

### 1.3. Daugiažingsnių skirtumų metodų stabilumas

Antroje paskaitoje pateikėme stabilumo apibrėžimą, kuris susiejo globalios paklaidos reikšmes dviejuose gretimuose laiko sluoksniuose ir įvertino eilinio žingsnio lokaliają paklaidą. Šis apibrėžimas netinka, kai nagrinėjame daugiažingsnius skirtumų algoritmus.

#### 1.3.1. Paprasčiausias stabilumo kriterijus

Šis kriterijus gaunamas, kai sprendžiame tokį modelinį uždavinį:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.54)$$

Šio uždavinio sprendinys yra konstanta

$$u(t) \equiv u(0).$$

Dabar modelinį uždavinį spręsimė (1.23) daugiažingsniu baigtinių skirtumų metodu:

$$\sum_{k=0}^m a_k y^{n-k} = 0. \quad (1.55)$$

Gautoji lygtis yra skirtuminis (1.54) diferencialinės lygties artinys. Todėl stabilumo apibrėžime sieksime garantuoti, kad šių sprendinių kokybinės savybės būtų panašios.

**Apibrėžimas.** Daugiažingsnis skirtumų metodas yra *stabilus pradinės sąlygos atžvilgiu*, jeigu (1.55) lygties sprendiniui galioja įvertis:

$$|y^n| \leq C \max(|y^0|, |y^1|, \dots, |y^{m-1}|), \quad n = m, m+1, \dots, N. \quad (1.56)$$

Bendrasis šios lygties sprendinys išreiškiamas atskirųjų sprendinių

$$y(t_n) = q^n$$

tiesine kombinacija. Įstatę atskirąjį sprendinį į (1.55) lygtį, gausime daugiažingsnio skirtumų metodo *charakteristinę lygtį*:

$$F(q) \equiv \sum_{k=0}^m a_k q^{m-k} = 0.$$

Stabilumo įvertio galiojimas priklauso nuo charakteristinės lygties sprendinių. Pažymėkime  $q_{max}$  charakteristinės lygties didžiausio modulio šaknį:

$$|q| \leq |q_{max}|.$$

Iš (1.32) lygčių sistemos pirmosios lygties gauname, kad

$$F(1) = \sum_{k=0}^m a_k = 0,$$

taigi  $q = 1$  yra charakteristinės lygties šaknis, todėl  $|q_{max}| \geq 1$ .

Tarkime, kad  $|q_{max}| > 1$ , tada ją atitinkantis atskirasis sprendinys lygus

$$y^n = \delta q_{max}^{n-m+1}.$$

Matome, kad (1.55) uždavinio sprendinys  $y^j$ , kuris taškuose  $t_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$  yra ne didesnis už  $\delta$ , vėliau didėja eksponentiškai greitai, todėl (1.56) stabilumo įvertis negali galioti.

Lieka išnagrinėti atvejį, kai  $|q_{max}| = 1$ , bet šis charakteristinės lygties sprendinys yra  $l > 1$  kartotinumų. Tada (1.55) skirtumų lygties atskirasis sprendinys yra tokio pavidalo:

$$y^n = \delta q_{max}^{n-m+1} \left( \frac{n}{m-1} \right)^{l-1},$$

čia  $m > 1$ , nes priešingu atveju charakteristinė lygtis kartotinių šaknų neturėtų. Matome, kad laiko intervale  $[0, T]$  sprendinys gali išaugti iki  $\mathcal{O}\left(\delta \left(\frac{T}{\tau}\right)^{l-1}\right)$  dydžio, todėl (1.56) stabilumo nelygė negalioja ir šiuo atveju.

Taigi gauname tokią būtinąją sąlygą, kurią turi tenkinti bet kuri efektyvi skirtumų schema, naudojama PDL pradiniam uždaviniui spręsti.

**Šaknų kriterijus.** *Daugiažingsnis metodas (1.23) tenkina šaknų kriterijų, jei visos šio metodo charakteristinės lygties šaknys priklauso sričiai  $|q| \leq 1$ , o tarp šaknų kurių modulis lygus vienetui nėra kartotinių.*

**1.5 teorema.** *Jeigu daugiažingsnis skirtumų metodas tenkina šaknų kriterijų, tai aukščiausia galima aproksimacijos eilė yra arba*

a)  $p = m$ , jei schema yra išreikštinė, arba

b)  $p = m + 1$ , jei  $m$  – nelyginis skaičius, arba  $p = m + 2$ , jei  $m$  – lyginis skaičius ir schema yra neišreikštinė.

