3.2. Hiperbolinio tipo diskrečiųjų algoritmų stabilumas

Panagrinėsime sąlygą, kuri yra *būtina*, kad baigtinių skirtumų schemos sprendinys konverguotų į diferencialinio uždavinio sprendinį. Imkime paprasčiausią pernešimo lygtį ir pradinę sąlygą:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathcal{R}, \ \ t > 0\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

Šio uždavinio sprendinys taške (x,t) priklauso nuo pradinės sąlygos reikšmės taške $x_0 = x - ct$:

$$u(x,t) = u_0(x - ct)\,,$$

t. y. pradinė sąlyga yra pernešama be pokyčių baigtiniu greičiu c charakteristikos $x = x_0 + ct$ kryptimi.

Tašką x_0 vadiname (3.15) uždavinio sprendinio taške (x,t) *priklausomumo sritimi* $D(x,t)$. Skaliarinio diferencialinio uždavinio atveju šią sritį sudaro tik vienas taškas. Pastebėsime, kad ir bendresnės pernešimo lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3.16}$$

sprendiniui galioja panaši savybė. Lygties charakteristiką randame spręsdami uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v(x,t)\,, \\ x(0) = x_0\,. \end{cases}$$

Tada iš pernešimo lygties gauname lygybę:

$$\frac{du}{dt} = 0\,,$$

taigi (3.16) uždavinio sprendinys yra pastovus charakteristikos taškuose:

$$u(x(t),t) = u_0(x_0)\,.$$

Jeigu sprendžiame m-tosios eilės hiperbolinę diferencialinių lygčių sistemą, tai priklausomumo sritį $D(x,t)$ sudaro taškai:

$$D(x,t) = \big\{x - \lambda_j t, \ \ j = 1,2,\dots,m\big\}\,,$$

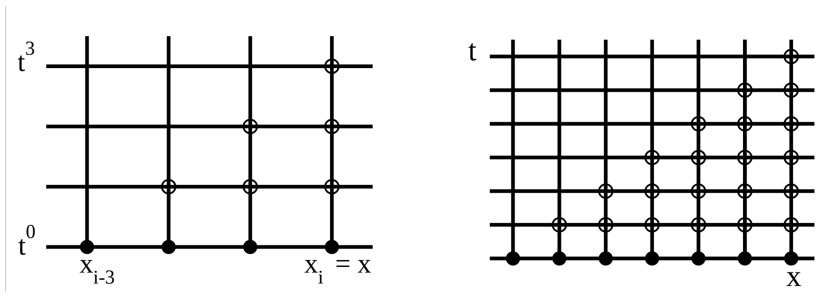
čia λ_j yra diferencialinio operatoriaus tikrinės reikšmės, apibrėžiančios judėjimo greičius. Taigi tik šiuose taškuose apibrėžtos pradinės sąlygos reikšmės turi įtakos sprendiniui nagrinėjamame taške (x, t).

Panašiai apibrėžiame ir baigtinių skirtumų schemos sprendinio y_i^n priklausomumo sritį $D_h(x_i, t_n)$. Ji priklauso tik nuo diskrečiojo tinklo šablono, naudojamo sudarant baigtinių skirtumų schemą, bet ne nuo schemos koeficientų. Pavyzdžiui, panagrinėkime bet kokią schemą, kurią galime užrašyti taip:

$$y_i^{n+1} = \alpha y_i^n + \beta y_{i-1}^n \,. \tag{3.17}$$

Tada taško (x_i, t^n) priklausomumo sritį sudaro taškai (žr. 3.4 pav. *a* dalį):

$$D_h(x_i, t_n) = \big\{x_j, \ \ j = i-n, i-n+1, \ldots, i\big\} \,.$$



a) b)

3.4 pav. (3.17) schemos sprendinio priklausomumo sritys: a) $D_h(x_i, t_n)$, b) $D_{h/2}(x_i, t_n)$

