2.2. Baigtinių skirtumų schemų konvergavimas

Šiame poskyryje įrodysime, kad mūsų sudarytų baigtinių skirtumų schemų sprendiniai konverguoja į diferencialinio uždavinio sprendinį, ir įvertinsime tokio konvergavimo greitį. Kaip jau matėme 1 skyriuje, baigtinių skirtumų metodo konvergavimo analizė remiasi *aproksimacijos* ir *stabilumo* sąvokomis. Tačiau kiekvienu atveju jas reikia tiksliai apibrėžti.

Panagrinėkime diferencialinę lygtį:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1\,. \tag{2.15}$$

Suformuluosime dvi kraštinių sąlygų kombinacijas. Pirmuoju atveju abiejuose intervalo $[0,1]$ galuose imsime pirmojo tipo kraštines sąlygas:

$$u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1\,. \tag{2.16}$$

Antruoju atveju taške $x = 0$ formuluosime trečiojo tipo kraštinę sąlygą:

$$-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1\,. \tag{2.17}$$

Tarsime, kad kraštinio diferencialinio uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygas:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0\,.$$

Intervale $[0,1]$ apibrėžiame tolygųjį diskretųjį tinklą ω_h. Kraštinį uždavinį (2.15) – (2.16) aproksimuojame baigtinių skirtumų schema:

$$\begin{cases} -(a_{i-0,5}y_{\bar{x}})_x + d_i y_i = \varphi_i, & x_i \in \omega_h\,, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.18}$$

Trečiojo tipo kraštinę sąlygą aproksimuosime dviem būdais: baigtinių tūrių metodu:

$$-a_{0,5}y_{x,0} + \big(\beta + \frac{h}{2}d_0\big)y_0 = \mu_0\,, \tag{2.19}$$

ir paprasčiausiu baigtinių skirtumų artiniu

$$-a_{0,5}y_{x,0} + \beta y_0 = \mu_0\,. \tag{2.20}$$

2.2.1. Stabilumo apibrėžimas

Pažymėkime baigtinių skirtumų schemos sprendinio globaliąją paklaidą:

$$z_i = y_i - u(x_i).$$

Šį skirtumą įrašę į baigtinių skirtumų schemą, gausime, kad funkcija z tenkina baigtinių skirtumų lygtis

$$-(az_{\bar{x}})_x + d_i z_i = \psi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2.21}$$

ir vieną iš trijų kraštinių sąlygų kombinacijų: pirmojo tipo kraštines sąlygas:

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0\,, \tag{2.22}$$

trečiojo ir pirmojo tipo sąlygas:

$$-a_{0,5} z_{x,0} + \big(\beta + \frac{h}{2} d_0\big) z_0 = \psi_0, \quad z_N = 0$$

arba paprastesnes trečiojo ir pirmojo tipo sąlygas:

$$-a_{0,5} z_{x,0} + \beta z_0 = \psi_0, \quad z_N = 0\,,$$

čia ψ_i yra baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida taške x_i. Tarsime, kad įvykdytos 2.1 lemos sąlygos, tada teisingi tokie įverčiai:

$$|\psi_i| \leqslant Ch^2, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1\,. \tag{2.23}$$

Kraštinės sąlygos (2.19) aproksimavimo paklaidos eilė irgi yra antroji:

$$|\psi_0| \leqslant Ch^2\,,$$

tačiau paprastenės kraštinės sąlygos (2.20) aproksimavimo paklaidos eilė yra tik pirmoji:

$$|\psi_0| \leqslant Ch\,.$$

Pateiksime baigtinių skirtumų schemos stabilumo apibrėžimą. Baigtinių skirtumų schema yra *stabilioji*, jei (2.21) uždavinio su atitinkamomis kraštinėmis sąlygomis sprendinys tenkina įvertį:

$$\|Z\|_1 \leqslant C\|\Psi\|_2\,, \tag{2.24}$$

čia $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_2$ yra dvi diskrečiųjų funkcijų normos, o Z ir Ψ atitinkamai globaliųjų paklaidų ir aproksimavimo paklaidų vektoriai.

Matome, kad įrodę stabilumo įvertį, iš karto gauname baigtinių skirtumų schemos sprendinio konvergavimo teoremą, be to, sprendinio tikslumo eilė sutampa su baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos tikslumo eile.

Šioje analizėje svarbu tinkamai parinkti normas $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_2$. Bendra taisyklė yra tokia: norma $\|\cdot\|_1$ turi būti kuo stipresnė, tada daugiau informacijos gauname apie diferencialinio uždavinio sprendinį, o norma $\|\cdot\|_2$ turi būti kuo silpnesnė, tada platesnei diferencialinių uždavinių ir baigtinių skirtumų schemų aibei pavyksta įrodyti konvergavimą.

