1.2. Skaitinių algoritmų konvergavimo analizė

Išskirsime svarbiausius diskrečiojo sprendinio konvergavimo analizės etapus. Juos vėliau taikysime ir ir kitiems uždaviniams.

1.2.1. Eulerio metodo tikslumo analizė

Nagrinėdami Eulerio metodo konvergavimą galime apžvelgti visus svarbiausius bendrosios analizės žingsnius ir išvengiame pradiniame etape sudėtingesnių techninių pertvarkymų ir įrodymų.

Aproksimavimo paklaidos įvertinimas

Sudarydami Eulerio metodą, PDL sistemą pakeitėme diskrečiuoju uždaviniu. Dabar įvesime matą, leidžiantį įvertinti tokio pakeitimo tikslumą. Pažymėkime Eulerio metodo operatorių

$$T_n V := \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau_{n+1}} - \sigma F\big(t_{n+1}, V^{n+1}\big) - (1-\sigma) F\big(t_n, V^n\big)\,.$$

Imdami parametrą $\sigma = 0$ gauname išreikštinį Eulerio metodą, pasirinkdami $\sigma = 1$ – neišreikštinį, o $\sigma = \frac{1}{2}$ – simetrinį Eulerio metodus. Tada Eulerio metodo lygtį galime užrašyti šitaip

$$T_n Y = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1\,. \tag{1.36}$$

Dabar imkime vektorių U^n, aprašantį diferencialinio uždavinio (1.1) sprendinį diskrečiojo tinklo mazguose, tai yra $U^n = \big(u_1(t_n), u_2(t_n), \ldots, u_m(t_n)\big)^T$. Apskaičiuokime, į ką šį vektorių atvaizduoja operatorius T_n:

$$\Psi^n \equiv T_n U^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau_{n+1}} - \sigma F\big(t_{n+1}, U^{n+1}\big) - (1-\sigma) F\big(t_n, U^n\big)\,. \tag{1.37}$$

Vektorius Ψ^n yra vadinamas (1.36) baigtinių skirtumų schemos *aproksimavimo paklaida* arba *netiktimi.* Sakysime, kad baigtinių skirtumų metodas *aproksimuoja* PDL sistemą, jei

$$||\Psi^n|| \to 0, \quad \text{kai} \quad \tau \to 0\,,$$

čia pažymėjome $\tau = \max_n \tau_n$. Metodo *aproksimacijos eilė* yra p-toji, jeigu

$$||\Psi^n|| \leqslant C\tau^p\,.$$

1.6 pavyzdys. Eulerio metodo aproksimavimo paklaida. Pasirinkime tokią aproksimavimo paklaidos normą:

$$\|\Psi^n\| = \max_{i \le i \le M} |\psi_i^n|\,. \tag{1.38}$$

Ištirsime išreikštinį Eulerio metodą, kai parametras $\sigma = 0$. Nagrinėkime i-tąją (1.37) lygybės komponentę:

$$\psi_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_{n+1}} - f_i(t_n, U^n)\,. \tag{1.39}$$

Išskleidę funkciją u_i^{n+1} Teiloro eilute taško $t = t_n$ atžvilgiu

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \tau_{n+1} u_i'(t_n) + \frac{\tau_{n+1}^2}{2} u_i''(t_n + \theta\tau_{n+1}), \quad 0 < \theta < 1\,,$$

įrašę šį skleidinį į (1.39) lygybę bei pasinaudoję (1.1) diferencialine lygtimi, gausime aproksimavimo paklaidos išraišką

$$\psi_i^n \equiv u_i'(t_n) - f_i(t_n, U^n) + \frac{\tau_{n+1}}{2} u_i''(t_n + \theta\tau_{n+1}) = \frac{\tau_{n+1}}{2} u''(\tilde{t}).$$

Jeigu diferencialinių lygčių sistemos pradinio uždavinio sprendinio antroji išvestinė yra aprėžta funkcija

$$|u_i''(t)| \le C_2, \quad \text{kai } t \in [0, T]\,, \tag{1.40}$$

tai išreikštinio Eulerio metodo aproksimavimo paklaida įvertinama tokia nelygybe:

$$\|\Psi^n\| \le C_A \tau_{n+1}\,, \tag{1.41}$$

čia pažymėjome $C_A = 0,5\ C_2$. Taigi išreikštinio Eulerio metodo aproksimacija yra pirmosios tikslumo eilės.