Mus domina schemos sprendinio konvergavimas, kai $h, \tau \to 0$. Diskretųjį tinklą smulkiname taip, kad $\tau/h = r$. Imdami perpus mažesnį žingsnį h gauname priklausomumo sritį $D_{h/2}(x, t)$, kuri pavaizduota 3.4 pav. *b* dalyje. Kai $h \to 0$, randame ribinę (3.17) baigtinių skirtumų schemos sprendinio priklausomumo sritį:

$$D_0(x, t) = \Big\{\bar{x} : \ x - \frac{t}{r} \leqslant \bar{x} \leqslant x\Big\} \,.$$

Tada *Kuranto, Fridrikso ir Levy* (KFL) *sąlyga* reikalauja, kad:

$$D(x, t) \subset D_0(x, t) \,,$$

t.y. diferencialinio uždavinio sprendinio priklausomumo sritis turi būti baigtinių skirtumų schemos sprendinio priklausomumo srities poaibiu.

Šios sąlygos būtinumą galime paaiškinti taip. Tarkime, kad KFL sąlyga nėra patenkinta, tada egzistuoja taškas $x_0 \in D(x,t)$, kuris nepriklauso baigtinių skirtumų schemos sprendinio priklausomumo sričiai $D_0(x,t)$. Jeigu pakeisime pradinę sąlygą taške x_0, tai pasikeis ir diferencialinio uždavinio sprendinio reikšmė taške (x,t), tačiau baigtinių skirtumų schemos sprendinys lieka tas pats. Todėl tokios schemos sprendinys negali konverguoti prie diferencialinio uždavinio sprendinio.

Pastebėsime, kad KFL sąlyga tik įvertina tą sritį, nuo kurios priklauso baigtinių skirtumų schemos sprendinys, tačiau ji nieko nepasako apie šios priklausomybės savybes. Todėl KFL sąlyga yra tik būtina, bet ne pakankama, kad baigtinių skirtumų schema konverguotų. Egzistuoja tokios schemos, kurios tenkina KFL sąlygą, bet jų sprendinys nekonverguoja prie diferencialinio uždavinio sprendinio. KFL sąlyga yra nesunkiai patikrinama, ir ji padeda nustatyti tas schemas, kurios tikrai netinkamos naudoti skaičiavimams.

KFL sąlygos tyrimas išreikštinėms schemoms. Nagrinėkime išreikštines baigtinių skirtumų schemas. Jau apskaičiavome išreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos

$$y_t + c y_{\bar{x}} = 0, \quad c \geqslant 0$$

sprendinio priklausomumo sritį:

$$D_0(x,t) = \left\{ \bar{x} : \; x - t/r \leqslant \bar{x} \leqslant x \right\}, \quad \tau = rh\,.$$

Kadangi (3.15) diferencialinio uždavinio sprendinio priklausomumo sritį $D(x,t)$ sudaro taškas $x_0 = x - ct$, tai KFL sąlyga yra patenkinta, jei:

$$\frac{1}{r} \geqslant c \quad \Rightarrow \quad c\tau \leqslant h\,.$$

Išreikštinės dešiniųjų vienpusių skirtumų schemos

$$y_t + c y_x = 0$$

sprendinio priklausomumo sritis yra

$$D_0(x,t) = \left\{ \bar{x} : \; x \leqslant \bar{x} \leqslant x + t/r \right\},$$

todėl $x_0 \notin D_0(x,t)$ ir būtinoji KFL sąlyga negali būti įvykdyta jokioms τ ir h reikšmėms. Taigi (3.3) schema yra netinkama pernešimo lygčiai spręsti.

Išreikštinės centrinių skirtumų schemos

$$y_t + c y_{\overset{\circ}{x}} = 0$$

sprendinio priklausomumo sritis yra

$$D_0(x,t) = \left\{ \bar{x} : \ x - t/r \leqslant \bar{x} \leqslant x + t/r \right\},$$

todėl KFL sąlyga yra įvykdyta, jei teisinga nelygybė $c\tau \leqslant h$.

Jeigu pernešimo lygtyje $c < 0$, tai diferencialinės lygties sprendinio priklausomumo sritis $D(x,t)$ yra taškas $x_0 = x + |c|t$. Dabar jau išreikštinė kairiųjų vienpusių skirtumų schema netenkina KFL sąlygos, o išreikštinės dešiniųjų vienpusių ir centrinių skirtumų schemos tenkina KFL sąlygą, kai $|c|\tau \leqslant h$. Taigi išreikštinė centrinių skirtumų schema vienintelė tenkina KFL sąlygą nepriklausomai nuo koeficiento c ženklo.