Pateiksime diskrečiųjų funkcijų normų pavyzdžių.

2.1 pavyzdys. Diskrečiųjų funkcijų normos. Nagrinėsime vektorių $Y = \big\{y_0, y_1, \dots, y_N\big\}$, apibrėžtą diskrečiojo tinklo $\overline{\omega}_h$ taškuose. Pažymėkime vidinių tinklo $\overline{\omega}_h$ taškų aibę ω_h:

$$\omega_h = \big\{x_i : x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1\big\}\,.$$

Apibrėžkime tokias diskrečiųjų funkcijų normas:

$$\|Y\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i\in\omega_h} |y(x_i)|\,,$$

$$\|Y\|_{L_2} = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} h|y(x_i)|^2\Big)^{1/2},$$

$$\|Y\|_{L_1} = \sum_{i=1}^{N-1} h|y(x_i)|\,.$$

Šios normos yra išdėstytos jų stiprumo tvarka. Tai iliustruosime tokiu pavyzdžiu. Imkime funkciją Y, kurios reikšmė taške x_j yra $O(h)$ eilės dydis, o kituose taškuose jos reikšmės yra $O(h^2)$ eilės dydžiai. Tada gauname tokias vektoriaus Y normų reikšmes:

$$\|Y\|_{C(\omega_h)} \equiv \max_{1\leqslant i\leqslant N-1} |y_i| = |y_j| = O(h)\,,$$

$$\|Y\|_{L_2} \equiv \Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N-1} h|y_i|^2 + h|y_j|^2\Big)^{1/2} = O(h^{3/2})\,,$$

$$\|Y\|_{L_1} \equiv \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N-1} h|y_i| + h|y_j| = O(h^2)\,.$$

2.2.2. Baigtinių skirtumų schemos su pirmojo tipo kraštinėmis sąlygomis konvergavimo analizė

Panagrinėkime (2.18) baigtinių skirtumų schemą. Šios schemos sprendinio globalioji paklaida z tenkina (2.21) – (2.22) uždavinį. Baiginių skirtumų schemos stabilumo įvertį įrodysime remdamiesi maksimumo principu.

2.1 teorema. *Tarkime, kad diferencialinės lygties koeficientas $q(x)$ yra teigiamoji funkcija:*

$$q(x) \geqslant q_0 > 0\,,$$

tada baigtinių skirtumų schema (2.18) *yra stabilioji:*

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h)} \leqslant C\,\|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,,$$

ir galioja paklaidos įvertis:

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h)} \leqslant Ch^2\,.$$

Įrodymas. Tarkime, kad (2.21) – (2.22) uždavinio sprendinio modulio didžiausioji reikšmė yra pasiekiama taške x_j. Šis taškas yra vidinis diskrečiojo tinklo taškas, nes kraštiniuose taškuose sprendinio paklaida yra lygi nuliui:

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0\,.$$

Iš (2.21) lygties gauname lygybę:

$$\Big(\frac{1}{h^2}\big(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}\big) + d_j\Big)z_j = \frac{1}{h^2}\big(a_{j-0,5}z_{j-1} + a_{j+0,5}z_{j+1}\big) + \psi_j\,.$$

Visi lygties koeficientai yra teigiami, todėl galime taip įvertinti didžiausiosios sprendinio reikšmės modulį:

$$\Big(\frac{1}{h^2}\big(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}\big) + d_j\Big)|z_j| \leqslant \frac{1}{h^2}\big(a_{j-0,5}|z_{j-1}| + a_{j+0,5}|z_{j+1}|\big) + |\psi_j|\,.$$

Nelygybę tik sustiprinsime, jei z_{j+1} ir z_{j-1} reikšmes pakeisime didesne $|z_j|$ reikšme:

$$\Big(\frac{1}{h^2}\big(a_{j+0,5} + a_{j-0,5}\big) + d_j\Big)|z_j| \leqslant \frac{1}{h^2}\big(a_{j-0,5} + a_{j+0,5}\big)|z_j| + |\psi_j|\,.$$

Kadangi $d_j \geqslant q_0$, tai iš šios nelygybės gauname stabilumo įvertį:

$$\|Z\|_{C(\omega_h)} \leqslant \frac{1}{q_0}|\psi_j| \leqslant \frac{1}{q_0}\|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,.$$

Pasinaudoję aproksimavimo paklaidos įverčiu (2.23), įrodome globaliosios paklaidos konvergavimo greičio įvertį. □