Pažymėtina, kad Adamso metodai visada tenkina šaknų kriterijų. Todėl Adamso ir Bashfortho metodas yra išreikštinio daugiažingsnio metodo, turinčio aukščiausią galimą aproksimacijos eilę, pavyzdys. Jei  $m$  yra nelyginis skaičius, tai Adamso ir Moultono metodas irgi yra analogiško neišreikštinio metodo pavyzdys. (1.35) metodas yra neišreikštinis dvižingsnis metodas, turintis aukščiausią ketvirtą aproksimacijos tikslumo eilę.

**1.6 teorema.** Tegul visos charakteristinės lygties šaknys tenkina šaknų kriterijų. Be to, tegul  $\|F'_u(t, U)\| \leq L$ . Tada, kai yra pakankamai mažos parametro  $\tau$  reikšmės, galioja toks tikslumo įvertis:

$$\|Z^n\| \leq e^{C_2 T} \left( \max_{0 \leq j \leq m-1} \|Z^j\| + C_3 \sum_{j=m}^n \tau \|\Psi^j\| \right). \quad (1.57)$$

Vėl gavome teiginį, kad stabilių skaitinių metodų sprendinio tikslumo eilė sutampa su šių metodų aproksimacijos tikslumo eile.

### 1.3.2. Stabilumo kriterijus uždaviniui su tiesiniu šaltiniu

Šiame poskyryje patikslinsime stabilumo apibrėžimą, kad jį galėtume naudoti ir tais atvejais, kai  $T$  yra bet koks skaičius. Analizę pradėsime nuo paprasčiausio modelinio uždavinio – vienos diferencialinės lygties su pastoviuoju koeficientu:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\lambda u, & \lambda \geq 0, \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (1.58)$$

Šio uždavinio sprendinys yra  $u(t) = e^{-\lambda t}$ . Nurodysime dvi svarbias savybes, kurias naudosime apibrėždami skaitinio sprendinio stabilumą:

1. Funkcija  $u(t)$  yra nedidėjanti

$$u(t_{n+1}) = e^{-\lambda \tau} u(t_n) \leq u(t_n);$$

2. Funkcija yra aprėžtoji  $u(t) \leq 1$ .

Spręskime modelinį uždavinį daugiažingsniu metodu, tada gausime lygtį

$$\sum_{k=0}^m (a_k + \tau \lambda b_k) y^{n-k} = 0. \quad (1.59)$$

Remiantis stabilumo apibrėžimu, daugiažingsnis skirtumų metodas yra stabilus, jei (1.59) skirtumų lygties sprendinys yra aprėžtas. Skirtingai nuo šaknų kriterijaus, dabar schemos stabilumas priklauso ne tik nuo koeficientų  $a_k$ , bet ir nuo koeficientų  $b_k$ .

Bendrajį sprendinį išreiškiame atskirųjų sprendinių  $y(t_n) = q^n$  tiesine kombinacija. Ieškodami atskirųjų sprendinių sprendžiame charakteristinę lygtį

$$\sum_{k=0}^m (a_k + \tau \lambda b_k) q^{m-k} = 0. \quad (1.60)$$

Baigtinių skirtumų schema yra *stabili*, kai jos charakteristinės lygties visų šaknų moduliai yra ne didesni už vienetą, o tarp šaknų, kurių modulis lygus vienetui, nėra kartotinių.

Ištirkime dviejų baigtinių skirtumų metodų stabilumą. Pirmoji schema yra simetrinis Eulerio metodas

$$\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau} = \frac{f_n + f_{n-1}}{2},$$

antroji schema – dvižingsnis išreikštinis metodas

$$\frac{y^n - y^{n-2}}{2\tau} = f_{n-1}. \quad (1.61)$$

Pažymėtina, kad abiejų schemų aproksimacijos tikslumo eilė yra antroji, jos abi tenkina pirmąjį šaknų kriterijų.