KFL sąlygos tyrimas neišreikštinėms schemoms. Panagrinėkime neišreikštines baigtinių skirtumų schemas. Atsižvelgę į schemos šabloną, apskaičiuojame, kad neišreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos

$$y_t + c y_{\bar{x}}^{n+1} = 0$$

sprendinio priklausomumo sritis yra

$$D_0(x,t) = \left\{ \bar{x} : \ \bar{x} \leqslant x \right\}.$$

Todėl KFL sąlyga yra nesąlygiškai įvykdyta visoms τ ir h reikšmėms, jei koeficientas $c \geqslant 0$.

Neišreikštinės dešiniųjų vienpusių skirtumų schemos

$$y_t + c y_x^{n+1} = 0$$

sprendinio priklausomumo sritis yra

$$D_0(x,t) = \left\{ \bar{x} : \ \bar{x} \geqslant x \right\}.$$

Šiai schemai KFL sąlyga yra nesąlygiškai įvykdyta visoms τ ir h reikšmėms, jei koeficientas $c \leqslant 0$.

Kranko ir Nikolsono schemos

$$y_t + \Big(\frac{y^{n+1} + y^n}{2} \Big)_{\overset{\circ}{x}} = 0$$

sprendinio priklausomumo sritis yra tiesė $\mathcal{R}$, todėl šiai schemai KFL sąlyga yra nesąlygiškai įvykdyta esant bet kokio ženklo c reikšmėms.

3.2.1. Neimano stabilumo sąlyga

Spręsime pernešimo lygties Koši uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad x \in \mathcal{R}, \ \ t > 0\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,. \end{cases} \tag{3.18}$$

Tarsime, kad $u_0(x)$ ir $f(x,t)$ yra nelygios tapatingai nuliui tik baigtinėje srityje, tada ir (3.18) uždavinio sprendinys $u(x,t) \not\equiv 0$ baigtinėje srityje.

Diskretųjį sprendinį $Y^n = \big(y_i^n\,,\ i = -\infty, \dots, \infty\big)$ apskaičiuojame naudodami baigtinių skirtumų schemą:

$$y_t + T_1 Y^{n+1} + T_2 Y^n = \varphi^{n+1}, \quad x \in \omega_h\,.$$

Tada diskrečiojo sprendinio paklaida $z_i^n = y_i^n - u_i^n$ tenkina uždavinį:

$$z_t + T_1 Z^{n+1} + T_2 Z^n = \psi^{n+1}\,, \tag{3.19}$$

čia ψ yra baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida:

$$\psi^{n+1} = \varphi - u_t - T_1 U^{n+1} - T_2 U^n\,.$$

Diskrečioji Furjė transformacija

Imkime vektorių $V = \big(v_j,\ j = -\infty, \dots, \infty\big)$ ir apibrėžkime jo normas:

$$\|V\|_2 = \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|V\| = \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j^2\, h\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Jeigu $\|V\|_2 \leqslant C$, tai egzistuoja vektoriaus V diskrečioji Furjė transformacija:

$$\tilde{v}(\xi) = \mathcal{F}V = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ij\xi} v_j, \quad \xi \in [-\pi, \pi]\,.$$

Apskaičiuokime funkcijos $\tilde{v}(\xi)$ normą:

$$\|\tilde{v}\|_2 = \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\tilde{v}(\xi)|^2\, d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Tada teisinga Parsevalio tapatybė:

$$\|V\|_2 = \|\tilde{v}\|_2\,.$$

Panagrinėkime operatorius S_+ ir S_-, kurie pavaizduoja vektorių V į vektorius:

$$S_+V = \{ w_j = v_{j+1}, \ \ j = -\infty, \dots, \infty \},$$
$$S_-V = \{ w_j = v_{j-1}, \ \ j = -\infty, \dots, \infty \}.$$