2.2.3. Antrojo ir trečiojo tipo kraštinių sąlygų analizė

Trečiojo tipo kraštinė sąlyga. Baigtinių skirtumų schemų su trečiojo tipo kraštine sąlyga, t. y. kai $\beta > 0$, konvergavimas irgi įrodomas maksimumo principu. Kadangi šiuo atveju globaliosios paklaidos didžiausioji reikšmė gali būti pasiekta ir kraštiniame taške x_0, tai nagrinėjame diskrečiųjų taškų aibę:

$$\omega_h^+ = \big\{x_i : \quad x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1\big\}\,.$$

Taikydami maksimumo principą, gauname baigtinių skirtumų schemos stabilumo įvertį:

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant C\|\Psi\|_{C(\omega_h^+)}\,.$$

Atsižvelgę į aproksimavimo paklaidos įverčius, įrodome, kad baigtinių skirtumų schemos (2.18) – (2.19) sprendinio paklaida tenkina nelygybę:

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant Ch^2\,,$$

o baigtinių skirtumų schemos (2.18), (2.20) sprendinio paklaida yra tokia:

$$\|Y - U\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant Ch\,.$$

Antrojo tipo kraštinė sąlyga. Dabar panagrinėkime baigtinių skirtumų schemą (2.18), (2.19) su antrojo tipo kraštine sąlyga taške $x = 0$:

$$\begin{cases} -(a_{i-0,5}y_{\bar{x}})_x + d_i y_i = \varphi_i, \quad x_i \in \omega_h\,, \\ -a_{0,5}y_{x,0} + \dfrac{h}{2}d_0 y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1\,. \end{cases}$$

Vėl nagrinėjame du atvejus. Jei didžiausiąją reikšmę paklaida pasiekia vidiniame taške, tai galioja įvertis:

$$\|Z\|_{C(\omega_h)} \leqslant \frac{1}{q_0}|\psi_j| \leqslant \frac{1}{q_0}\|\Psi\|_{C(\omega_h)}\,,$$

jei paklaidos maksimumas pasiekiamas kraštiniame taške $x = x_0$, tai:

$$\frac{h}{2}q_0|z_0| \leqslant \frac{h}{2}d_0|z_0| \leqslant |\psi_0|\,.$$

Iš čia gauname nelygybę:

$$|z_0| \leqslant \frac{2}{hq_0}|\psi_0|\,.$$

Todėl baigtinių skirtumų schemos su Neimano tipo kraštine sąlyga stabilumo įvertis yra toks:

$$\|Z\|_{C(\omega_h^+)} \leqslant \frac{1}{q_0} \max\left(\|\Psi\|_{C(\omega_h)},\ \frac{2}{h}|\psi_0|\right).$$

Kadangi visuose taškuose aproksimavimo paklaida yra $\mathcal{O}(h^2)$ eilės dydis, tai diskrečiojo sprendinio globaliajai paklaidai galioja įvertis:

$$|Y - U|_{C(\omega_h^+)} \leqslant Ch\,. \tag{2.25}$$

Šiame poskyryje gautuose stabilumo įverčiuose tiek sprendinio globalioji paklaida, tiek ir aproksimavimo paklaida yra įvertintos C normoje. Todėl jei nors viename diskrečiojo tinklo taške gaunamas blogesnis baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaidos įvertis, tai jis ir nulemia diskrečiojo sprendinio globaliosios paklaidos įvertį. Toks rezultatas ne visada yra optimalus – sukurta daug kitų stabilumo įvertinimo būdų, kuriais gaunami tikslesni įverčiai.

2.2.4. Energijos stabilumo įvertinimo metodas

Pirmiausia skirtumų funkcijų aibėje apibrėžkime tokias skaliarines sandaugas ir normą:

$$\begin{aligned}
&(Y,V) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h\,, \quad (Y,V] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h\,,\\
&\| \ Y \ \|^2 = (Y,Y)\,.
\end{aligned}$$

Įrodykime keletą pagalbinių teiginių.

2.3 lema. *Skirtumų funkcijoms y_i ir v_i, apibrėžtoms aibėje $\bar{\omega}_h$, galioja tokia dalinio sumavimo formulė:*

$$(Y, V_x) = -(Y_{\bar{x}}, V] + y_N v_N - y_0 v_1\,. \tag{2.26}$$

Įrodymas. Atlikdami elementarius pertvarkymus gausime tokias lygybes:

$$\begin{aligned}
(Y,V_x) &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i \frac{v_{i+1}-v_i}{h} h = \sum_{i=1}^{N-1} y_i (v_{i+1}-v_i) = \sum_{i=2}^{N} y_{i-1} v_i - \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i\\
&= \sum_{i=1}^{N} y_{i-1} v_i - y_0 v_1 - \sum_{i=1}^{N} y_i v_i + y_N v_N
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}(y_i - y_{i-1})v_i + y_N v_N - y_0 v_1 \,.$$

