema realizuojama taip pat, kaip ir periodiškumo sąlygos atveju, tik sprendinio reikšmę taške x_0 apskaičiuojame iš kraštinės sąlygos:

$$y_0^{n+1} = \mu_0(t^{n+1})\,.$$

Baigtinių skirtumų schemų (3.3) ir (3.4) sprendinius galime apskaičiuoti tik srityje:

$$D_{h\tau} = \{(x_i, t_j), \;\; j = 1, 2, \ldots, \min(N, K), \;\; i = 0, 1, \ldots, N - j\}\,.$$

Norėdami šiomis schemomis apskaičiuoti sprendinį visuose diskrečiojo tinklo $\omega_{h\tau}$ taškuose turime:

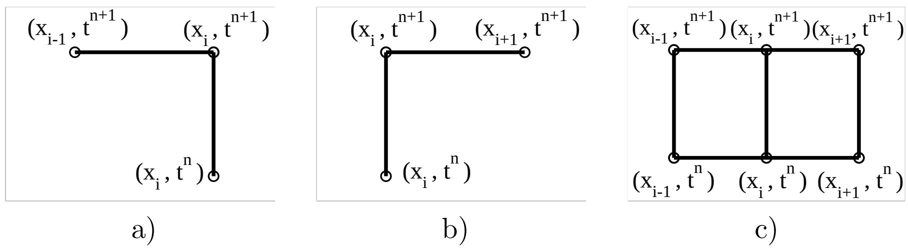
a) apibrėžti kraštinę sąlygą dešiniajame intervalo gale:

$$u(1, t) = \mu_1(t), \quad t > 0\,,$$

b) arba taške x_N naudoti kitą baigtinių skirtumų schemą, pvz., išreikštinę kairiųjų vienpusių skirtumų schemą.

3.1.2. Neišreikštinės baigtinių skirtumų schemos

Imkime diskrečiųjų taškų šablonus, pavaizduotus 3.3 pav., ir aproksimuokime tiesinę pernešimo lygtį (3.1) baigtinių skirtumų schemomis:



3.3 pav. Neišreikštinių baigtinių skirtumų schemų šablonai: a) (3.6) schemos, b) (3.7) schemos, c) (3.8) schemos

a) neišreikštine kairiųjų vienpusių skirtumų schema:

$$y_t + v_i^{n+1} y_{\bar{x}}^{n+1} = f(x_i, t^{n+1}), \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{3.6}$$

b) neišreikštine dešiniųjų vienpusių skirtumų schema:

$$y_t + v_i^{n+1} y_x^{n+1} = f(x_i, t^{n+1}), \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \tag{3.7}$$

c) Kranko ir Nikolsono schema:

$$y_t + v_i^{n+0,5} \Big(\frac{y^{n+1} + y^n}{2}\Big)_{\overset{\circ}{x}} = f(x_i, t^{n+0,5}), \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,. \tag{3.8}$$

Lygčių sistemą papildome pradine sąlyga ir viena iš kraštinių sąlygų.

Aptarsime neišreikštinių skirtumų schemų realizaciją. Pastebėsime, kad dabar jau būtinai turime formuluoti kraštinę sąlygą, be to, kai kurioms schemoms neužtenka vienos kraštinės sąlygos.

Panagrinėkime (3.5) kraštinę sąlygą. Tada *neišreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų* schemos sprendinį apskaičiuojame išreikštine formule:

$$y_i^{n+1} = \frac{y_i^n + \frac{\tau}{h} v_i^{n+1} y_{i-1}^{n+1} + \tau f_i^{n+1}}{1 + \frac{\tau}{h} v_i^{n+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N\,,$$

$$y_0^{n+1} = \mu_0\big(t^{n+1}\big)\,.$$

Neišreikštinės dešiniųjų vienpusių skirtumų schemos sprendinį apskaičiuojame išreikštine formule:

$$y_i^{n+1} = y_{i-1}^{n+1} + \frac{h}{v_{i-1}^{n+1}}\, y_{t,i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,,$$
$$y_0^{n+1} = \mu_0\big(t^{n+1}\big)\,.$$