Nesunku nurodyti pakankamas sąlygas, kad būtų išpildytos (1.40) nelygybės. Išdiferencijavę (1.1) lygtį gausime lygybę

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial f_i(t,U)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f_i(t,U)}{\partial u_j} f_j(t,U)\,.$$

Todėl (1.40) įverčiai yra teisingi, jei (1.1) sistemos dešinioji pusė tenkina nelygybes

$$\begin{aligned} &\|F(t,U)\| \le M_0, \quad \|\frac{\partial F(t,U)}{\partial t}\| \le M_1\,, \\ &\|\frac{\partial F(t,U)}{\partial u_j}\| \le M_1, \quad j = 1, 2, \ldots, M\,. \end{aligned}$$

Panašiai neišreikštinio Eulerio metodo aproksimavimo paklaida randama iš (1.37) lygybės, kai $\sigma = 1$:

$$\psi_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_{n+1}} - f_i(t_{n+1}, U^{n+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, M\,.$$

Jei išpildyta (1.40) nelygybė, tai neišreikštinio Eulerio metodo aproksimacija taip pat yra pirmosios tikslumo eilės, tai yra teisinga (1.41) nelygybė.

Kitame pavyzdyje ištirsime simetrinio Eulerio metodo aproksimacijos tikslumą.

1.7 pavyzdys. Simetrinio Eulerio metodo aproksimacijos paklaida. Nagrinėkime i-tąją (1.37) lygybės komponentę, kai parametras $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$\psi_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_{n+1}} - \frac{1}{2}\big(f_i(t_n, U^n) + f_i(t_{n+1}, U^{n+1})\big)\,. \tag{1.42}$$

Funkciją u_i^{n+1} išskleidžiame Teiloro eilute, o jos liekamąjį narį užrašome integraline forma

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = u_i^n + \tau_{n+1} u_i'(t_n) + \frac{\tau_{n+1}^2}{2} u_i''(t_n) \\ + \frac{\tau_{n+1}^3}{2} \int\limits_0^1 (1-s)^2\; u_i'''(t_n + s\tau_{n+1})\; ds\,. \end{aligned}$$

Naudodamiesi (1.1) diferencialine lygtimi aproksimavimo paklaidos išraiškoje funkcijas $f_i(t_n, U^n)$, $f_i(t_{n+1}, U^{n+1})$ pakeičiame sprendinio išvestinėmis $u'(t_n)$, $u'(t_{n+1})$, o funkciją $u'(t_{n+1})$ išskleidžiame Teiloro eilute

$$u_i'(t_{n+1}) = u_i'(t_n) + \tau_{n+1} u_i''(t_n) + \tau_{n+1}^2 \int\limits_0^1 (1-s) u_i'''(t_n + s\tau_{n+1})\; ds\,.$$

Įrašę gautuosius skleidinius į (1.42) lygybę, gauname aproksimavimo paklaidos išraišką

$$
\begin{aligned}
\psi_i^n &= \tau_{n+1}^2 \int\limits_0^1 \Big(\frac{(1-s)^2}{2} - (1-s)\Big)\, u_i'''(t_n + s\tau_{n+1})\, ds \\
&= -\frac{\tau_{n+1}^2}{3} u_i'''(\tilde{t})\,.
\end{aligned}
$$

Taigi, jei PDL sistemos pradinio uždavinio sprendinio trečioji išvestinė yra aprėžta funkcija

$$
|u_i'''(t)| \le C_3, \quad \text{kai } t \in [0, T],
$$

tai simetrinio Eulerio metodo aproksimacija yra antrosios tikslumo eilės:

$$
\|\Psi^n\| \le C_A \tau_{n+1}^2\,.
$$

Eulerio metodo stabilumas ir konvergavimas

Užrašysime uždavinį, kurį tenkina Eulerio metodo *globalioji paklaida*

$$
Z^n = Y^n - U^n\,.
$$

Įrašę $Y^n = U^n + Z^n$ į Eulerio metodo lygtį, remdamiesi aproksimavimo paklaidos apibrėžimu ir išskleidę funkcijas $F(t_{n+1}, U^{n+1} + Z^{n+1})$, $F(t_n, U^n + Z^n)$ Teiloro eilute, gausime lygtį

$$
\big(I - \sigma\tau_{n+1} J_{n+1}(\tilde{Y})\big) Z^{n+1} = \big(I + (1-\sigma)\tau_{n+1} J_n(\tilde{Y})\big) Z^n - \tau_{n+1}\Psi^n\,, \quad (1.43)
$$

čia $J_{n+1}(\tilde{Y})$ yra vektoriaus F Jakobio matrica

$$
J_{n+1}(\tilde{Y}) \equiv \left(\frac{\partial f_i(t_{n+1}, \tilde{Y})}{\partial u_j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_M} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_M}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_M}{\partial u_2} & \dots & \dfrac{\partial f_M}{\partial u_M} \end{pmatrix},
$$

$$
\tilde{y}_k = u_k^{n+1} + \theta_{ijk}^n z_k^{n+1}, \ |\theta_{ijk}^n| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, M\,.
$$