Simetrinio Eulerio metodo charakteristinė lygtis yra

$$\left(1 + \frac{\tau}{2}\lambda\right)q - \left(1 - \frac{\tau}{2}\lambda\right) = 0.$$

Todėl vienintelė šios lygties šaknis

$$q = \frac{1 - 0,5\lambda\tau}{1 + 0,5\lambda\tau}$$

nesąlygiškai tenkina stabilumo reikalavimą

$$|q| \leq 1, \quad \text{kai } \lambda > 0.$$

Dvižingsnio išreikštinio metodo charakteristinė lygtis yra

$$q^2 + 2\tau\lambda q - 1 = 0.$$

Apskaičiuojame abu šios lygties sprendinius

$$q_1 = -\tau\lambda + \sqrt{1 + (\tau\lambda)^2}, \quad q_2 = -\tau\lambda - \sqrt{1 + (\tau\lambda)^2}.$$

Atlikę nesudėtingus skaičiavimus, įrodome, kad  $|q_1| < 1$ , kai  $\lambda > 0$ . Tačiau bet kurioms parametro  $\tau$  reikšmėms galioja nelygybė  $|q_2| > 1$ , jei tik  $\lambda > 0$ . Todėl dvižingsis išreikštinis metodas yra *nesąlygiškai nestabilusis* naujojo stabilumo apibrėžimo atžvilgiu, nes gautasis diskretusis sprendinys yra neaprežta iš viršaus funkcija.

**1.9 pavyzdys. Dvižingsnio išreikštinio skirtumų metodo nestabilumo analizė.** Spręskime (1.58) modelinį uždavinį, kai  $\lambda = 1$ . Papildomą pradinę sąlygą  $y^1$  apskaičiuosime išreikštiniu Eulerio metodu

$$y^1 = (1 - \tau\lambda)y^0.$$

Fiksuokime diskrečiojo žingsnio  $\tau$  reikšmę, pavyzdžiui  $\tau = 0,05$ . 1.3 lentelėje įvairiais laiko momentais pateiktos diferencialinio uždavinio sprendinio  $u$  ir diskrečiojo sprendinio  $y$  reikšmės.

1.3 lentelė. Stabilumo analizė, kai  $\tau$  fiksuotas

$t$	$u(t)$	$y(t)$
2,0	0,1354	0,1365
3,0	0,0479	0,0623
4,0	0,0183	0,0523
5,0	0,0067	0,0991
6,0	0,0025	0,2535

Iš pateiktų rezultatų matome, kad diskretusis sprendinys pradeda didėti dėl charakteristinės lygties sprendinio  $q_2$  poveikio, todėl (1.61) metodas yra nestabilus. Kita vertus dvižingsnis išreikštinis metodas tenkina pirmąjį šaknų kriterijų. Tada iš 1.6 teoremos gauname, kad diskretusis sprendinys konverguoja, kai laikas  $t$  yra fiksuotas, o parametras  $\tau$  artėja į nulį. Šį teiginį iliustruoja skaičiavimo eksperimento rezultatai, pateikti 1.4 lentelėje.

Pateiksime paprastą šio pavyzdžio rezultatų paaiškinimą. Pasinaudoję funkcijų  $q_1$  ir  $q_2$  Teiloro skleidiniais, nesunkiai gauname, kad yra teisinga tokia lygybė:

$$y(t) = e^{-\lambda t} + C_1\tau^2 + C_2\tau^2 G_2(t),$$

1.4 lentelė. Diskrečiojo sprendinio konvergavimas, kai  $t = 6$ 

$\tau$	$E(\tau)$	$E(2\tau)/E(\tau)$
0,0500	0,2510	3,948
0,0250	0,0630	3,987
0,0125	0,0158	3,997
0,0062	0,0039	3,999

čia konstanta  $C_1$  nepriklauso nuo  $t$ , o funkcija  $G_2(t)$  aprašo charakteristinės lygties sprendinio  $q_2$  poveikį. Galima įrodyti, kad

$$|G_2(t)| \approx e^{\lambda t}.$$

Todėl norėdami, kad diskrečiojo sprendinio paklaida intervale  $[0, T]$  būtų mažesnė už  $\varepsilon$ , turime naudoti diskretųjį žingsnį

$$\tau \leq \left( \frac{\varepsilon e^{-\lambda T}}{C_2} \right)^{0,5}.$$

Šis apribojimas dideliems  $T$  yra toks stiprus, jog praktiškai dvižingsnio išreikštinio skirtumų metodo taikyti negalime.

