2 skyrius

Paprastųjų diferencialinių lygčių sistemų kraštinio uždavinio skaitiniai sprendimo metodai

2.1. Baigtinių tūrių metodas

Šiame poskyryje susipažinsime su labai universaliu baigtinių skirtumų schemų sudarymo metodu. Panagrinėkime diferencialinį kraštinį uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\big(k(x)\dfrac{du}{dx}\big) + q(x)u = f(x), \ \ 0 < x < l\,, \\ -k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0\,, \\ u(l) = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Tarsime, kad diferencialinio uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygą:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \ \ q(x) \geqslant 0, \ \ \beta \geqslant 0\,.$$

2.1.1. Baigtinių tūrių schema

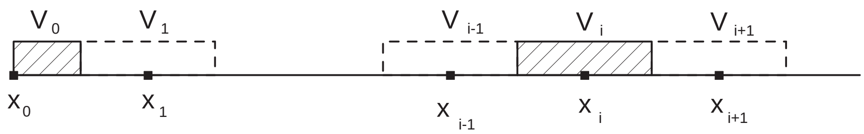
Intervale $[0, l]$ apibrėžkime diskretųjį tinklą:

$$\overline{\omega}_h = \left\{\, x_i : \ \ x_i = ih, \ i = 0, 1, \ldots, N, \ x_N = l \,\right\}.$$

Diferencialinę lygtį aproksimuokime diskrečiąja lygtimi. Taikysime *baigtinių tūrių* metodą (angl. *finite volume method*). Panagrinėkime elementariąją sritį:

$$V_i = \left\{ \; x : \quad x_{i-0,5} \leqslant x \leqslant x_{i+0,5} \; \right\},$$

kuri pavaizduota 2.1 pav.



2.1 pav. Baigtinių tūrių metodo diskretusis tinklas

Srityje V_i diferencialinio uždavinio sprendinys tenkina tvermės dėsnį, kurį gauname integruodami (2.1) lygtį šiame intervale:

$$w_{i+0,5} - w_{i-0,5} + \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx = \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx\,, \tag{2.2}$$

čia $w(x)$ pažymėjome srautą:

$$w(x) = -k(x)\frac{du}{dx}\,.$$

Norėdami gauti skaičiavimams tinkamą algoritmą, aproksimuokime pirmąjį integralą pagal vidurinių reikšmių formulę:

$$\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx \approx u_i \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\,dx\,.$$

Pažymėkime

$$d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\,dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx\,.$$

Iš srauto lygybės $w(x) = -k(x)\dfrac{du}{dx}$ išreiškiame sprendinio išvestinę:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{w(x)}{k(x)}\,.$$

Integruodami šią lygybę intervale $[x_i, x_{i+1}]$ ir aproksimuodami funkciją $w(x)$ pirmuoju Teiloro skleidinio nariu $w(x) \approx w_{i+0,5}$, gauname formulę:

$$u_{i+1} - u_i = -\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} w(x) \frac{dx}{k(x)} \approx -w_{i+0,5} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} .$$

Todėl srautą $w_{i+0,5}$ pakeičiame artiniu:

$$w_{i+0,5} \approx -a_{i+0,5} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} ,$$

čia pažymėjome

$$a_{i+0,5} = \left(\frac{1}{h} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} .$$

Šias išraiškas įrašę į (2.2) lygybę, gausime skirtumų lygtį:

$$-\frac{a_{i+0,5} y_x - a_{i-0,5} y_{\bar{x}}}{h} + d_i y_i = \varphi_i ,$$

kurią trumpiau galime užrašyti ir taip:

$$-(a_{i-0,5} y_{\bar{x}})_x + d_i y_i = \varphi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 . \tag{2.3}$$

Kraštinių sąlygų aproksimavimas

Pirmojo tipo kraštinę sąlygą pakeičiame tiksliąja lygybe:

$$y_N = \mu_2 . \tag{2.4}$$

Trečiojo tipo kraštinę sąlygą galime pakeisti paprastu diskrečiuoju artiniu:

$$-a_{0,5} y_{x,0} + \beta y_0 = \mu_1 ,$$

tačiau vėliau parodysime, kad šios formulės aproksimacijos tikslumas yra mažesnis už (2.3) lygties aproksimacijos tikslumą. Vėl taikykime baigtinių tūrių metodą. Imkime sritį: $V_0 = [0, x_{0,5}]$ ir integruokime šiame intervale (2.1) lygtį:

$$w_{0,5} - w_0 + \int\limits_0^{x_{0,5}} q(x) u(x)\, dx = \int\limits_0^{x_{0,5}} f(x)\, dx .$$

