2.4. Galiorkino metodo konvergavimo analizė

Spręskime kraštinį diferencialinį uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(k(x)\dfrac{du}{dx}\Big) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l\,, \\ -k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0, \quad u(l) = \mu_1\,, \end{cases}$$

kurio silpnasis sprendinys tenkina uždavinį:

$$\begin{cases} \big(Lu, v\big) = 0\,, \\ u(l) = \mu_1\,, \end{cases} \tag{2.41}$$

čia pažymėjome

$$\big(Lu, v\big) = \int\limits_0^l k(x)u'v'\,dx + \int\limits_0^l q(x)uv\,dx + \big(\beta u(0) - \mu_0\big)\,v(0) - \int\limits_0^l f(x)v\,dx\,,$$

o funkcija $v \in W_2^1$

$$W_2^1 = \Big\{v : \int\limits_0^l \big((v')^2 + v^2\big)\;dx \leqslant C,\;\; v(l) = 0\Big\}\,.$$

Tarsime, kad kraštinio uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygą:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0\,.$$

Imkime dalimis tiesinių bandomųjų funkcijų sistemą $\{\varphi_j\}$. Tada Galiorkino metodo sprendinys yra:

$$y = \sum_{i=0}^{N} y_i\,\varphi_i(x)\,.$$

Iš (2.41) kraštinės sąlygos apskaičiuojame:

$$y_N = \mu_1\,.$$

Kitus koeficientus y_i randame spręsdami Galiorkino metodo tiesinių lygčių sistemą:

$$\big(Ly, \varphi_j\big) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1\,. \tag{2.42}$$

2.4.1. Stabilumo analizė

Ankstesniame poskyryje jau įrodėme vieną stabilumo nelygybę, kuri rodo, kad Galiorkino diskrečiojo uždavinio stabilumas yra ne blogesnis už diferencialinio uždavinio stabilumą. Tačiau tokios nelygybės neužtenka, kai tiriame diskrečiojo sprendinio konvergavimą. Todėl šiame poskyryje pirmiausia išvesime dar vieną Galiorkino metodo stabilumo įvertį. Gavę šį įvertį, išsiaiškinsime, kaip reikia tirti schemos aproksimacijos tikslumą.

S_h pažymėsime dalimis tiesinių funkcijų erdvę, kurią sudaro tiesinės bandomųjų funkcijų kombinacijos:

$$S_h = \big\{v(x): \ \ v(x) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i\, \varphi_i(x)\big\}\,,$$

čia d_i yra bet kokie realieji skaičiai. Iš (2.42) lygčių sistemos gauname lygybę:

$$\big(Ly, v\big) = 0, \quad v \in S_h\,, \tag{2.43}$$

tai yra visos erdvės S_h funkcijos yra ir testuojamos Galiorkino artinio funkcijos. Iš (2.41) lygties matome, kad ir diferencialinio kraštinio uždavinio silpnasis sprendinys tenkina lygtį:

$$\big(Lu, v\big) = 0, \quad v \in S_h\,.$$

Iš (2.43) lygybės atėmę paskutiniąją lygybę, gausime lygtį:

$$\big(L_1(y-u), v\big) = 0, \quad v \in S_h\,,$$

čia operatorius L_1 yra apibrėžtas taip:

$$\big(L_1 u, v\big) = \int\limits_0^l \Big(k(x)\, u'v' + q(x)\, uv\Big)\, dx + \beta\, u(0)v(0)\,.$$

Panagrinėkime Galiorkino metodo sprendinio globaliosios paklaidos $z = y - u$ energijos normą:

$$\big(L_1(y-u),\, y-u\big) = \big(L_1(y-u),\, v-u\big) + \big(L_1(y-u),\, y-v\big)\,.$$

Kadangi $y - v \in S_h$, tai iš (2.43) išeina, kad $\big(L_1(y-u),\, y-v\big) = 0$. Naudodami Koši ir Buniakovskio nelygybę įvertiname paklaidos normą:

$$\begin{aligned}\big(L_1(y-u),\, y-u\big) &= \big(L_1(y-u),\, v-u\big) \\ &\leqslant \big(L_1(y-u),\, y-u\big)^{\frac{1}{2}} \big(L_1(v-u),\, v-u\big)^{\frac{1}{2}}\,.\end{aligned}$$

Abi nelygybės puses padaliję iš $\big(L_1 z, z\big)^{1/2}$, įrodome stabilumo įvertį:

$$\big(L_1(y-u),\, y-u\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \big(L_1(v-u),\, v-u\big)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in S_h\,. \tag{2.44}$$

Matome, kad šioje normoje Galiorkino metodo sprendinio paklaida yra nedidesnė už paklaidą, kurią gauname aproksimuodami diferencialinio uždavinio sprendinį $u(x)$ erdvės S_h funkcijomis. Todėl Galiorkino metodo tikslumas priklauso nuo S_h aproksimacinių savybių.