### Stabilumo srities nustatymas

Naudojantis stabilumo apibrėžimu reikia rasti visas (1.60) charakteristinės lygties šaknis, o paskui ištirti, kada jos tenkina stabilumo sąlygą. Šią analizę galima suprastinti.

Aibę tokių  $\lambda$  reikšmių, kada diskretusis metodas yra stabilus, vadinsime *stabilumo sritimi*. Stabilumo srities kontūrinius taškus randame iš charakteristinės lygties, joje įrašę reikšmes  $q = 1$  ir  $q = -1$ .

**1.10 pavyzdys. Keturžingsnio Adamso ir Bashfortho metodo stabilumo analizė.** Nagrinėkime keturžingsnį Adamso ir Bashfortho metodą, sukonstruotą 1.2 pavyzdyje:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{24}(55F_{n-1} - 59F_{n-2} + 37F_{n-3} - 9F_{n-4}).$$

Šio metodo charakteristinė lygtis yra tokia

$$q^4 - \left(1 - \frac{55}{24}\mu\right)q^3 - \frac{59}{24}\mu q^2 + \frac{37}{24}\mu q - \frac{9}{24}\mu = 0,$$

čia pažymėjome  $\mu = \tau\lambda$ . Iš lygties išreiškiame  $\mu$ :

$$\mu = \frac{24(q^3 - q^4)}{55q^3 - 59q^2 + 37q - 9}.$$

Tada stabilumo srities kontūro taškai yra

$$\mu(1) = 0, \quad \mu(-1) = 0, 3.$$

Kadangi  $\mu'(-1) < 0$ , tai keturžingsnio Adamso ir Bashfortho metodo stabilumo sritis yra atvirasis intervalas  $(0, 0, 3)$ , taigi metodas yra stabilusis, jei  $\tau\lambda < 0, 3$ .

Nagrinėdami šį pavyzdį gavome, kad baigtinių skirtumų schema yra sąlygiškai stabilioji ir skaičiuojant reikia naudoti pakankamai mažą parametą  $\tau \leq \tau_0$ . Tačiau šį kartą  $\tau_0$  jau nepriklauso nuo laiko momento  $T$ .

1.5 lentelėje pateikta apibendrinta informacija apie Adamso ir Bashfortho metodą, kuri užrašysime tokia forma:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{\gamma} (b_1 F_{n-1} + b_2 F_{n-2} + \dots + b_m F_{n-m}).$$

Šis metodas yra stabilusis, kai  $\tau\lambda < \nu$ , o  $p$  pažymėjome metodo aproksimacijos tikslumo eilę.

1.5 lentelė. Adamso ir Bashfortho metodas

$m$	$\gamma$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$p$	$\nu$
1	1	1					1	2,000
2	2	3	-1				2	1,000
3	12	23	-16	5			3	0,545
4	24	55	-59	37	-9		4	0,300
5	720	1901	-2774	2616	-1274	251	5	0.163

1.6 lentelėje tokia pati informacija pateikta apie Adamso ir Moultono metodą:

$$\frac{Y^n - Y^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{\gamma} (b_0 F_n + b_1 F_{n-1} + \dots + b_m F_{n-m}).$$

1.6 lentelė. Adamso ir Moultono metodas

$m$	$\gamma$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$p$	$\nu$
1	2	1	1				2	$\infty$
2	12	5	8	-1			3	6,000
3	24	9	19	-5	1		4	3,000
4	720	251	646	-264	106	-19	5	1,837

Matome, kad neišreikštinio Adamso metodo stabilumo intervalas yra maždaug dešimt kartų didesnis už atitinkamo tikslumo išreikštinio Adamso metodo stabilumo intervalą.

Panašiai tiriamas ir Rungės ir Kuto metodo stabilumas. Apsiribosime tik vienu pavyzdžiu.