Srautą w_0 randame iš kraštinės sąlygos:

$$w_0 = \beta u_0 - \mu_1 \,.$$

Srautą $w_{0,5}$ ir pirmąjį integralą pakeiskime jų artiniais:

$$w_{0,5} \approx a_{0,5} \frac{u_1 - u_0}{h} \,,$$

$$\int\limits_0^{x_{0,5}} q(x) u(x) \, dx \approx u_0 \int\limits_0^{x_{0,5}} q(x) \, dx \,.$$

Šias išraiškas įrašę į balanso lygtį, gausime kraštinės sąlygos artinį:

$$-a_{0,5} y_{x,0} + (\beta + 0,5 h d_0) y_0 = \mu_1 + \frac{1}{2} h \varphi_0 \,, \tag{2.5}$$

čia pažymėjome:

$$d_0 = \frac{1}{0,5h} \int\limits_0^{x_{0,5}} q(x) \, dx, \quad \varphi_0 = \frac{1}{0,5h} \int\limits_0^{x_{0,5}} f(x) \, dx \,.$$

Baigtinių skirtumų schemą (2.3) – (2.5) galime užrašyti kaip tiesinių lygčių sistemą su triįstrižaine matrica, be to, yra įvykdyta matricos diagonalinio vyravimo sąlyga. Todėl egzistuoja vienintelis baigtinių skirtumų schemos sprendinys.

2.1.2. Aproksimacijos tikslumo analizė

Ištirsime baigtinių skirtumų schemos (2.3) – (2.5) aproksimacijos tikslumą.

2.1 lema. *Tarkime, kad funkcijos $g(x)$, $f(x)$ ir jų pirmosios išvestinės yra tolydžiosios, o jų antrosios išvestinės yra aprėžtosios funkcijos:*

$$|q''(x)| \leqslant C_2, \quad |f''(x)| \leqslant C_2, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \,, \tag{2.6}$$

funkcija $k(x)$ ir jos pirmoji ir antroji išvestinės yra tolydžiosios, o trečioji išvestinė – aprėžtoji funkcija:

$$|k'''(x)| \leqslant C_3, \quad 0 \leqslant x \leqslant l \,. \tag{2.7}$$

Tada baigtinių skirtumų schemos (2.3) – (2.5) aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji.

Įrodymas. Pateiksime tik kraštinės sąlygos (2.5) aproksimacijos tikslumo analizę. Tarkime, kad diferencialinė lygtis (2.1) yra teisinga ir taške $x = 0$. Pagal apibrėžimą kraštinės sąlygos aproksimavimo paklaida yra:

$$\psi_0 = -a_{0,5} u_{x,0} + (\beta + 0,5 h d_0) u_0 - \mu_0 - \frac{1}{2} h \varphi_0 \,.$$

Į šią lygybę įrašykime Teiloro skleidinius:

$$a_{0,5} = k_0 + \frac{k_0'}{2} h + \mathcal{O}(h^2)\,,$$

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = u_0' + \frac{u_0''}{2} h + \mathcal{O}(h^2)\,,$$

$$d_0 = q_0 + \mathcal{O}(h^2), \quad \varphi_0 = f_0 + \mathcal{O}(h^2)\,,$$

tada gausime tokią kraštinės sąlygos aproksimavimo paklaidos išraišką:

$$\psi_0 = \big(- k(0) u'(0) + \beta u(0) - \mu_0 \big) + \frac{h}{2} \big(- k_0' u_0' - k_0 u_0'' + q_0 u_0 - f_0 \big) + \mathcal{O}(h^2)\,.$$

Reiškinys, esantis pirmuosiuose skliaustuose, lygus nuliui dėl kraštinės sąlygos, reiškinys, esantis antruosiuose skliaustuose, irgi lygus nuliui. Tai išplaukia iš (2.1) diferencialinės lygties, todėl ir kraštinės sąlygos aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji. Lema yra įrodyta. □

Iš lemos įrodymo išeina, jog paprasčiausio kraštinės sąlygos artinio

$$-a_{0,5} y_{x,0} + \beta y_0 = \mu_0$$

aproksimacijos tikslumo eilė yra tik pirmoji. Aproksimacijos tikslumo sumažėjimas viename diskrečiojo tinklo mazge gali sumažinti baigtinių skirtumų schemos sprendinio tikslumą visuose mazguose.