Pertvarkysime (2.44) stabilumo įvertį taip, kad diskrečiojo sprendinio globaliosios paklaidos norma nepriklausytų nuo diferencialinės lygties koeficientų. Tarkime, kad $k(x)$ ir $q(x)$ yra iš viršaus aprėžtos funkcijos. Tada, pridėję ir eliptiškumo sąlygą, turime:

$$0 < k_0 \leqslant k(x) \leqslant k_1, \;\; 0 \leqslant q(x) \leqslant q_1, \;\; \beta \geqslant 0\,.$$

Iš (2.44) nelygybės ir Sobolevo įdėjimo teoremos gauname nelygybę:

$$\big(z', z'\big) \leqslant \frac{k_1 + l\,\beta + q_1}{k_0} \min_{v \in S_h} \Big(\big((v-u)',\, (v-u)'\big) + \big(v-u,\, v-u\big) \Big)\,.$$

Iš abiejų šios nelygybės pusių ištraukę kvadratinę šaknį, įrodome norimą stabilumo įvertį:

$$\|(y-u)'\| \leqslant C \min_{v \in S_h} \big(\|(v-u)'\| + \|v-u\|\big)\,. \tag{2.45}$$

2.4.2. Funkcijų erdvės S_h aproksimacinės savybės

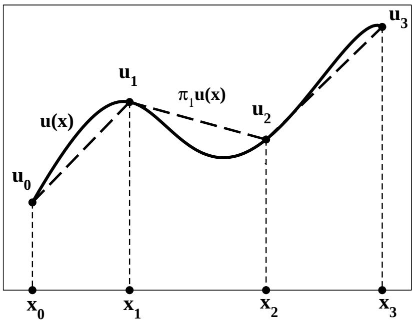
Panagrinėkime funkcijų, apibrėžtų intervale $[0, l]$, erdvę $W_2^2(0, l)$:

$$W_2^2(0,l) = \Big\{ u : \;\; \int\limits_0^l \Big(\big(u''\big)^2 + \big(u'\big)^2 + u^2 \Big)\, dx \leqslant C \Big\}\,.$$

Jau esame apibrėžę bet kokios tolydžiosios funkcijos $u(x)$ dalimis tiesinį interpoliuojantįjį daugianarį:

$$\pi_1 u(x) = \sum_{i=0}^{N} u(x_i)\, \varphi_i(x)\,.$$

Funkcijos $\pi_1 u(x)$ grafikas pateiktas 2.5 pav.



2.5 pav. Funkcijos $u(x)$ ir jos interpolianto $\pi_1 u(x)$ grafikai

2.6 lema. *Jei $u(x) \in W_2^2(0,l)$, tai paklaida, kurią padarome aproksimuodami šią funkciją erdvės S_h funkcijomis, įvertinama nelygybėmis:*

$$\min_{v \in S_h} \|v - u\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{h_{i-0,5}^4}{\pi^4} \|u''\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{h^2}{\pi^2} \|u''\| \,, \tag{2.46}$$

$$\min_{v \in S_h} \|v' - u'\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{h_{i-0,5}^2}{\pi^2} \|u''\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{h}{\pi} \|u''\| \,, \tag{2.47}$$

čia pažymėjome $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} h_{i-0,5}$.

Įrodymas. Kadangi funkcijos $u(x)$ dalimis tiesinis interpoliuojantis daugianaris $\pi_1 u$ priklauso erdvei S_h, tai šios erdvės aproksimacinės savybės yra ne blogesnės už funkcijos $\pi_1 u$ aproksimacines savybes. Įrodysime L_2 įvertį, gauname tokias nelygybes:

$$\begin{aligned} \|u - \pi_1 u\| &= \Big(\sum_{i=1}^{N} \|u - \pi_1 u\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{h_{i-0,5}^4}{\pi^4} \|u''\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{h^2}{\pi^2} \|u''\| \,. \end{aligned}$$