3.1 lema. *Vektorių S_+V ir S_-V diskrečiosios Furjė transformacijos yra funkcijos:*

$$\mathcal{F}(S_\pm V) = e^{\pm i\xi} \mathcal{F}V\,. \tag{3.20}$$

Įrodymas. Panagrinėkime tik vieną iš lygybių (antroji lygybė įrodoma analogiškai). Iš diskrečiosios Furjė transformacijos apibrėžimo gauname:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(S_+V) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ij\xi}\, v_{j+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i(m-1)\xi}\, v_m = \frac{e^{i\xi}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi}\, v_m\,.\end{aligned}$$

Lema įrodyta. □

Baigtinių skirtumų schemos stabilumas ir konvergavimas

Imkime (3.19) baigtinių skirtumų schemos diskrečiąją Furjė transformaciją:

$$\frac{\tilde{z}^{n+1}(\xi) - \tilde{z}^n(\xi)}{\tau} + \mathcal{F}(T_1 Z^{n+1}) + \mathcal{F}(T_2 Z^n) = \tilde{\psi}^{n+1}(\xi)\,. \tag{3.21}$$

Tarkime, kad iš šios lygties galime įrodyti nelygybę:

$$|\tilde{z}^{n+1}(\xi)|^2 \leqslant |\tilde{z}^n(\xi)|^2 + \tau C |\tilde{\psi}^{n+1}(\xi)|^2\,. \tag{3.22}$$

Integruokime šią nelygybę, gausime stabilumo nelygybę Furjė transformacijoms:

$$\|\tilde{Z}^{n+1}\|_2^2 \leqslant \|\tilde{Z}^n\|_2^2 + \tau C \|\tilde{\Psi}^{n+1}\|_2^2\,.$$

Pasinaudoję Parsevalio tapatybe ir sąryšiu tarp dviejų diskrečiųjų normų, įrodome stabilumo nelygybę baigtinių skirtumų schemos sprendiniui:

$$\|Z^{n+1}\|^2 \leqslant \|Z^n\|^2 + \tau C \|\Psi^{n+1}\|^2\,.$$

Remdamiesi šia nelygybe įvertiname baigtinių skirtumų schemos sprendinio globaliąją paklaidą:

$$\|Z^n\| \leqslant \sqrt{Ct^n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|\Psi^j\|\,.$$

Neimano stabilumo sąlyga. (3.21) lygtį užrašykime išreikštiniu būdu:

$$\tilde{z}^{n+1}(\xi) = R\,\tilde{z}^n(\xi) + \tau C_1 \tilde{\psi}^{n+1}(\xi)\,.$$

Tada būtina ir pakankama sąlyga, jog galiotų (3.22) nelygybė, yra *Neimano* stabilumo sąlyga:

$$|R| \leqslant 1\,.$$

R yra vadinamas paklaidos didėjimo daugikliu arba tiesiog augimo daugikliu.

Neimano stabilumo sąlyga išreikštinėms schemoms. Panagrinėkime dvi išreikštines schemas: kairiųjų vienpusių skirtumų schemą

$$z_t + c z_{\bar{x}} = \psi \tag{3.23}$$

ir centrinių skirtumų schemą

$$z_t + c z_{\overset{\circ}{x}} = \psi\,. \tag{3.24}$$

Jau įsitikinome, kad jos abi tenkina būtinąją KFL sąlygą, kai $\tau \leqslant ch$. Imkime (3.23) lygties diskrečiąją Furjė transformaciją, atsižvelgę į (3.20) lygybę. Gausime lygtį:

$$\tilde{z}^{n+1}(\xi) = \big(1 - r(1 - e^{-i\xi})\big)\tilde{z}^n(\xi) + \tau\tilde{\psi}^n(\xi)\,,$$

čia $r = \dfrac{c\tau}{h}$. Taigi išreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos paklaidos didėjimo daugiklis yra:

$$R = 1 - (1 - \cos\xi)r - ir\sin\xi\,.$$

Tada Neimano stabilumo sąlyga yra įvykdyta, kai

$$r^2\big((1-\cos\xi)^2 + \sin^2\xi\big) - 2(1-\cos\xi)r \leqslant 0\,.$$

Po nesudėtingų skaičiavimų gauname nelygybes:

$$2(1-\cos\xi)r(r-1) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad |r| \leqslant 1\,.$$