Lema įrodyta. □

2.4 lema. (Grino (Green) formulė.) *Jei y_i yra skirtumų funkcija, apibrėžta aibėje $\bar{\omega}_h$, galioja lygybė:*

$$\big(Y, (aY_{\bar{x}})_x\big) = -(a, (Y_{\bar{x}})^2] + a_{N-0,5}y_{\bar{x},N}y_N - a_{0,5}y_{x,0}y_0 \,.$$

Įrodymas. Ši lygybė gaunama iš 2.3 lemos su $v = ay_{\bar{x}}$. □

Skirtumų funkcijų aibėje apibrėžkime pusnormę:

$$\|Y_{\bar{x}}]|^2 = (Y_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}}] \,.$$

Jei $y_N = 0$ arba $y_0 = 0$, tai ši pusnormė yra norma (įrodykite!).

2.5 lema. (Diskrečioji Sobolevo įdėties teorema.) *Jei y_i yra skirtumų funkcija, apibrėžta aibėje $\bar{\omega}_h$, ir $y_N = 0$, tai:*

$$\|Y\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leqslant \sqrt{l}\,\|Y_{\bar{x}}]| \,.$$

Įrodymas. Sakykime, kad funkcija Y didžiausią reikšmę įgyja taške x_i, t. y.

$$\|Y\|_{C(\bar{\omega}_h)} = |y_i| \,.$$

Pasinaudoję sąlyga $y_N = 0$, y_i galime išreikšti taip:

$$\begin{aligned} y_i &= (y_i - y_{i+1}) + (y_{i+1} - y_{i+2}) + \cdots + (y_{N-1} - y_N) + y_N \\ &= -\sum_{j=i+1}^{N} y_{\bar{x},j}\ h \,. \end{aligned}$$

Šiai sumai pritaikę Koši ir Buniakovskio nelygybę:

$$|\sum_{j=i}^{N} a_j b_j|^2 \leqslant \Big(\sum_{j=i}^{N} a_j^2\Big)\Big(\sum_{j=i}^{N} b_j^2\Big) \,,$$

įvertinsime didžiausiąją funkcijos Y reikšmę:

$$\begin{aligned} |y_i| &\leqslant \Big(\sum_{j=i+1}^{N} 1\ h\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=i+1}^{N} (y_{\bar{x},j})^2 h\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant (l - x_i)^{1/2}\|Y_{\bar{x}}]| \leqslant \sqrt{l}\,\|Y_{\bar{x}}]| \,. \end{aligned}$$

Lema įrodyta. □

Dabar panagrinėkime baigtinių skirtumų schemos sprendinio paklaidų uždavinį:

$$\begin{cases} -(az_{\bar{x}})_x + d_i z_i = \psi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ -a_{0,5} z_{x,0} + \big(\beta + \frac{h}{2} d_0\big) z_0 = \psi_0, \quad z_N = 0\,. \end{cases} \tag{2.27}$$

(2.27) lygtį skaliariškai padauginkime iš z_i:

$$-\big(Z, (aZ_{\bar{x}})_x\big) + (dZ, Z) = (\Psi, Z)\,.$$

Iš Grino formulės ir diskrečiojo uždavinio kraštinių sąlygų gauname energijos lygybę:

$$(a, (Z_{\bar{x}})^2] + (\beta + \frac{h}{2} d_0) z_0^2 + (dZ, Z) = (\Psi, Z) + \psi_0 z_0\,.$$

Pasinaudoję eliptiškumo sąlyga, išvedame nelygybę:

$$k_0 \|Z_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i| h + |\psi_0|\Big) \|Z\|_{C(\bar{\omega}_h)}\,.$$

Iš Sobolevo įdėties teoremos gauname (2.18) – (2.19) baigtinių skirtumų schemos stabilumo įvertį:

$$\|Z\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leqslant \frac{l}{k_0} \Big(\sum_{i=1}^{N-1} |\psi_i| h + |\psi_0|\Big)\,. \tag{2.28}$$

Nagrinėdami šios schemos aproksimacijos tikslumą, esame įrodę, kad $\psi_i = O(h^2)$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Todėl iš (2.28) stabilumo įverčio gauname, kad (2.18) – (2.19) baigtinių skirtumų schemos sprendinio globaliajai paklaidai galioja įvertis:

$$\|Y - U\|_{C(\bar{\omega}_h)} \leqslant Ch^2\,. \tag{2.29}$$

Palyginkime šį rezultatą su tikslumo įverčiu, įrodytu taikant maksimumo principą. Energijos metodu gautas stabilumo įvertis yra efektyvesnis, kadangi baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida įvertinta L_1 normoje, kuri yra silpnesnė už C normą. Be to, (2.29) įvertis yra tinkamas ir uždaviniui su Neimano kraštine sąlyga.