Išvestinių aproksimavimo tikslumo įvertis įrodomas visiškai panašiai. Pradžioje panagrinėkime tik vieną intervalą (a,b). Pažymėkime interpoliuojančiojo daugianario paklaidą:

$$z(x) = u(x) - \pi_1 u(x) \,.$$

Ieškosime tokios minimalios konstantos C, kuriai esant dar tenkinama įdėjimo teorema:

$$\|z'\|_{L_2(a,b)} \leqslant C\,\|z''\|_{L_2(a,b)}\,.$$

Pastebėsime, kad intervalo galuose paklaida yra lygi nuliui (interpoliavimo sąlygos):

$$z(a) = 0, \quad z(b) = 0\,.$$

Tada įdėjimo teoremos nelygybė yra ekvivalenti variaciniam uždaviniui:

$$\frac{1}{C^2} = \min_{v\neq 0} \frac{\|z''\|^2_{L_2(a,b)}}{\|z'\|^2_{L_2(a,b)}} \; = \; \min_{v\neq 0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 c_n^2}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2} \; = \; \lambda_1\,,$$

todėl gauname tokį įvertį:

$$\|z'\|_{L_2(a,b)} \leqslant \frac{b-a}{\pi}\,\|z''\|_{L_2(a,b)}\,.$$

Lemos įrodymas užbaigiamas taip pat, kaip ir L_2 normos atveju. □

2.4.3. Konvergavimo analizė

Šiame poskyryje įrodysime Galiorkino metodo artinio konvergavimą ir įvertinsime šio artinio tikslumą.

2.2 teorema. *Jei bandomųjų funkcijų aibę sudaro dalimis tiesinės interpoliacinės funkcijos* $\{\varphi_i(x)\}$*, tai Galiorkino metodo sprendinio* $y(x)$ *paklaida yra įvertinama nelygybe:*

$$\|y-u\| + h\,\|\,(y-u)'\,\| \leqslant Ch^2\,\|u''\|\,. \tag{2.48}$$

Įrodymas. Iš pagrindinio stabilumo įverčio (12.11) ir 2.6 lemos gauname sprendinio išvestinės globaliosios paklaidos įvertį:

$$\|\,(y-u)'\,\| \leqslant Ch\,\|u''\|\,.$$

Įvertinsime Galiorkino artinio $y(x)$ globaliosios paklaidos L_2 normą. Apsiribosime paprastesniu kraštiniu diferencialiniu uždaviniu:

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & 0 < x < l\,, \\ \;\;u(0) = \mu_0, & u(l) = \mu_1\,. \end{cases}$$

Bendrojo diferencialinio uždavinio atvejis nagrinėjamas analogiškai.

Spręsime pagalbinį kraštinį diferencialinį uždavinį:

$$\begin{cases} -w'' = u(x) - y(x)\,, \\ \ \ w(0) = 0, \quad w(l) = 0\,. \end{cases} \tag{2.49}$$

Iš šios diferencialinės lygties išeina, kad

$$\|w''\| = \|u - y\|\,. \tag{2.50}$$

(2.49) lygtį skaliariškai padauginkime iš $u(x) - y(x)$ ir suintegruokime dalimis:

$$\begin{aligned} \|y-u\|^2 &= \big(w', (u-y)'\big) \\ &= \big((w-v)', (u-y)'\big) + \big(v', (u-y)'\big), \quad v \in S_h\,. \end{aligned}$$

Esame įrodę, kad Galiorkino metodo artinys tenkina lygybę:

$$\big((u-y)', v'\big) = 0, \quad v \in S_h\,,$$

todėl, pasinaudoję Koši ir Buniakovskio nelygybe, globaliąją jo paklaidą $y-u$ įvertiname tokia nelygybe:

$$\|u-y\|^2 \leqslant \big\|(w-v)'\big\|\,\big\|(u-y)'\big\|\,.$$

Pasinaudoję jau įrodytu sprendinio išvestinės paklaidos įverčiu, gausime nelygybę:

$$\|u-y\|^2 \leqslant Ch\big\|(w-v)'\big\|\,\big\|u''\big\|\,. \tag{2.51}$$

Iš 2.6 lemos ir (2.50) lygybės išeina, jog galima parinkti tokią funkciją $v \in S_h$, kuriai esant yra teisingas įvertis:

$$\big\|(w-v)'\big\| \leqslant h\,\big\|w''\big\| = h\,\|y-u\|\,.$$

Įrašę šį įvertį į (2.51) nelygybę ir padaliję abi nelygybės puses iš $\|y-u\|$, gauname Galiorkino metodo artinio $y(x)$ globaliosios paklaidos įvertį L_2 normoje:

$$\|y-u\| \leqslant Ch^2\,\big\|u''\big\|\,.$$

Teorema įrodyta. □

Palyginsime Galiorkino metodo sprendinio konvergavimo įverčius su analogiškais baigtinių skirtumų schemų konvergavimo įverčiais.

