Grupių tiesioginė sandauga

Tarkime, A ir B yra grupės G pogrupiai. Pirmiausiai išsiaiškinsime, ar pogrupių A ir B sankirta $A \cap B$, sąjunga $A \cup B$, sandauga $A \cdot B$ yra pogrupiai. Jei ne, kokių papildomų sąlygų reikia, kad galima būtų apibrėžti grupės struktūrą.

<u>1. Teorema. Grupės G pogrupių A ir B sankirta $A \cap B$ yra pogrupis</u>

<u>Įrodymas.</u> Tarkime, $g, h \in A \cap B \Rightarrow g, h \in A, g, h \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow gh^{-1} \in A, gh^{-1} \in B \Rightarrow gh^{-1} \in A \cap B$

<u>2. Teorema. Grupės G pogrupių A ir B sąjunga $A \cup B$ yra pogrupis tada ir tik tada, kai kuris nors pogrupis yra kito poaibis.</u>

<u>Įrodymas.</u> <u>Būtinumas.</u> Taikysime prieštaros būdą.
Tarkime, $A \cup B < G$ ir $A \not\subset B$, $B \not\subset A$. $\Rightarrow \exists x \in A, x \notin B$ ir $\exists y \in B, y \notin A$. Bet $x, y \in A \cup B \Rightarrow x \cdot y \in A \cup B$, nes $A \cup B$ pogrupis.
$\Rightarrow$ Galimi du atvejai: 1. $x \cdot y \in A$. 2. $x \cdot y \in B$.

1. Tarkime, $x \cdot y \in A$. $x^{-1} \in A$, kadangi $A < G$. $\Rightarrow$
$\Rightarrow x^{-1} \cdot x \cdot y = y \in A$. Gavome prieštarą prielaidai.

2. Tarkime, $x \cdot y \in B$. $y^{-1} \in B$, nes $B < G \Rightarrow x \cdot y \cdot y^{-1} = x \in B$.
Vėl gavome prieštarą.

<u>Pakankamumas.</u> Akivaizdu, nes $A \cup B$ arba sutampa su A, arba sutampa su B.

1. Apibrėžimas. Grupės G pogrupių A ir B sandauga $A\cdot B$ vadinama aibė

$$A\cdot B=\{a\cdot b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

3T. Grupės G pogrupių A ir B sandauga $A\cdot B$ yra pogrupis tada ir tik tada, kai $A\cdot B=B\cdot A$.

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, $A\cdot B$ – pogrupis ir $g\in A\cdot B$. $\Rightarrow \exists a\in A,\ b\in B: g=a\cdot b$. Bet $g^{-1}\in A\cdot B \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1\in A,\ b_1\in B: g^{-1}=a_1\cdot b_1 \Rightarrow (g^{-1})^{-1}=g=(a_1\cdot b_1)^{-1}=b_1^{-1}a_1^{-1}\in B\cdot A$, nes $b_1^{-1}\in B$, $a_1^{-1}\in A. \Rightarrow A\cdot B\subset B\cdot A$. Analogiškai įrodome, kad $B\cdot A\subset A\cdot B$. Todėl $A\cdot B=B\cdot A$.

Pakankamumas. Tarkime, $A\cdot B=B\cdot A$. Įrodysime, kad $A\cdot B$ yra grupės G pogrupis.

1) Tarkime, kad $g\in A\cdot B \Rightarrow \exists a\in A,\ b\in B: g=a\cdot b \Rightarrow$ $\Rightarrow g^{-1}=(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}\in B\cdot A=AB \Rightarrow AB<G$. ∎

2 Ap. Grupė G yra vadinama savo pogrupių A ir B tiesiogine sandauga ir žymima $G=A\otimes B$, kai:

1) $G=A\cdot B$
2) $A\triangleleft G$, $B\triangleleft G$
3) $A\cap B=\{e\}$

Tiesioginės sandaugos reiškimi ir privalumai išplaukia iš tiesioginės sandaugos kriterijaus.

4T. (Tiesioginės sandaugos kriterijus). Grupė G yra savo pogrupių A ir B tiesioginė sandauga tada ir tik tada, kai kiekvieną tos grupės elementą g galima vienareikšmiškai užrašyti tų pogrupių elementų sandauga $g = a \cdot b$ ir $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x \in A,\ \forall y \in B$.