Kadangi pradinė diferencialinio uždavinio sąlyga sutampa su Eulerio metodo pradine sąlyga, tai

$$
Z^0 = 0\,.
$$

Iš (1.43) lygties matome, kad globalioji paklaida Z^{n+1} priklauso nuo dviejų dydžių: ji gali padidėti dėl paklaidos Z^n, sukauptos per ankstesnius n integravimo žingsnių, ir dėl $(n+1)$-ajame integravimo žingsnyje daromos *lokaliosios paklaidos* $\tau_{n+1}\Psi^n$.

Tolesnis mūsų tikslas yra susieti Eulerio metodo sprendinio globaliosios paklaidos įvertį su šio metodo aproksimacijos tikslumu. Tokio tipo įverčių įrodymas ir sudaro konvergavimo analizės esmę.

Nagrinėsime diskrečiųjų tinklų seką ω_τ, kai $\tau \to 0$, čia pažymėjome

$$\tau = \max_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \tau_k \, .$$

Sakysime, kad baigtinių skirtumų metodu *konverguojama taške* t, jei

$$\|Y^n - U(t_n)\| \to 0, \quad \text{kai } \tau \to 0 \, ,$$

čia $n = n(\tau), t_n = t$. Šiuo metodu *konverguojama visame intervale* $[0, T]$, jei konverguojama kiekviename šio intervalo taške. Baigtinių skirtumų metodo *tikslumo eilė* yra p-oji, jei išpildyta nelygybė

$$\|Y^n - U(t_n)\| \le C\tau^p, \quad n = 1, 2, \ldots, N \, .$$

Apibrėšime dar vieną svarbią baigtinių skirtumų schemų savybę, kuri kartu su aproksimavimo paklaida yra pakankama, kad įrodytume diskrečiojo sprendinio konvergavimą. Sakysime, kad baigtinių skirtumų metodas yra *stabilus*, jei šio metodo sprendinio globalioji paklaida Z^{n+1} tenkina tokią nelygybę:

$$\|Z^{n+1}\| \le (1 + C_1\tau) \; \|Z^n\| + C_2\tau\|\Psi^n\| \, . \tag{1.44}$$

Tada yra teisinga tokia teorema.

1.3 teorema. *Tegul baigtinių skirtumų metodo aproksimacijos tikslumo eilė yra p-oji:*

$$\|\Psi^n\| \le C_A\tau^p, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \, . \tag{1.45}$$

Jeigu baigtinių skirtumų metodas yra stabilus, tai diskretusis sprendinys Y^n konverguoja, o metodo tikslumo eilė irgi yra p-oji, tai yra:

$$\|Y^n - U(t_n)\| \le C t_n e^{C_1 t_{n-1}} \tau^p, \quad n = 1, 2, \ldots, N \, . \tag{1.46}$$

Įrodymas. Rekurentiškai taikydami (1.44) stabilumo įvertį gauname tokias nelygybes:

$$\begin{aligned}\|Z^n\| &\leq (1+C_1\tau_n)\|Z^{n-1}\| + C_2\tau_n\|\Psi^{n-1}\| \\ &\leq (1+C_1\tau)^2\ \|Z^{n-2}\| + C_2\tau \sum_{j=n-2}^{n-1}(1+C_1\tau)^{n-1-j}\ \|\Psi^j\| \\ &\leq (1+C_1\tau)^n\ \|Z^0\| + C_2\tau\sum_{j=0}^{n-1}(1+C_1\tau)^{n-1-j}\ \|\Psi^j\|\,.\end{aligned}$$

Kadangi $\|Z^0\| = 0$, tai kai ką pertvarkę gauname, kad

$$\begin{aligned}\|Z^n\| &\leq C_2\tau n(1+C_1\tau)^{n-1}\max_{0\leq j\leq n-1}\|\Psi^j\| \\ &\leq C_2 t_n e^{C_1 t_{n-1}}\max_{0\leq j\leq n-1}\|\Psi^j\|\,.\end{aligned}$$

Atsižvelgę į aproksimavimo paklaidos (1.45) įvertį, įrodome norimą globaliosios paklaidos įvertį. □

1.8 pavyzdys. Eulerio metodo stabilumo įvertis. Gausime paprasčiausią Eulerio metodo stabilumo įvertį. Naudosime tokią matricos $A = (a_{ij})$ normą:

$$\|A\| = \max_{1\leq i\leq M}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}|\,, \tag{1.47}$$

kuri yra suderinta su vektoriaus norma, apibrėžta (1.38) formule.