Taigi (3.23) baigtinių skirtumų schema yra stabilioji, kai $r \leqslant 1$, t. y. Neimano stabilumo sąlyga sutampa su KFL sąlyga. Esame įrodę, kad išreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida yra

$$\|\psi\| \leqslant C(\tau + h)\,,$$

todėl, kai $c > 0$ ir $\tau \leqslant ch$, šios schemos sprendinys konverguoja ir globalioji paklaida įvertinama nelygybe:

$$\|Z^n\| \leqslant C(\tau + h)\,.$$

Jeigu $c < 0$, tai reikia imti išreikštinę dešiniųjų vienpusių skirtumų schemą, kuriai Neimano stabilumo sąlyga yra įvykdyta, kai $|c|\tau \leqslant h$.

Nagrinėkime išreikštinės centrinių skirtumų schemos Furjė transformaciją:

$$\tilde{z}^{n+1}(\xi) = \big(1 - \frac{1}{2}r(e^{i\xi} - e^{-i\xi})\big)\tilde{z}^n(\xi) + \tau\tilde{\psi}^n(\xi)\,.$$

Šios schemos paklaidos didėjimo daugiklis yra:

$$R = 1 - ir\sin\xi\,,$$

todėl gauname, kad $|R| > 1$, kai $\xi \neq 0$. Taigi išreikštinė centrinių skirtumų schema yra nestabilioji ir jos negalime naudoti skaičiavimo eksperimentuose. Priminsime, kad šiai schemai KFL sąlyga buvo įvykdyta, jei $|c|\tau \leqslant h$. Iš šio pavyzdžio matome, kad KFL sąlyga yra tik būtina, bet nepakankama, kad konverguotų baigtinių skirtumų schemos sprendinys.

Neimano stabilumo sąlyga neišreikštinėms schemoms. Nagrinėkime dvi neišreikštines schemas: kairiųjų vienpusių skirtumų schemą

$$z_t + cz_{\bar{x}}^{n+1} = \psi \tag{3.25}$$

ir centrinių skirtumų schemą

$$z_t + c\left(\frac{z^{n+1} + z^n}{2}\right)_{\mathring{x}} = \psi\,. \tag{3.26}$$

Abi jos nesąlygiškai, t. y. esant visoms τ ir h reikšmėms, tenkina KFL sąlygą: (3.25) schema, kai $c > 0$, o (3.26) schema bet kokiems c.

Imkime kairiųjų vienpusių skirtumų lygties diskrečiąją Furjė transformaciją. Po nesudėtingų skaičiavimų gauname lygtį:

$$\tilde{z}^{n+1}(\xi) = \frac{1}{1 + r(1 - e^{-i\xi})}\big(\tilde{z}^n(\xi) + \tau\tilde{\psi}^{n+1}(\xi)\big).$$

Taigi šios schemos paklaidos didėjimo daugiklis yra:

$$R = \frac{1}{1 + r(1 - e^{-i\xi})}\,.$$

Neimano stabilumo sąlyga $|R| \leqslant 1$ yra įvykdyta, kai:

$$\big(1 + r(1 - \cos\xi)\big)^2 + r^2 \sin^2 \xi \geqslant 1\,.$$

Po nesudėtingų trigonometrinių pertvarkymų gauname nelygybę:

$$r(1 - \cos\xi)(2 + 2r) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r \geqslant 0) \vee (r \leqslant -1)\,.$$

Taigi neišreikštinė kairiųjų vienpusių skirtumų schema yra nesąlygiškai stabili, kai $c \geqslant 0$. Atsižvelgę į šios schemos aproksimacijos tikslumą, įrodome, kad diskretusis sprendinys konverguoja, o globalioji paklaida įvertinama nelygybe:

$$\|Z^n\| \leqslant C(\tau + h)\,.$$

Panagrinėkime simetrinės schemos diskrečiąją Furjė transformaciją:

$$\tilde{z}^{n+1}(\xi) = \frac{\big(1 - \frac{1}{4}r(e^{i\xi} - e^{-i\xi})\big)\tilde{z}^n(\xi) + \tau\tilde{\psi}^{n+1}(\xi)}{1 + \frac{1}{4}r(e^{i\xi} - e^{-i\xi})}\,.$$