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, $G = A \otimes B$ ir $g \in G$. Iš tiesioginės sandaugos apibrėžimo išplaukia, kad $\exists a \in A$, $b \in B$: $g = a \cdot b$. Įrodysime šio skaidinio vienareikšmiškumą. Taikysime prieštaros būdą. Tarkime, elementą g galima išskaidyti ir kitu būdu: $g = a_1 \cdot b_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$. Turime lygybę $a \cdot b = a_1 \cdot b_1$. Padauginę abi šios lygybės puses iš kairės iš a_1^{-1}, o iš dešinės – iš b^{-1}, gauname $a_1^{-1} a = b_1 \cdot b^{-1}$. Bet $a_1^{-1} a \in A$, $b_1 b^{-1} \in B$. Vadinasi, $a_1^{-1} a,\ b_1 \cdot b^{-1} \in A \cap B = \{e\}$. Todėl $a_1^{-1} \cdot a = e$, $b_1 \cdot b^{-1} = e$. Iš čia $a = a_1$, $b = b_1$. Gavome prieštarą prielaidai. Vadinasi, elementas g išskaidomas elementų iš A ir B sandauga vienareikšmiškai.

Įrodysime, kad $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x \in A,\ \forall y \in B$. Sudarykime sandaugą $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$. Kadangi $B \triangleleft G$, iš II normaliojo daliklio kriterijaus išplaukia, kad $x \cdot y \cdot x^{-1} \in B$. Vadinasi, ir $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in B$. Analogiškai $y x^{-1} y^{-1} \in A$ ir $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in A$. Todėl $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} \in A \cap B = \{e\}$. Gauname lygybę $x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = e$. Padauginę abi šios lygybės puses iš dešinės pirma iš y, po to – iš x, gauname $x \cdot y = y \cdot x$. ▲

Pakankamumas. Tarkime, $\forall g \in G$ vienareikšmiškai užrašomas elementų iš A ir B sandauga $g=a\cdot b$ ir $x\cdot y = y\cdot x$ $\forall x\in A, \forall y \in B$

1) lygybė $G = A\cdot B$ akivaizdi

2) Įrodysime, kad A yra grupės G normalusis daliklis. Tarkime, $a\in A, g\in G$. Turime parodyti, kad $gag^{-1}\in A$. Išskaidome elementą g elementų iš A ir B sandauga – $g=a_1\cdot b_1$. Todėl $g\cdot a\cdot g^{-1} = a_1\cdot b_1\cdot a(a_1\cdot b_1)^{-1} = a_1\cdot b_1\cdot a\cdot b_1^{-1}\cdot a_1^{-1}$. Bet $b_1\cdot a = a\cdot b_1$. Vadinasi,

$$g\cdot a\cdot g^{-1} = a_1\cdot a\cdot b_1\cdot b_1^{-1}\cdot a_1^{-1} = a_1\cdot a\cdot a_1^{-1}\in A$$

Analogiškai įrodome, kad $B \lhd G$.

3) Tarkime, $g\in A\cap B$. Galimi du elemento g skaidiniai elementų iš A ir B sandauga:

$$g = g\cdot e \quad (g\in A, e\in B)$$
$$g = e\cdot g \quad (e\in A, g\in B)$$

Iš skaidinio vienareikšmiškumo išplaukia lygybė $g=e$. Todėl $A\cap B=\{e\}$ ■

Pastaba. Kai ~~A~~ G – adityvi grupė, jos skaidinį pogrupiais A ir B vadiname tiesiogine suma ir žymime $G = A\oplus B$.

Galima tiesioginės sandaugos apibrėžimą ir jos kriterijų ~~apibrėžimą~~ apibendrinti baigtiniam pogrupių skaičiui.

3Ap. Sakoma, kad grupė G yra savo pogrupių $H_1, H_2, \dots, H_m$ tiesioginė sandauga ir rašoma

$$G = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_m, \text{ kai:}$$

1) $G = H_1 \cdot H_2 \cdot \ldots \cdot H_m$

2) $H_i \triangle G$, $i = 1, \dots, m$

3) $H_i \cap H_i' = \{e\}$, $i = 1, \dots, m$; čia $H_i' = H_1 \cdot H_2 \cdots H_{i-1} \cdot H_{i+1} \cdots H_m$.

5T. (Tiesioginės sandaugos kriterijus). Grupė G yra savo pogrupių $H_1, H_2, \dots, H_m$ tiesioginė sandauga tada ir tik tada, kai $\forall g \in G$ vienareikšmiškai užrašomas sandauga $g = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_m$ $(h_i \in H_i,\ i = 1, \dots, m)$ ir $h_i \cdot h_j = h_j \cdot h_i$ $(i \neq j)$

Teorema įrodoma analogiškai 4 teoremai.