**1.11 pavyzdys. Tripakopio Rungės ir Kuto metodo stabilumo analizė.** Modelinį uždavinį spręskime (1.22) tripakopiu Rungės ir Kuto metodu:

$$\begin{cases} K_1 = -\lambda y^n, \\ K_2 = -\lambda(1 - 0,5\mu)y^n, \\ K_3 = -\lambda(1 - \mu + \mu^2)y^n, \\ y^{n+1} \equiv 1 + \frac{\tau}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) = \left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^3}{6}\right)y^n, \end{cases}$$

čia vėl pažymėjome  $\mu = \tau\lambda$ . Charakteristinė lygtis yra tiesinė ir jos vienintelis sprendinys yra

$$q = 1 - \mu + \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^3}{6}.$$

Tripakopis Rungės ir Kuto metodas yra stabilus, jei išpildyta nelygybė  $|q| < 1$ , kuri yra ekvivalenti nelygybėms

$$\begin{cases} 1 - \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{6} < 1, \\ 1 - \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{6} > -1. \end{cases}$$

Pertvarkykime pirmąją sistemos nelygybę

$$\mu(\mu^2 - 3\mu + 6) > 0 \Rightarrow \mu\left(\left(\mu - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right) > 0.$$



Kadangi  $\mu > 0$ , tai ši nelygybė visada teisinga. Spręsdami skaitiškai antrąją nelygybę

$$\frac{1}{6}\mu^3 - \frac{1}{2}\mu^2 + \mu - 2 > 0,$$

gausime, kad tripakopis Rungės ir Kuto metodas yra stabilusis, kai

$$\tau\lambda < 2,513.$$

### 1.3.3. $A(\alpha)$ stabilumas

Šiame poskyryje nagrinėsime PDL sistemos pradinį uždavinį

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = AU, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

čia  $A$  yra  $M \times M$  dydžio matrica. Tegul  $\lambda_j$  yra matricos  $A$  tikrinė reikšmė, o  $W_j$  yra šią reikšmę atitinkantis tikrinis vektorius:

$$AW_j = \lambda_j W_j.$$

Tarsime, kad vektorių sistema  $\{W_1, W_2, \dots, W_M\}$  yra tiesiškai nepriklausoma ir pilnoji, tada egzistuoja tokia ortogonalioji matrica  $Q$ , kad

$$A = Q\tilde{A}Q^{-1},$$

čia  $\tilde{A}$  yra įstrižaininė matrica ir jos įstrižainės elementai sutampa su matricos  $A$  tikrinėmis reikšmėmis. Kadangi matrica  $\tilde{A}$  yra įstrižaininė, tai lygtys atsiskiria:

$$\begin{cases} \frac{dv_j}{dt} = \lambda_j v_j, & j = 1, 2, \dots, M, \\ v_j(0) = \sum_{k=1}^M q_{jk} u_k^0. \end{cases}$$

Todėl nagrinėkime modelinį uždavinį:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.62)$$

čia  $\lambda$  yra kompleksinis skaičius. Šio uždavinio sprendinys  $u = u_0 e^{\lambda t}$  yra aprėžtoji funkcija, jei  $\lambda$  realioji dalis yra neneigiamasis skaičius:

$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0.$$

Todėl diferencialinio uždavinio stabilumo sritį sudaro kompleksinės plokštumos kairioji pusplokštumė

$$\mathbb{C}^- = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq 0\}.$$

(1.62) modelinį uždavinį spręsimė daugiažingsniu skirtumų metodu:

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) y^{n-k} = 0, \quad \mu = \tau \lambda.$$

Šio skaitinio metodo charakteristinė lygtis yra

$$\sum_{k=0}^m (a_k - \mu b_k) q^{n-k} = 0.$$

### A stabilumas

Daugiažingsnio skirtumų metodo *stabilumo sritimi* vadiname aibę kompleksinės plokštumos taškų  $\mu$ , kuriuose šis metodas yra stabilus, tai yra visų charakteristinės lygties šaknų moduliai yra ne didesni už vienetą.

Baigtinių skirtumų metodas vadinamas *A stabiliuoju*, jeigu jo stabilumo sričiai

$$A = \{\mu \in \mathbb{C} : |q(\mu)| \leq 1\}$$

priklauso (1.62) modelinio diferencialinio uždavinio stabilumo sritis  $\mathbb{C}^-$ , tai yra visa pusplokštumė  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ . Taigi *A* stabilusis metodas yra nesąlygiškai stabilus.