Tarkime, kad PDL pradinio uždavinio (1.1) funkcija F tenkina įverčius

$$\Big|\frac{\partial f_i(t,V)}{\partial v_j}\Big| \leq M_1\,, \quad i = 1,2,\ldots,M\,. \tag{1.48}$$

Iš (1.43) lygties įvertiname globaliąją Eulerio metodo paklaidą

$$\begin{aligned}&\Big(1-\sigma\tau_{n+1}\|J_{n+1}(\tilde{Y}^{n+1})\|\Big)\|Z^{n+1}\| \qquad\qquad (1.49)\\ &\qquad\leqslant \Big(1+(1-\sigma)\tau_{n+1}\|J_n(\tilde{Y}^n)\|\Big)\|Z^n\| + \tau_{n+1}\|\Psi^n\|\,.\end{aligned}$$

Iš (1.47) ir (1.48) išeina, jog Jakobio matricos norma yra aprėžta iš viršaus

$$\|J_n(\tilde{Y}^n)\| \leqslant M\ M_1\,.$$

Todėl imdami $\sigma = 0$ gauname tokį išreikštinio Eulerio metodo stabilumo įvertį:

$$\|Z^{n+1}\| \leqslant \big(1 + M\ M_1\tau\big)\|Z^n\| + \tau\|\Psi^n\|\,.$$

Jei $\sigma > 0$, tai yra nagrinėjame neišreikštinį arba simetrinį Eulerio metodus, tai papildomai reikalausime, kad diskretusis parametras τ_{n+1} būtų pakankamai mažas:

$$\tau_{n+1} \leqslant \frac{1}{2\sigma M_1\ M}\,,$$

tada iš (1.49) nelygybės įrodome stabilumo įvertį

$$\|Z^{n+1}\| \leq \big(1 + 2M\ M_1\tau\big)\|Z^n\| + +2\tau\|\Psi^n\|\,.$$

Dabar naudodamiesi 1.3 teorema ir pavyzdžiuose įrodytais aproksimavimo paklaidos ir stabilumo įverčiais, gauname, kad Eulerio metodo sprendinys konverguoja į paprastųjų diferencialinių lygčių sistemos pradinio uždavinio sprendinį, be to, išreikštinio ir neišreikštinio Eulerio metodų tikslumo eilė yra pirmoji, o simetrinio Eulerio metodo tikslumo eilė yra antroji.

1.2.2. Rungės ir Kuto metodo konvergavimo analizė

Diferencialinį uždavinį (1.1) aproksimuokime Rungės ir Kuto metodu

$$\begin{cases} \dfrac{Y^{n+1} - Y^n}{\tau_{n+1}} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i K_i(Y)\,, \\ K_1(Y) = F(t_n, Y^n)\,, \\ K_i(Y) = F\Big(t_n + a_i\tau_{n+1}, Y^n + \tau_{n+1}\sum\limits_{j=1}^{i-1} b_{ij}K_j(Y)\Big), \quad i = 2, \dots, m\,. \end{cases}$$

Pažymėkime diskrečiojo sprendinio paklaidą $Z^n = Y^n - U^n$, čia U^n yra PDL pradinio uždavinio sprendinys. Remdamiesi bendrąja baigtinių skirtumų metodo konvergavimo analizės schema tirsime uždavinį, kurį tenkina paklaidų funkcija Z^n:

$$\begin{cases} \dfrac{Z^{n+1} - Z^n}{\tau_{n+1}} - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i\big(K_i(Y) - K_i(U)\big) = -\Psi^n\,, \\ Z^0 = 0\,, \end{cases} \tag{1.50}$$

čia Ψ^n yra Rungės ir Kuto metodo aproksimavimo paklaida

$$\Psi^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau_{n+1}} - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i K_i(U)\,.$$

Parinkdami Rungės ir Kuto metodo koeficientus įrodėme, kad

$$\|\Psi^n\| \leqslant C_A \tau^p, \quad p = p(m)\,.$$

Norėdami pasinaudoti 1.3 teoremos rezultatu apie baigtinių skirtumų metodo konvergavimą, turime įrodyti, kad (1.50) uždavinio sprendinys tenkina stabilumo nelygybę (1.44):

$$\|Z^{n+1}\| \leqslant (1 + C_1\tau_{n+1})\|Z^n\| + C_2\tau_{n+1}\|\Psi^n\|\,.$$