Apibendrinsime tiesioginės sandaugos sąvoką. Tarkime, A ir B – dvi grupės. Pažymėkime $A \times B$ tų grupių Dekarto sandaugą:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Šioje aibėje apibrėžiame algebrinę operaciją:

$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c,\ b \cdot d) \qquad ((a,b), (c,d) \in A \times B).$$

Įrodysime, kad šios operacijos atžvilgiu aibė $A \times B$ sudaro grupę. Iš tikrųjų:

1) operacija asociatyvi –

$$((a_1,b_1) \cdot (a_2,b_2)) \cdot (a_3,b_3) = (a_1 a_2,\ b_1 \cdot b_2) \cdot (a_3,b_3) =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,\ b_1 \cdot b_2 \cdot b_3) = (a_1,b_1)((a_2,b_2) \cdot (a_3,b_3));$$

2) egzistuoja vienetinis elementas (e_1, e_2) (čia e_1 yra grupės A vienetinis elementas, e_2 - grupės B vienetinis elementas.

$$(a,b)\cdot(e_1,e_2)=(a\cdot e_1, b\cdot e_2)=(a,b) \quad (\forall (a,b)\in A\times B)$$

3) $\forall (a,b)\in A\times B$ egzistuoja atvirkštinis elementas $(a,b)^{-1}=(a^{-1},b^{-1})$

$$(a,b)\cdot(a^{-1};b^{-1})=(a\cdot a^{-1}; b\cdot b^{-1})=(e_1,e_2) \quad \blacksquare$$

Įrodysime, kad Dekarto sandauga $A\times B$ galima išreikšti jo pogrupių $A\times\{e_2\}$ ir $\{e_1\}\times B$ tiesiogine sandauga:

1) Tarkime, $(a,b)\in A\times B$. Tada

$$(a,b)=(a,e_2).(e_1,b)\in(A\times\{e_2\})\cdot(\{e_1\}\times B).$$

2) Įrodysime, kad $A\times\{e_2\}$ yra grupės $A\times B$ normalusis daliklis. Tarkime, $(a,e_2)\in A\times\{e_2\}$, $(a_1,b_1)\in A\times B$.

$$\Rightarrow (a_1,b_1)(a,e_2)(a_1,b_1)^{-1}=(a_1,b_1)(a,e_2)(a_1^{-1},b_1^{-1})=$$
$$=(a_1aa_1^{-1}, b_1e_2b_1^{-1})=(a_1aa_1^{-1}, e_2)\in A\times\{e_2\} \quad \blacksquare$$

Analogiškai įrodoma, kad $\{e_1\}\times B$ yra grupės $A\times B$ normalusis daliklis.

3) Beliko parodyti, kad pogrupių $A\times\{e_2\}$ ir $\{e_1\}\times B$ sankirta yra vienetinė. Tarkime,

$(a,b)\in(A\times\{e_2\})\cap(\{e_1\}\times B)$. Kadangi $(a,b)\in A\times\{e_2\}$, tai $b=e_2$. Taip pat ir elemento (a,b) priklausomumo pogrupiui $\{e_1\}\times B$ išplaukia $a=e_1 \Rightarrow$

$$(A\times\{e_2\})\cap(\{e_1\}\times B)=\{(e_1,e_2)\} \quad \blacksquare$$

4 Ap. Grupių A ir B Dekarto sandauga $A \times B$ yra vadinama jų tiesiogine išorine sandauga.

Pastaba. Grupės $A \times B$ pogrupius $A \times \{e_2\}$ ir $\{e_1\} \times B$ izomorfizmo tikslumu galima sutapatinti atitinkamai su grupėmis A ir B. Iš tikrųjų, parodysime, kad grupė $A \times \{e_2\}$ izomorfiška A.

Tuo tikslu apibrėžiame atvaizdį

$$\varphi : A \times \{e_2\} \to A \text{ lygybe}$$

$$\varphi((a, e_2)) = a$$

Šis atvaizdis – homomorfizmas:

$$\varphi((a_1, e_2)(a_2, e_2)) = \varphi((a_1 a_2, e_2)) = a_1 a_2 =$$

$$= \varphi((a_1, e_2)) \cdot \varphi(a_2, e_2)) \quad \forall (a_1, e_2), (a_2, e_2) \in A \times \{e_2\}$$

Šio homomorfizmo branduolys – vienetinis:

jei $(a, e_2) \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi((a, e_2)) = a = e_1 \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{(e_1, e_2)\}$.

Homomorfizmas – siurjektyvus:

$$\forall a \in A \ \exists (a, e_2) \in A \times \{e_2\} : \varphi(a, e_2)) = a.$$

Todėl $A \times \{e_2\} \cong A$.

Analogiškai įrodoma, kad $\{e_1\} \times B \cong B$.