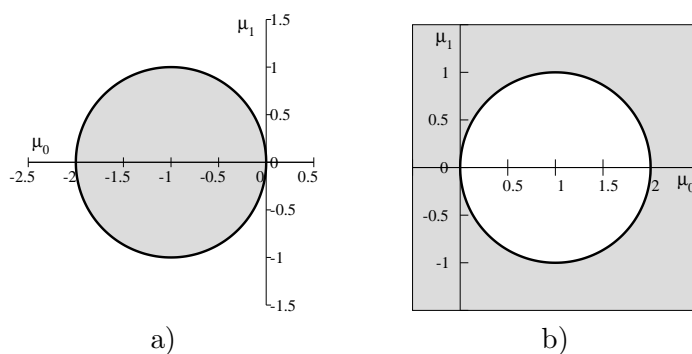
**Eulerio metodo stabilumo sritis.** Ištirsime Eulerio metodo stabilumą. Pirmiausia (1.62) modelinį uždavinį spręsimė išreikštiniu Eulerio metodu

$$y^{n+1} = (1 + \mu)y^n, \quad \mu = \tau \lambda.$$

Stabilumo sąlyga  $|1 + \mu| \leq 1$  kompleksinėje plokštumoje apibrėžia stabilumo sritį

$$(\mu_0 + 1)^2 + \mu_1^2 \leq 1,$$

čia  $\mu_0$  ir  $\mu_1$  yra atitinkamai realioji ir menamoji kompleksinio skaičiaus  $\mu$  dalys. Išreikštinio Eulerio metodo stabilumo sritis pavaizduota 1.2 pav. a dalyje. Matome, kad išreikštinis Eulerio metodas yra tik sąlygiškai stabilus.



1.2 pav. Stabilumo sritis (pilka spalva): a) išreikštinio Eulerio metodo, b) neišreikštinio Eulerio metodo

Dabar (1.62) modelinį uždavinį spręsimė neišreikštinu Eulerio metodu

$$y^{n+1} = \frac{1}{1 - \mu} y^n.$$

Šio metodo stabilumo sritis apibrėžiama nelygybe

$$\left| \frac{1}{1 - \mu} \right| \leq 1,$$

kurią pertvarę, gauname stabilumo sritį

$$(1 - \mu_0)^2 + \mu_1^2 \geq 1.$$

Ji pavaizduota pilka spalva 1.2 pav. b dalyje. Matome, kad neišreikštinio Eulerio metodo stabilumo sritis yra platesnė už diferencialinio uždavinio stabilumo sritį, todėl neišreikštinis Eulerio metodas yra *A stabilusis*, o kartu ir *nesąlygiškai stabilusis*.

Rasime simetrinio Eulerio metodo stabilumo sritį. Šiuo metodu spręskime modelinį uždavinį

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = \lambda \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + 0,5\mu}{1 - 0,5\mu} y^n.$$

Simetrinio Eulerio metodo stabilumo sritis apibrėžiama nelygybe

$$\left| \frac{1 + 0,5\mu}{1 - 0,5\mu} \right| \leq 1,$$

kurią išsprendę randame stabilumo sritį  $\mu_0 \leq 0$ . Taigi simetrinio Eulerio metodo stabilumo sritis sutampa su diferencialinio uždavinio stabilumo sritimi  $\mathbb{C}^-$ , todėl ir šis metodas *A stabilusis*.

Gavome, kad išreikštinis Eulerio metodas nėra *A stabilusis*, o neišreikštinis ir simetrinis Eulerio metodai yra *A stabilieji*.

*A* stabilųjų metodų klasė yra gana siaura.