Jos paklaidos didėjimo daugiklis yra:

$$R = \frac{1 - \frac{i}{2} r \sin\xi}{1 + \frac{i}{2} r \sin\xi}\,,$$

taigi Neimano stabilumo sąlyga $|R| \leqslant 1$ yra nesąlygiškai įvykdyta visiems c. Kadangi Kranko ir Niolsono schemos aproksimacijos tikslumo eilė antroji, tai tokia pati yra diskrečiojo sprendinio tikslumo eilė:

$$\|Z^n\| \leqslant C(\tau^2 + h^2)\,.$$

3.2.2. Stabilumo analizė maksimumo normoje

Neimano stabilumo sąlygą galime patikrinti tik tada, kai pernešimo lygties koeficientai yra pastovieji. Šiame poskyryje nagrinėsime bendrąjį pernešimo uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + v(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \quad 0 < x \le 1, \;\; t > 0\,, \\ u(0,t) = \mu(t)\,, \\ u(x,0) = u_0(x)\,. \end{cases} \tag{3.27}$$

Išreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos stabilumas

Diferencialinę lygtį aproksimuokime schema:

$$y_t + v_i y_{\bar{x}} = f_i, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,.$$

Tada globalioji paklaida $z = y - u$ tenkina uždavinį:

$$\begin{cases} z_t + v_i z_{\bar{x}} = \psi_i, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ z_0^n = 0, \quad t^n \in \omega_\tau\,, \\ z_i^0 = 0, \quad x_i \in \overline{\omega}_h\,. \end{cases}$$

Tegul funkcija $v(x,t)$ yra neneigiamoji ir aprėžta iš viršaus, t. y.:

$$0 \leqslant v(x,t) \leqslant c, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \;\; t > 0\,. \tag{3.28}$$

Stabilumo nelygybę įrodysime taikydami maksimumo principą. Tuo tikslu išreiškiame nežinomąjį:

$$z_i^{n+1} = \Big(1 - \frac{v_i\tau}{h}\Big) z_i^n + \frac{v_i\tau}{h} z_{i-1}^n + \tau\psi_i^n$$

ir įvertiname jo modulį:

$$|z_i|^{n+1} \leq \left(\left|1 - \frac{v_i\tau}{h}\right| + \frac{v_i\tau}{h}\right)\|Z^n\|_{C(\omega_h)} + \tau\|\Psi^n\|_{C(\omega_h)}\,. \tag{3.29}$$

Todėl pakankama stabilumo sąlyga yra nelygybė:

$$\left|1 - \frac{v_i^n\tau}{h}\right| + \frac{v_i^n\tau}{h} \leqslant 1\,.$$

Išsprendę šią nelygybę ir pasinaudoję (3.28) sąlygomis, gauname tokį reikalavimą diskrečiojo tinklo parametrams:

$$c\tau \leqslant h\,.$$

Tada iš (3.29) nelygybės išplaukia stabilumo įvertis:

$$\|Z^{n+1}\|_{C(\omega_h)} \leqslant \|Z^n\|_{C(\omega_h)} + \tau\|\Psi^n\|_{C(\omega_h)}\,.$$

Šios schemos aproksimavimo paklaidą jau esame įvertinę anksčiau:

$$\|\Psi^n\| \leqslant C(\tau + h)\,,$$

todėl jei $c\tau \leqslant h$, tai teisingas toks globaliosios paklaidos įvertis

$$\|Z\|_{C(\omega_h)} \leqslant C(\tau + h)\,.$$

Neišreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos stabilumas

Diferencialinę lygtį aproksimuokime schema:

$$y_t + v_i^{n+1} y_{\bar{x}}^{n+1} = f_i^{n+1}, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,.$$