Panagrinėkime Kranko ir Nikolsono schemą, kai duotos dvi kraštinės sąlygos:

$$y_0^n = \mu_0(t^n), \quad y_N^n = \mu_1(t^n)\,.$$

Tada kiekviename laiko sluoksnyje sprendžiame tiesinių lygčių sistemą su trijstrižaine matrica:

$$\begin{cases} y_0^{n+1} = \mu_0(t^{n+1})\,, \\ -\dfrac{v_i^{n+0,5}}{4h} y_{i-1}^{n+1} + \dfrac{1}{\tau} y_i^{n+1} + \dfrac{v_i^{n+0,5}}{4h} y_{i+1}^{n+1} = F_i^n\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, \ldots, N-1\,, \\ y_N^{n+1} = \mu_N(t^{n+1})\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

čia pažymėjome:

$$F_i^n = \frac{1}{\tau} y_i^n - \frac{1}{2} v_i^{n+0,5} y_{\mathring{x}}^n + f(x_i, t^{n+0,5})\,.$$

Tokių tiesinių lygčių sistemų sprendinį taupiai apskaičiuojame perkelties metodu.

Periodiškumo kraštinės sąlygos

Panagrinėsime tik Kranko ir Nikolsono schemos realizavimą. Tada sprendžiame (3.9) tiesinių lygčių sistemą, kurioje pirmojo tipo kraštinės sąlygos yra pakeistos periodiškumo sąlygomis:

$$y_0^{n+1} = y_N^{n+1}, \quad y_1^{n+1} = y_{N+1}^{n+1}\,.$$

Kadangi tokio tipo tiesinės lygčių sistemos svarbios ir sprendžiant daugelį kitų uždavinių, tai panagrinėkime bendrą tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} c_1 y_1 - b_1 y_2 - a_1 y_N = f_1\,, \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i, \ \ i = 2, 3, \ldots, N-1\,, \\ -b_N y_1 - a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N\,. \end{cases}$$

Perkelties metodo algoritmas

1. Pertvarkome tiesinių lygčių sistemos pirmąją lygtį:

$$y_1 = \alpha_1 y_2 + \beta_1 y_N + \gamma_1 ,$$
$$\alpha_1 = \frac{b_1}{c_1}, \quad \beta_1 = \frac{a_1}{c_1}, \quad \gamma_1 = \frac{f_1}{c_1} .$$

2. Apskaičiuojame perkelties formulės

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i y_N + \gamma_i, \quad i = 2, 3, \ldots, N-1$$

koeficientus:

$$\alpha_i = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{a_i \beta_{i-1}}{c_i - a_i \alpha_{i-1}}, \quad \gamma_i = \frac{f_i + a_i \gamma_{i-1}}{c_i - a_i \alpha_{i-1}} .$$

3. Modifikuojame perkelties formulės koeficientus:

$$y_i = \tilde{\beta}_i y_N + \tilde{\gamma}_i, \quad i = N-1, \ldots, 1, \tag{3.10}$$
$$\tilde{\beta}_{N-1} = \alpha_{N-1} + \beta_{N-1}, \quad \tilde{\gamma}_{N-1} = \gamma_{N-1} ,$$
$$\tilde{\beta}_i = \alpha_i \tilde{\beta}_{i+1} + \beta_i, \quad \tilde{\gamma}_i = \alpha_i \tilde{\gamma}_{i+1} + \gamma_i .$$

4. Iš tiesinių lygčių sistemos paskutinės lygties apskaičiuojame y_N reikšmę:

$$y_N = \frac{f_N + a_N \tilde{\gamma}_{N-1} + b_N \tilde{\gamma}_1}{c_N - a_N \tilde{\beta}_{N-1} - b_N \tilde{\beta}_1} .$$

5. Pagal (3.10) formulę apskaičiuojame sprendinio y_i reikšmes.

3.1.3. Baigtinių skirtumų schemų aproksimavimo paklaida

Aproksimavimo paklaidą apskaičiuojame naudodami Teiloro skleidinius. Visi skaičiavimai yra panašūs į tuos, kuriuos atlikome nagrinėdami parabolinio tipo uždavinių sprendimo metodus. Todėl tik pateiksime visų sukonstruotų schemų aproksimavimo paklaidos įverčius (skaitytojams rekomenduojame skaičiavimus atlikti savarankiškai).