**1.7 teorema.** *Tarp daugiažingsnių skirtumų metodų nėra A stabiliojo išreikštinio metodo.*

### Rungės ir Kuto metodų stabilumas

Rasime Rungės ir Kuto metodų stabilumo sritis. Šie metodai yra išreikštiniai, todėl jie negali būti *A stabilieji*. Nesunku įsitikinti, kad jei Rungės ir Kuto metodo aproksimacijos tikslumo eilė  $p$  sutampa su šio metodo pakopų skaičiumi  $m$ , tai sprendami modelinį diferencialinį uždavinį, gausime lygybę

$$y^{n+1} = R(\mu) y^n,$$

o stabilumo funkcija  $R(\mu)$  išreiškiama formule

$$R(\mu) = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \dots + \frac{\mu^m}{m!}.$$

Pasinaudoję 1.1 lentelėje pateiktais duomenimis gauname, kad lygybė  $p = m$  yra teisinga, kai  $p \leq 4$ . Tada stabilumo sritis yra apibrėžiama nelygybe  $|R(\mu)| \leq 1$ . Norint apskaičiuoti šios srities kontūrą, tenka spręsti netiesinę lygtį

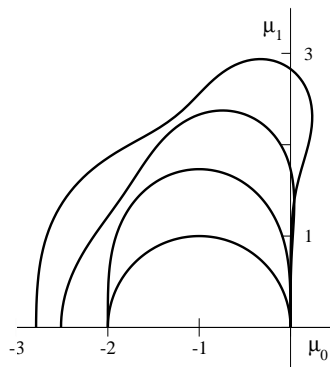
$$1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \dots + \frac{\mu^m}{m!} = e^{i\phi}, \quad 0 \leq \phi \leq m\pi.$$

1.3 pav. yra pavaizduota  $m$ -pakopių išreikštinių Rungės ir Kuto metodų stabilumo sričių teigiamoji dalis, kai  $1 \leq m \leq 4$ .

Ir neišreikštinių *A* stabilųjų metodų klasė nėra plati.

**1.8 teorema.** *Tarp tiesinių daugiažingsnių skirtumų metodų nėra A stabilųjų metodų, kurių tikslumo eilė būtų didesnė negu antroji.*

Simetrinis Eulerio metodas yra *A stabiliojo* antrosios tikslumo eilės metodo pavyzdys.



1.3 pav. Rungės ir Kuto metodų stabilumo sritys

#### 1.3.4. $A(\alpha)$ stabilieji daugiažingsniai metodai

Nagrinėjant didesnio tikslumo metodus, tenka susilpninti stabilumo reikalavimus. Daugelio taikomųjų uždavinių matricų  $A$  visos tikrinės reikšmės yra realiosios, pavyzdžiui, šia savybe pasižymi simetrinės matricos. Todėl apibrėšime dar vieną stabilumo sąvoką.

**Apibrėžimas.** Daugiažingsnis skirtumų metodas vadinamas  $A(\alpha)$  stabiliuoju, jeigu jo stabilumo sričiai priklauso aibė

$$|\arg(-\mu)| < \alpha, \quad \mu = \tau\lambda.$$

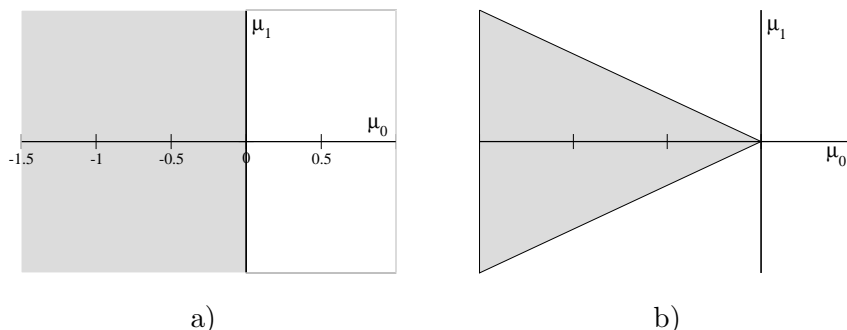
Jeigu matricos  $A$  visos tikrinės reikšmės yra realiosios ir neneigiamosios  $\lambda_j \leq 0$ , tai  $A(\alpha)$  stabilusis metodas yra nesąlygiškai stabilusis.

Pažymėtina, kad  $A(\frac{\pi}{2})$  stabilumo apibrėžimas sutampa su  $A$  stabilumo apibrėžimu.  $A$  ir  $A(\alpha)$  stabilumo sritys pavaizduotos 1.4 pav.