Tada globalioji paklaida $z = y - u$ tenkina uždavinį:

$$\begin{cases} z_t + v_i^{n+1} z_{\bar{x}}^{n+1} = \psi_i^{n+1}, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}, \\ z_0^n = 0, \quad t^n \in \omega_\tau\,, \\ z_i^0 = 0, \quad x_i \in \overline{\omega}_h\,. \end{cases}$$

Tarkime, kad globalioji paklaida $|z_k^{n+1}|$ yra didžiausia taške x_i. Iš skirtumų lygties išreiškiame:

$$\Big(1 + \frac{v_i^{n+1}\tau}{h}\Big) z_i^{n+1} = z_i^n + \frac{v_i^{n+1}\tau}{h} z_{i-1}^{n+1} + \tau\psi^{n+1}\,.$$

Tada galioja tokie įverčiai:

$$\begin{aligned} \Big(1 + \frac{v_i^{n+1}\tau}{h}\Big) |z_i^{n+1}| &\leqslant |z_i^n| + \frac{v_i^{n+1}\tau}{h} |z_{i-1}^{n+1}| + \tau|\psi^{n+1}| \\ &\leqslant |z_i^n| + \frac{v_i^{n+1}\tau}{h} \|Z^{n+1}\|_{C(\omega_h)} + \tau|\psi_i^{n+1}|\,. \end{aligned}$$

Iš gautosios nelygybės išplaukia stabilumo įvertis:

$$\|Z^{n+1}\|_{C(\omega_h)} \leqslant \|Z^n\|_{C(\omega_h)} + \tau\|\Psi^{n+1}\|_{C(\omega_h)}\,.$$

Pasinaudoję aproksimavimo paklaidos įverčiu, įrodome, kad teisingas globaliosios paklaidos įvertis:

$$\|Z\|_{C(\omega_h)} \leqslant C(\tau + h)\,.$$

Geometrinis stabilumo interpretavimas

Panagrinėsime baigtinių skirtumų schemos stabilumą pradinės sąlygos atžvilgiu. Priminsime, kad homogeninės pernešimo lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

sprendinys yra $u(x,t) = u_0(x - ct)$, t.y. charakteristikos $x = x_0 + ct$ kryptimi sprendinys nesikeičia.

Panagrinėkime išreikštinę kairiųjų vienpusių skirtumų schemą:

$$y_t + c y_{\bar{x}} = 0\,.$$

Rasime charakteristiką, einančią per tašką (x_i, t^{n+1}):

$$x - ct = x_i - ct^{n+1}\,.$$

Ši charakteristika laiko momentu $t = t^n$ kerta x ašį taške:

$$\bar{x} = x_i - c\tau\,.$$

Baigtinių skirtumų schemą užrašykime koordinačių pavidalu:

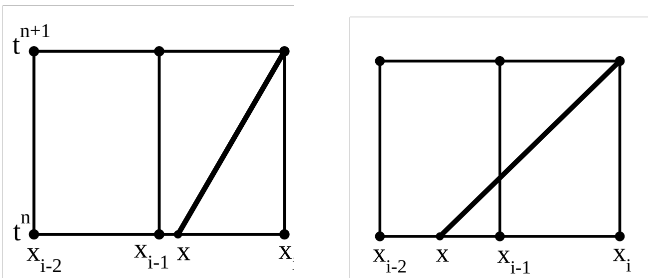
$$y_i^{n+1} = \frac{c\tau}{h} y_{i-1} + \Big(1 - \frac{c\tau}{h}\Big) y_i\,.$$

Šią formulę galime interpretuoti taip:

a) naudodami y_{i-1}, y_i tiesiškai interpoliuojame funkcijos y reikšmę taške $\bar{x}$:

$$\bar{y} = y_i \frac{\bar{x} - x_{i-1}}{h} + y_{i-1} \frac{x_i - \bar{x}}{h} = \frac{c\tau}{h} y_{i-1} + \Big(1 - \frac{c\tau}{h}\Big) y_i\,,$$

b) šią reikšmę perkeliame charakteristikos kryptimi į tašką (x_i, t_{n+1}).



a) b)

3.5 pav. Išreikštinės baigtinių skirtumų schemos sprendinio geometrinė interpretacija: a) $c\tau < h$, b) $c\tau > h$

Dabar galime pateikti ir geometrinį KFL sąlygos paaiškinimą. Jeigu $c\tau \leqslant h$, tai pirmajame algoritmo žingsnyje $\bar{y}$ reikšmę apskaičiuojame *interpoliuodami*, jeigu $c\tau > h$ – *ekstrapoliuodami* (žr. 3.5 pav.). Gerai žinoma, kad ekstrapoliavimo operacija yra nestabili.