2.1.3. Baigtinių tūrių metodo taikymas

Baigtinių tūrių metodas yra universalus baigtinių skirtumų schemų sudarymo metodas. Jis taikomas ir tada, kai diferencialinio uždavinio koeficientai turi trūkio taškų, taip pat kai tinklo ω_h žingsnis h nėra pastovus arba uždavinys suformuluotas sferinių ir cilindrinių koordinačių sistemose.

Uždavinys cilindrinių koordinačių sistemoje

Parodysime, kaip baigtinių tūrių metodu aproksimuojamas šilumos sklidimo uždavinys cilindrinių koordinačių sistemoje:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\big(rk(r)\dfrac{du}{dr}\big) + q(r)u = f(r)\,, \quad 0 < r < R\,, \\ \lim\limits_{r\to 0} rk(r)\dfrac{du}{dr} = 0\,, \\ u(R) = \mu_2\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Padauginkime diferencialinę lygtį iš r ir užrašykime balanso lygtį elementariojoje srityje $V_i = [r_{i-0,5}, r_{i+0,5}]$:

$$\frac{1}{r_i h}\big(w_{i+0,5} - w_{i-0,5}\big) + \frac{1}{r_i h}\int\limits_{r_{i-0,5}}^{r_{i+0,5}} rq(r)u\,dr = \frac{1}{r_i h}\int\limits_{r_{i-0,5}}^{r_{i+0,5}} rf(r)\,dr\,,$$

čia pažymėjome šilumos srautą $w(r) = -rk(r)u'(r)$. Aproksimuokime šį srautą formule

$$w_{i-0,5} \approx -r_{i-0,5}a_{i-0,5}u_{\bar{r},i}$$

ir pakeiskime integralus balanso lygtyje atitinkamai $r_i d_i u_i h$ ir $r_i\varphi_i h$. Gausime baigtinių skirtumų lygtį:

$$-\frac{1}{r_i}\big(r_{i-0,5}a_{i-0,5}y_{\bar{r}}\big)_r + d_i y_i = \varphi_i\,.$$

Koeficientus $a_{i-0,5}$, d_i ir φ_i galime skaičiuoti taip: formules:

$$a_{i-0,5} = k(r_{i-0,5}),\quad d_i = q(r_i),\quad \varphi_i = f(r_i)\,.$$

Panagrinėkime kraštinės sąlygos taške $r = 0$ aproksimaciją. Užrašykime balanso lygtį intervale $[0, r_{0,5}]$:

$$w_{0,5} - w_0 + \int\limits_0^{r_{0,5}} rq(r)u(r)\,dr = \int\limits_0^{r_{0,5}} rf(r)\,dr\,.$$

Iš kraštinės sąlygos randame, kad $w_0 = 0$. Srautą $w_{0,5}$ ir abu integralus aproksimuojame skaitinėmis formulėmis, tada gauname lygtį:

$$-r_{0,5}\ a_{0,5}y_{r,0} + \frac{r_{0,5}^2}{2}\big(d_0y_0 - \varphi_0\big) = 0\,.$$

Į šią lygtį įrašę $r_{0,5} = \frac{1}{2}h$, išvedame kraštinės sąlygos aproksimacijos formulę:

$$-a_{0,5}y_{r,0} + \frac{h}{4}\big(d_0y_0 - \varphi_0\big) = 0\,.$$

Netolygusis diskretusis tinklas

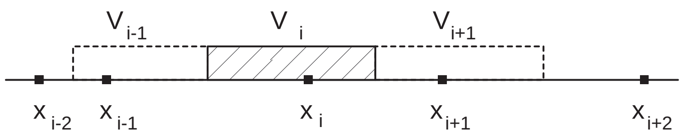
Nagrinėdami paprastųjų diferencialinių lygčių pradinio uždavinio sprendimo metodus, įsitikinome, kad efektyviuose integravimo algoritmuose naudojami nevienodi, adaptyviai parenkami integravimo žingsniai. Todėl ir spręsdami kraštinius diferencialinius uždavinius naudosime netolygųjį diskretųjį tinklą:

$$\omega_h = \left\{ \, x_i : \ \ x_i = x_{i-1} + h_{i-0.5}, \ \ i = 1, 2, \cdots, N, \ x_N = l \, \right\}.$$