#### Giro metodas

Yra sukonstruoti didelės tikslumo eilės  $A(\alpha)$  stabilieji daugiažingsniai skirtumų metodai. Vienas iš dažniausiai taikomų yra *visiškai neišreikštinis metodas*

$$\frac{a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \dots + a_m Y^{n-m}}{\tau} = F(t_n, Y^n),$$

1.4 pav. Stabilumo sritys: a)  $A$  stabilumas, b)  $A(\alpha)$  stabilumas

kuris dar vadinamas *Giro* (*Gear*) metodu.

Kadangi visiškai neišreikštinis metodas yra atskiras daugiažingsnių skirtumų metodų atvejis su  $b_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , tai ir  $p$ -osios eilės aproksimacijos sąlygas randame iš (1.26) lygčių sistemos, gautos daugiažingsnio skirtumų metodo koeficientams skaičiuoti:

$$\begin{cases} a_0 = -(a_1 + \dots + a_m), \\ \sum_{k=1}^m k a_k = -1, \\ \sum_{k=1}^m k^l a_k = 0, \quad l = 2, 3, \dots, p. \end{cases} \quad (1.63)$$

Todėl didžiausia  $m$ -žingsnio Giro metodo aproksimacijos tikslumo eilė yra lygi  $m$ .

**1.12 pavyzdys. Dvižingsnis Giro metodas.** Sudarykime (1.63) tiesinių lygčių sistemą, kai  $m = 2$ :

$$\begin{cases} a_0 = -a_1 - a_2, \\ a_1 + 2a_2 = -1, \\ a_1 + 4a_2 = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, gauname dvižingsnio Giro metodo formulę

$$\frac{3Y^n - 4Y^{n-1} + Y^{n-2}}{2\tau} = F(t_n, Y^n).$$

1.7 lentelėje pateikti Giro metodo, užrašyto tokia forma

$$\frac{a_0 Y^n + a_1 Y^{n-1} + \dots + a_m Y^{n-1}}{\tau} = \gamma F(t_n, Y^n),$$

koeficientai.

1.7 lentelė. Giro metodas

$m$	$\gamma$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
2	2	3	-4	1			
3	6	11	-18	9	-2		
4	12	25	-48	36	-16	3	
5	60	137	-300	300	-200	75	-12

**Dvižingsnio Giro metodo stabilumas.** Ištirsime dvižingsnio Giro metodo stabilumą. Šio metodo charakteristinė lygtis yra

$$\left(\frac{3}{2} - \mu\right)q^2 - 2q + \frac{1}{2} = 0.$$

Stabilumo srities kontūras randamas iš sąlygos  $|q| = 1$ . Į lygtį

$$\mu = \frac{3}{2} - 2q^{-1} + \frac{1}{2}q^{-2}$$

įrašę pakeitimą  $q = e^{-i\phi}$ , išreiškiame kontūro lygtį parametriniu pavidalu

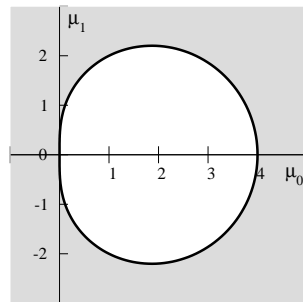
$$\mu = \frac{3}{2} - 2e^{i\phi} + \frac{1}{2}e^{2i\phi}.$$

Parametrui  $\phi$  kintant nuo 0 iki  $2\pi$ , nubrėžiamas visas stabilumo srities kontūras.

Stabilumo srities kontūrą dažnai patogiau tirti atskyrus kompleksinio dydžio  $\mu$  realiąją ir menamąją dalis. Naudosimės formule  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ . Atlikę paprastus trigonometrinius pertvarkymus, gausime kontūro lygtį:

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \phi + \frac{1}{2} \cos 2\phi\right) - i(2 \sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi) \\ &= \left(\frac{3}{2} - 2 \cos \phi + \frac{1}{2}(2 \cos^2 \phi - 1)\right) - i(2 \sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi) \\ &= (1 - \cos \phi)^2 - i(2 \sin \phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi). \end{aligned}$$

Metodo stabilumo sritis yra šio kontūro išorėje, ji pavaizduota 1.5 pav. Matome, kad dvižingsnis Giro metodas yra  $A$  stabilusis.



1.5 pav. Dvižingsnio Giro metodo stabilumo sritis (pilka spalva)