1. $O(\tau + h)$ *aproksimacijos tikslumo metodai*: išreikštinė kairiųjų vienpusių skirtumų schema, išreikštinė dešiniųjų vienpusių skirtumų schema, neišreikštinė kairiųjų vienpusių skirtumų schema ir neišreikštinė dešiniųjų vienpusių skirtumų schema.

2. $O(\tau + h^2)$ *aproksimacijos tikslumo metodas*: išreikštinė centrinių skirtumų schema.

3. $O(\tau^2 + h^2)$ *aproksimacijos tikslumo metodas*: Kranko ir Nikolsono schema.

3.1.4. Populiariausios baigtinių skirtumų schemos

Tiesinei pernešimo lygčiai (3.1) spręsti sudaryta labai daug specialių baigtinių skirtumų schemų. Šiame poskyryje papildomai pateiksime kai kurių metodų algoritmus. Matematiniuose modeliuose dažnai sutinkamas atvejis, kai pernešimo lygtyje greičio funkcija yra pastovioji: $v(x,t) = c > 0$, todėl suformuluosime algoritmus ir lygčiai:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in Q_T\,. \tag{3.11}$$

Pastebėsime, kad visų šio poskyrio metodų aproksimavimo paklaida yra $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ eilės dydis.

Simetrinė baigtinių skirtumų schema

Diferencialinę lygtį aproksimuojame neišreikštine schema:

$$y_t + y_{t,i-1} + v_{i-0,5}^{n+0,5}\left(y_{\bar{x}}^{n+1} + y_{\bar{x}}\right) = 2\, f_{i-0,5}^{n+0,5}\,. \tag{3.12}$$

Kai turime papildomą kraštinę sąlygą

$$y_0^n = \mu_0(t^n)\,,$$

tai uždavinio sprendinį apskaičiuojame pagal išreikštinę formulę.

Šuoliavimo schema

Ši schema yra trisluoksnė ir sudaroma naudojant simetrinį šabloną:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} + v_i^n\,\frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2h} = 0\,. \tag{3.13}$$

Šuoliavimo schema (angl. *leapfrog*) yra išreikštinė. Pirmajame sluoksnyje sprendinį apskaičiuojame kokiu nors kitu metodu. Jeigu sprendžiame pernešimo lygtį baigtiniame intervale, tai reikia imti dvi kraštines sąlygas intervalo galuose arba naudoti periodiškumo kraštines sąlygas.

Lakso ir Vendrofo (Lax – Wendroff) schema

Šios schemos išvedimą pateiksime (3.11) lygčiai. Sprendinį išskleisime Teiloro eilute:

$$u^{n+1} = u^n + \tau \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\tau^3)\,.$$

Iš diferencialinės lygties išreiškiame išvestines pagal t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = -c\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = -c\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Išvestines pagal x aproksimuojame centrinių skirtumų formulėmis, tada gauname baigtinių skirtumų schemą:

$$y_t + c y_{\overset{\circ}{x}} - \frac{c^2\tau}{2} y_{\bar{x}x} = 0\,. \tag{3.14}$$

Diferencialinės lygties (3.1) atveju baigtinių skirtumų schema yra sudėtingesnė:

$$y_t + \Big(v_i + \frac{\tau}{2}\big(v v_{\overset{\circ}{x}} - v_t\big)\Big) y_{\overset{\circ}{x}} - \frac{v_i^2\tau}{2} y_{\bar{x}x} = f_i + \frac{\tau}{2}\big(f_t - v_i f_{\overset{\circ}{x}}\big)\,.$$

Dvipakopis Lakso ir Vendrofo metodas

Netiesinėms pernešimo lygtims ir lygčių sistemoms spręsti patogesnė yra baigtinių skirtumų schema, kurios pirmajame žingsnyje apskaičiuojame pagalbinį sprendinį:

$$\tilde{y}_{i+0,5} = \frac{y_{i+1} + y_i}{2} - \frac{\tau}{2}\big((vy)_x - f_i\big)\,,$$

o antrajame žingsnyje randame sprendinio reikšmes:

$$y_i^{n+1} = y_i - \frac{\tau}{h}\big(v_{i+0,5}\,\tilde{y}_{i+0,5} - v_{i-0,5}\,\tilde{y}_{i+0,5}\big) + \tau f_i^{n+0,5}\,.$$