Panagrinėkime elementarią baigtinę sritį (žr. 2.2 pav.):

$$V_i = [x_{i-0,5}, x_{i+0,5}], \ \ x_{i\pm 0,5} = x_i \pm \frac{1}{2} h_{i\pm 0,5}\,.$$

Integruodami diferencialinę lygtį srityje V_i gauname tvermės dėsnį:



2.2 pav. Baigtinių tūrių metodo netolygusis diskretusis tinklas

$$w_{i+0,5} - w_{i-0,5} + \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx = \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx\,.$$

Srautą $w_{i-0,5}$ aproksimuojame formule:

$$w_{i-0,5} \approx -a_{i-0,5} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-0,5}}\,,$$

čia pažymėjome koeficientą:

$$a_{i-0,5} = \left(\frac{1}{h_{i-0,5}} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}.$$

Integralą aproksimuojame artiniu:

$$\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx \approx h_i d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)\,dx\,,$$

čia h_i pažymėjome dviejų gretimų žingsnių aritmetinį vidurkį:

$$h_i = \frac{h_{i+0,5} + h_{i-0,5}}{2}.$$

Šias formules įrašę į sprendinio tvermės lygtį, gauname baigtinių skirtumų lygtį:

$$-\frac{1}{h_i}\left(a_{i+0,5}\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+0,5}} - a_{i-0,5}\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-0,5}}\right) + d_i y_i = \varphi_i\,.$$

Naudodami baigtinių skirtumų operatorius, šią lygtį užrašome taupiau:

$$-(a y_{\bar{x}})_{\hat{x}} + dy = \varphi\,. \tag{2.9}$$

Kai koeficientus $a_{i-0,5}, d_i, \varphi_i$ išreiškiame atitinkamais integralais, gauname *etaloninę* baigtinių skirtumų schemą. Tačiau dažnai šiuos koeficientus apskaičiuojame apytiksliai, aproksimuodami integralus jų artiniais:

$$d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i)\,, \tag{2.10}$$

o difuzijos koeficientą apskaičiuojame imdami *harmoninį* arba *aritmetinį* vidurkius arba *vidurinių reikšmių* formulę:

$$a_{i-0,5} = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}, \quad a_{i-0,5} = \frac{k_i + k_{i-1}}{2}, \quad a_{i-0,5} = k(x_{i-0,5})\,.$$

Ištirsime baigtinių skirtumų lygties (2.9) aproksimacijos tikslumą.

2.2 lema. *Tegul diferencialinės lygties koeficientų $k(x), q(x), f(x)$ antrosios išvestinės, o lygties sprendinio $u(x)$ trečioji išvestinė yra tolydžiosios funkcijos:*

$$k(x) \in C^2[0,l], \quad q(x) \in C^2[0,l], \quad f(x) \in C^2[0,l], \quad u(x) \in C^3[0,l]\,.$$

Tada baigtinių skirtumų lygties (2.9) *aproksimavimo paklaida yra išreiškiama lygybe:*

$$\psi_i = \eta_{\hat{x},i} + \mu_i\,, \tag{2.11}$$

o funkcijų η_i ir μ_i mažumo eilė yra antroji:

$$\eta_i = \mathcal{O}(h_i^2), \quad \mu_i = \mathcal{O}(h_i^2)\,.$$

Įrodymas. Naudodami tvermės dėsnį gauname tokią baigtinių skirtumų lygties aproksimavimo paklaidos išraišką:

$$\psi_i = \frac{a_{i+0,5}u_{x,i} - (ku')_{i+0,5} - a_{i-0,5}u_{\bar{x},i} + (ku')_{i-0,5}}{h_i}$$
$$- \Big(d_i u_i - \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx\Big) + \Big(\varphi_i - \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx\Big).$$

Etaloninės schemos atveju paskutinis narys yra lygus nuliui. Įvertinsime šio nario dydį, kai taikome paprastesnę koeficientų skaičiavimo formulę (2.10). Funkciją $f(x)$ išskleiskime Teiloro eilute:

$$f(x) = f_i + f_i'(x - x_i) + \mathcal{O}(h_i^2)\,,$$

tada gauname:

$$f(x_i) - \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x)\,dx = f_i'\Big(\frac{h_{i-0,5}^2}{8}\Big)_{\hat{x}} + \mathcal{O}(h_i^2) = \Big(\frac{h_{i-0,5}^2 f_{i-0,5}'}{8}\Big)_{\hat{x}} + \mathcal{O}(h_i^2)\,.$$