Vektoriaus normą apibrėžkime (1.38) lygybe:

$$\|Z\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant M} |z_i|\,.$$

Tarkime, kad funkcija $F(t, U)$ tenkina Lipšico sąlygą

$$\|F(t, U_1) - F(t, U_2)\| \leqslant L\|U_1 - U_2\|\,.$$

Tolesnis mūsų tikslas yra (1.50) lygtyje įvertinti narį

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \big(K_i(Y) - K_i(U)\big)\,.$$

Remdamiesi funkcijų $K_i(Y)$ apibrėžimu ir Lipšico sąlyga įvertiname

$$\begin{aligned} \|K_i(Y) - K_i(U)\| \leqslant L\big(&\|Y^n - U^n\| \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} \tau_{n+1}|b_{ij}|\ \|K_j(Y) - K_j(U)\|\big), \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Teigiame, kad $\sum_{j=1}^{0} = 0$. Norėdami supaprastinti tolesnį dėstymą, pažymėkime

$$\begin{aligned} &r_i = \|K_i(y) - K_i(u)\|, \quad b = \max_{i,j} |b_{ij}|\,, \\ &g = L\|Y^n - U^n\| \equiv L\|Z^n\|\,, \quad \tau = \max_n \tau_n \end{aligned}$$

ir perrašykime (1.51) nelygybes taip:

$$r_i \leqslant Lb\sum_{j=1}^{i-1} \tau r_j + g, \quad i = 1, 2, \dots, m\,. \tag{1.52}$$

Tokio tipo rekurenčiosios nelygybės dažnai pasitaiko nagrinėjant diferencialinių lygčių skaitinius sprendimo metodus, todėl įrodysime svarbų teiginį apie dydžių r_i įverčius.

1.1 lema. (Diskrečioji Gronvalo (Gronwall) lema) (1.52) *nelygybių sistemos sprendiniui galioja įvertis*

$$r_i \leqslant \rho^{i-1} g, \quad \rho = 1 + Lb\tau, \ \ i = 1, 2, \dots, m\,. \tag{1.53}$$

Įrodymas. Remsimės matematinės indukcijos principu. Kai $i = 1$, įrodomasis įvertis

$$r_1 \leqslant \rho^0 g = g$$

yra teisingas. Tarkime, kad jis teisingas, kai $i = 1, 2, \dots, k < m$. Įrodysime, kad (1.53) nelygybė galioja ir kai $i = k + 1$. Remdamiesi (1.52) nelygybe ir indukcine prielaida gauname, kad

$$\begin{aligned} r_{k+1} &\leqslant Lb\tau \sum_{j=1}^{k} r_j + g \leqslant \big(Lb\tau \sum_{j=1}^{k} \rho^{j-1} + 1\big) g \\ &= \big(Lb\tau \frac{\rho^k - 1}{\rho - 1} + 1\big) g = \rho^k g\,. \end{aligned}$$

Lema įrodyta. □

Dabar jau galime įvertinti (1.50) lygties narį V:

$$\begin{aligned} \|V\| &\leqslant \sum_{i=1}^{m} |\sigma_i| r_i \leqslant \sigma g \sum_{i=1}^{m} \rho^{i-1} \leqslant \sigma g m \rho^{m-1} \\ &= \sigma L m (1 + Lb\tau)^{m-1} \|Z_n\|\,, \end{aligned}$$

čia pažymėjome $\sigma = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} |\sigma_i|$. Iš (1.50) paklaidų lygties ir funkcijos V įverčio gauname (1.44) stabilumo nelygybę, kai $\tau \leqslant \tau_0$:

$$\|Z^{n+1}\| \leqslant \big(1 + \sigma L m (1 + Lb\tau_0)^{m-1} \tau_{n+1}\big) \|Z^n\| + \tau_{n+1} \|\Psi^n\|\,.$$

Tada, naudodamiesi 1.3 teorema, įrodome Rungės ir Kuto metodo sprendinio konvergavimą.

1.4 teorema. *Jei funkcija $F(t, U)$ tenkina Lipšico sąlygą, o Ψ^n yra Rungės ir Kuto metodo aproksimavimo paklaida, tai diskrečiojo sprendinio globaliajai paklaidai galioja įvertis*

$$\|Y^n - U^n\| \leqslant t_n e^{Ct_{n-1}} \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \|\Psi^j\|,$$

čia $C = \sigma Lm(1 + Lb\tau_0)^{m-1}, \;\; b = \max\limits_{i,j} |b_{ij}|$.

Kaip ir Eulerio metodo atveju galime padaryti išvadą, kad Rungės ir Kuto metodo sprendinio tikslumo eilė yra lygi aproksimavimo paklaidos eilei.