- Galiorkino metodo sprendinio paklaidą įvertinome $L_2(a, b)$ normoje, o baigtinių skirtumų metodo sprendinį – tik diskrečiojo tinklo ω_h taškuose.
- 2.2 teoremos paklaidų įverčiai galioja, jei diferencialinio kraštinio uždavinio sprendinio antrosios išvestinės L_2 norma yra aprėžta. Įvertindami baigtinių skirtumų metodo aproksimavimo paklaidą, reikalavome, kad diferencialinio uždavinio sprendinio ketvirtoji išvestinė būtų aprėžta (tirdami konvergavimą energetiniu metodu, parodėme, kad užtenka trečiosios išvestinės aprėžtumo).

Konvergavimas $L_\infty(0, l)$ normoje. Iš (2.48) tikslumo įverčio, pritaikę Sobolevo įdėties teoremą, gauname Galiorkino metodo artinio paklaidos įvertį $L_\infty(0, l)$ normoje:

$$\|y - u\|_\infty \leqslant Ch\,,$$

čia pažymėjome normą:

$$\|v\|_\infty = \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |v(x)|\,.$$

Galima nesunkiai patikrinti, kad tai tik grubus konvergavimo greičio įvertis.

2.4.4. Aposteriorinis paklaidos įvertis

Spręskime kraštinį diferencialinį uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(k(x)\dfrac{du}{dx}\Big) = f(x), \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1\,, \end{cases}$$

kurio silpnasis sprendinys tenkina uždavinį:

$$\begin{cases} \big(L_1 u, v\big) = \big(f, v\big), \quad v \in \overset{0}{W}{}_2^1\,, \\ u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.52}$$

Imkime dalimis tiesinių bandomųjų funkcijų sistemą $\{\varphi_j\}$. Tada Galiorkino metodo sprendinys yra:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i\, \varphi_i(x)\,.$$

Iš (2.52) kraštinių sąlygų apskaičiuojame:

$$y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1 \,.$$

Kitus koeficientus y_i randame spręsdami Galiorkino metodo tiesinių lygčių sistemą:

$$\big(L_1 y - f, \varphi_j\big) = 0, \quad j = 1, \dots, N-1 \,.$$

Šiame poskyryje sudarysime aposteriorinius globaliosios paklaidos įverčius, tinkamus ir adaptyviesiams tinklams sudaryti.

Energijos norma. Apskaičiuokime Galiorkino metodo sprendinio globaliosios paklaidos $e(x) = u(x) - y(x)$ energijos normą:

$$\| \, e' \, \|_k^2 = \big(ke', e'\big) \,.$$

Naudodami silpnąjį uždavinio formulavimą, gauname lygybes:

$$\begin{aligned} \|e'\|_k^2 &= \int\limits_0^1 k(x) u'(x) e'(x) \, dx - \int\limits_0^1 k(x) y'(x) e'(x) \, dx \\ &= \int\limits_0^1 f(x) e(x) \, dx - \int\limits_0^1 k(x) y'(x) e'(x) \, dx \,. \end{aligned}$$

Pasinaudoję Galiorkino sprendinio netikties ortogonalumu visoms dalimis tiesinėms funkcijoms ir imdami globaliosios paklaidos tiesinį interpoliuojantįjį daugianarį, gauname:

$$\begin{aligned} \|e'\|_k^2 &= \int\limits_0^1 f(x) \big(e(x) - \pi_1 e(x)\big) \, dx - \int\limits_0^1 k(x) y'(x) \big(e(x) - \pi_1 e(x)\big)' \, dx \\ &= \int\limits_0^1 f(x) \big(e - \pi_1 e\big) \, dx - \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} k(x) y'(x) \big(e(x) - \pi_1 e(x)\big)' \, dx \,. \end{aligned}$$