Panagrinėkime nesąlygiškai stabilią neišreikštinę kairiųjų vienpusių skirtumų schemą:

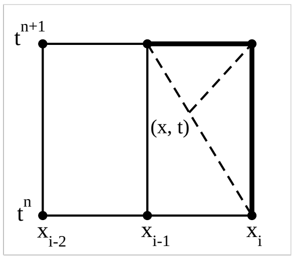
$$y_t + c y_{\bar{x}}^{n+1} = 0\,.$$

Iš šios lygties išreiškiame sprendinį:

$$y_i^{n+1} = \frac{1}{1+\frac{c\tau}{h}}\, y_i + \frac{\frac{c\tau}{h}}{1+\frac{c\tau}{h}}\, y_{i-1}^{n+1}\,.$$

Parodysime, kad apskaičiuodami y_i^{n+1} visada naudojame interpoliacinę formulę. Panagrinėkime charakteristiką, einančią per tašką (x_i, t_{n+1}):

$$x - ct = x_i - ct^{n+1}\,.$$



3.6 pav. Neišreikštinės baigtinių skirtumų schemos sprendinio geometrinė interpretacija

Rasime tašką $(\bar{x}, \bar{t})$, kuriame charakteristika susikerta su tiese, jungiančia taškus (x_{i-1}, t_{n+1}) ir (x_i, t_n) (žr. 3.6 pav.):

$$\begin{cases} \dfrac{t - t^n}{t^{n+1} - t^n} = \dfrac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}\,, \\ x - ct = x_i - ct^{n+1}\,. \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname taško $(\bar{x}, \bar{t})$ koordinates:

$$\bar{x} = x_i - \frac{\frac{c\tau}{h}}{1+\frac{c\tau}{h}}\, h, \quad \bar{t} = t^n + \frac{\frac{c\tau}{h}}{1+\frac{c\tau}{h}}\,.$$

Pasinaudoję tiesinio interpoliavimo formule apskaičiuojame sprendinio reikšmę šiame taške:

$$\bar{y} = s y_{i-1}^{n+1} + (1-s) y\,,$$

čia pažymėjome:

$$s = \frac{c\tau}{h} \Big/ \left(1 + \frac{c\tau}{h}\right).$$

Vėl gavome neišreikštinės kairiųjų vienpusių skirtumų schemos realizavimo lygtį.

Grafinis stabilumo analizės metodas leidžia nustatyti tik būtinąsias stabilumo sąlygas. Juo ištyrę baigtinių skirtumų schemos stabilumą, galime atmesti tikrai nenaudotinas skaičiavimams schemas. Tačiau algoritmas gali tenkinti grafinį stabilumo kriterijų ir būti nestabilus. Pastebėsime, kad grafinį metodą galime taikyti ir kaip būdą sudaryti naujas baigtinių skirtumų schemas.

3.1 pavyzdys. Grafinio stabilumo kriterijaus analizė. Panagrinėkime išreikštinę centrinių skirtumų schemą:

$$y_t + c\,\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0\,.$$

Nesunku įsitikinti, kad jeigu $|c|\tau \le h$, tai gautoji formulė

$$y^{n+1} = y_i - \frac{c\tau}{2h}\big(y_{i+1} - y_{i-1}\big)$$

sutampa su parabolinio interpoliavimo formule, todėl kai $|c|\tau \le h$ baigtinių skirtumų schema tenkina būtinąją geometrinio stabilumo sąlygą. Tačiau tirdami šios schemos stabilumą Neimano kriterijumi įrodėme, kad ji yra nesąlygiškai nestabili.