Analogiškai įrodome lygybę:

$$q(x_i)\,u_i - \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx = \Big(\frac{h_{i-0,5}^2 (qu)_{i-0,5}'}{8}\Big)_{\hat{x}} + \mathcal{O}(h_i^2)\,.$$

Etaloninės schemos atveju teisingas įvertis:

$$d_i\,u_i - \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x)u(x)\,dx = \Big(\frac{h_{i-0,5}^2 (qu')_{i-0,5}}{8}\Big)_{\hat{x}} + \mathcal{O}(h_i^2)\,.$$

Panašiai tiriame ir srauto artinio paklaidą. Atliksime tik harmoninio vidurkio formulės analizę:

$$u_{\bar{x},i} = u_{i-0,5}' + \mathcal{O}(h_{i-0,5}^2), \qquad \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}} = k_{i-0,5} + \mathcal{O}(h_{i-0,5}^2)\,.$$

Lema yra įrodyta. □

Iš lemoje įrodyto (2.11) įverčio išeina, kad netolygiesiems diskretiesiams tinklams baigtinių skirtumų schemos aproksimacijos tikslumas maksimumo normoje yra tik pirmosios eilės:

$$\|\psi\|_\infty \equiv \max_{0\le i\le N} |\psi_i| = \mathcal{O}\Big(\frac{|\eta|}{h}\Big) = \mathcal{O}(h)\,.$$

Tačiau tai, kad aproksimavimo paklaida vienoje normoje yra mažesnio tikslumo, dar nereiškia, kad ir baigtinių skirtumų schemos globalioji paklaida yra tokios pačios eilės dydis.

2.1.4. Didesnio aproksimacijos tikslumo schema

Tirdami kraštinės sąlygos aproksimacijos tikslumą pasinaudojome prielaida, kad diferencialinė lygtis yra tenkinama ir taške $x = 0$. Tai leido mums įrodyti, kad kraštinės sąlygos aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji. Šią idėją pritaikysime konstruodami didesnės nei antrosios aproksimacijos tikslumo eilės baigtinių skirtumų schemą.

Panagrinėkime kraštinį uždavinį:

$$\begin{cases} -u'' + qu(x) = f(x), \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1\,, \end{cases} \tag{2.12}$$

čia q yra skaičius, be to, laikysime, kad $q \geqslant 0$.

Aproksimuokime diferencialinį uždavinį baigtinių skirtumų schema:

$$\begin{cases} -y_{\bar{x}x} + qy_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1\,, \\ y_0 = \mu_0, \quad y_N = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.13}$$

Tarkime, kad kraštinio uždavinio sprendinio $u(x)$ šeštoji išvestinė yra tolygiai aprėžta:

$$|u^{(6)}(x)| \leqslant C\,.$$

Tada baigtinių skirtumų schemos (2.13) aproksimavimo paklaida:

$$\psi_i \equiv -u_{\bar{x}x} + qu_i - f(x_i) = -\frac{h^2}{12}u_i^{(4)} + \mathcal{O}(h^4)\,.$$

Matome, kad pagrindinė aproksimavimo paklaidos dalis lygi $-\dfrac{1}{12}h^2u_i^{(4)}$. Išdiferencijavę (2.12) lygtį du kartus, gausime lygybę:

$$u^{(4)}(x) = qu''(x) - f''(x)\,.$$

Dar kartą pasinaudoję diferencialine lygtimi, gausime tokią $u^{(4)}(x)$ reikšmių skaičiavimo formulę:

$$u^{(4)}(x) = q^2u(x) - qf(x) - f''(x)\,.$$

Dabar pertvarkykime baigtinių skirtumų lygtį taip, kad aproksimavimo paklaidos išraiškoje neliktų $\mathcal{O}(h^2)$ eilės nario:

$$-y_{\bar{x}x} + q\big(1 + q\frac{h^2}{12}\big)y = \big(1 + q\frac{h^2}{12}\big)f(x_i) + \frac{h^2}{12}f_{\bar{x}x}\,. \tag{2.14}$$

Tokios baigtinių skirtumų lygties aproksimavimo tikslumo eilė yra ketvirtoji. Tiesinių lygčių sistemos (2.14) matrica yra triįstrižainė ir diagonaliai vyraujanti, todėl ir didesnio tikslumo baigtinių skirtumų schemos sprendinį taupiai apskaičiuojame perkelties metodu.