Paskutiniame integrale integruodami dalimis ir atsižvelgę į tai, kad visi kraštiniai nariai išnyksta, nes

$$e(x_j) - \pi_1 e(x_j) = 0 \,,$$

įrodome *aposteriorinį* Galiorkino metodo sprendinio globaliosios paklaidos įvertį:

$$\| e' \|_k^2 = \int_0^1 R(y)\big(e - \pi_1 e\big)\, dx \,,$$

čia $R(y)$ yra diskrečiojo sprendinio netiktis:

$$R(y) = f(x) + \frac{d}{dx}\Big(k(x)\frac{dy}{dx}\Big) \,.$$

Pažymėkime svorines normas:

$$\| hu \|_a^2 = \sum_{i=1}^{N} h_{i-0,5}^2 \big\|\sqrt{a}\, u\big\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \,,$$

$$\| h^{-1} u \|_a^2 = \sum_{i=1}^{N} h_{i-0,5}^{-2} \,\big\|\sqrt{a}\, u\big\|^2_{L_2(x_{i-1},x_i)} \,.$$

Tada, pasinaudoję Koši ir Buniakovskio nelygybe, gauname tokį globaliosios paklaidos įvertį:

$$\| e' \|_k^2 \leqslant \| hR(y) \|_{k^{-1}} \, \| h^{-1}\big(e - \pi_1 e\big) \|_k \,. \tag{2.53}$$

Šiame poskyryje pateiksime 2.6 lemos modifikaciją, kurioje atsižvelgsime į tai, kad normos gali būti svorinės.

2.7 lema. *Jei $e(x) \in W_2^1(0,l)$, tai paklaida, kurią padarome aproksimuodami šią funkciją dalimis tiesiniu interpoliuojančiuoju daugianariu, yra įvertinama nelygybe:*

$$\| h^{-1}\big(e - \pi_1 e\big) \|_k \leqslant C_i \| e' \|_k \,. \tag{2.54}$$

Įrodymas. Pradžioje panagrinėkime tik vieną intervalą (a,b). Pažymėkime tiesinio interpoliuojančiojo daugianario paklaidą:

$$z(x) = e(x) - \pi_1 e(x) \,.$$

Ieškosime tokios minimalios konstantos C, su kuria dar tenkinama įdėjimo teorema:

$$\|\sqrt{k}\, z\|_{L_2(a,b)} \leqslant C \,\|\sqrt{k}\, z'\|_{L_2(a,b)} \,.$$

Spręskime tikrinių reikšmių uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(k(x)\dfrac{dv}{dx}\Big) = \lambda\, k(x)v(x), \quad a < x < b\,, \\ v(a) = 0, \quad v(b) = 0\,. \end{cases}$$

Šio uždavinio tikrinės funkcijos $\big\{v_n(x)\big\}$ sudaro pilną ortonormuotą erdvės $L_2(a,b)$ bazę, o atitinkamos tikrinės reikšmės yra išdėstytos didėjimo tvarka:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{N-1}\,.$$

Nesunku įrodyti, kad mažiausioji tikrinė reikšmė tenkina įvertį (įsitikinkite tuo patys):

$$\lambda_1 \ge \frac{\min\limits_{0\le x\le 1} k(x)}{\max\limits_{0\le x\le 1} k(x)}\,\frac{\pi^2}{(b-a)^2}\,,$$

todėl pažymėsime $\lambda_1 = \big(C_i(b-a)\big)^{-2}$.

Tada įdėjimo teoremos nelygybė yra ekvivalenti variaciniam uždaviniui:

$$\frac{1}{C^2} = \min_{v\neq 0} \frac{\|\sqrt{k}\, z'\|^2_{L_2(a,b)}}{\|\sqrt{k}\, z\|^2_{L_2(a,b)}} = \min_{v\neq 0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 c_n^2}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2} = \lambda_1\,,$$

todėl teisingas globaliosios paklaidos įvertis:

$$\frac{1}{b-a}\,\|\sqrt{k}\, z\|_{L_2(a,b)} \leqslant C_i\,\|\sqrt{k}\, z'\|_{L_2(a,b)}\,.$$

Pakėlę šią nelygybę kvadratu ir susumavę visus intervalus, gausime lemos tvirtinimą. □

Iš (2.53) ir (2.54) nelygybių gauname Galiorkino artinio globaliosios paklaidos aposteriorinį įvertį:

$$\|\, e'\,\|_k \leqslant C_i\,\Big(\sum_{i=1}^{N} h^2_{i-0,5} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)}\,\big(f(x)+k'(x)y'(x)\big)^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\,. \qquad (2.55)$$

Šis paklaidos įvertis yra tinkamas, kai sudarome adaptyvųjį diskretųjį tinklą. Tada galime naudoti atvirkštinio interpoliavimo algoritmą.