(5)

Grupių homomorfizmai

Tegul G ir G' – grupės.

Apl. Grupės G homomorfizmu grupėje G' yra vadinamas toks atvaizdis

$$\varphi: G \to G',$$

kai su kiekviena grupės G elementų pora a, b teisinga lygybė

$$1^\circ\ \varphi(a\cdot b) = \varphi(a)\cdot\varphi(b) \quad \text{ir}\ 2^\circ\ \varphi(e) = e'$$

Iš 1° išplaukia 2°: $\varphi(e) = \varphi(e\cdot e) = \varphi(e)\cdot\varphi(e) \Rightarrow \varphi(e) = e'$. Taip pat $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Pavyzdžiai

1) Apibrėžiame atvaizdį $\varphi: G \to G$ lygybe

$$\varphi(g) = e \qquad (\forall g \in G)$$

φ – homomorfizmas, nes $\varphi(g\cdot h) = e = e\cdot e = \varphi(g)\cdot\varphi(h)$ $(\forall g, h \in G)$.

2) Apibrėžiame realiųjų skaičių adicinės grupės $R(+,0)$ atvaizdį multiplikacinėje grupėje $R^* = R\setminus\{0\}$ lygybe

$$\varphi(\alpha) = e^\alpha \qquad (\forall \alpha \in R(+,0))$$

φ – homomorfizmas, nes

$$\varphi(a+b) = e^{\alpha+\beta} = e^\alpha\cdot e^\beta = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) \quad (\forall \alpha, \beta \in R(+,0))$$

3) Apibrėžiame pilnosios tiesinės grupės $GL(2,Q)$ atvaizdį racionaliųjų skaičių multiplikacinėje grupėje $Q^* = Q\setminus\{0\}$ lygybe

$$\varphi(A) = |A| \qquad (\forall A \in GL(2,Q)).$$

φ – homomorfizmas, nes

$$\varphi(A\cdot B) = |A B| = |A|\cdot|B| = \varphi(A)\cdot\varphi(B) \quad (\forall A, B \in GL(2,Q))$$

4) ~~F~~ Fiksuojame grupės G elementą h ir apibrėžiame šios grupės atvaizdį φ_h joje pačioje lygybe

$$\varphi_h(g) = hgh^{-1} \quad (\forall g \in G).$$

~~T~~ φ_h – homomorfizmas, nes

$$\varphi_h(g_1 \cdot g_2) = hg_1g_2h^{-1} = hg_1h^{-1}hg_2h^{-1} = \varphi_h(g_1)\cdot\varphi_h(g_2)$$
$$(\forall g_1, g_2 \in G)$$

Įsitikinsime, kad atvaizdis φ_h yra bijekcija.
Injekciją įrodome prieštaros būdu. Tarkime, $g_1 \neq g_2$, o jų vaizdai sutampa:

$$\begin{matrix} \varphi_h(g_1) & = & \varphi_h(g_2) \\ \| & & \| \\ hg_1h^{-1} & = & hg_2h^{-1} \end{matrix}$$

Padauginę abi pastarosios lygybės puses iš kairės iš h^{-1}, o iš dešinės – iš h, turėsime

$$g_1 = g_2,$$

o tai yra prieštara elementų g_1 ir g_2 parinkimui.

Atvaizdis φ_h – siurjekcija, nes grupės G elemento g pirmvaizdžiu yra elementas

$$h^{-1}gh : \varphi_h(h^{-1}gh) = hh^{-1}ghh^{-1} = g$$

__Ap.__ Grupės G bijekcinis homomorfizmas toje pačioje grupėje yra vadinamas tos grupės __automorfizmu__.

<u>Ap.</u> Automorfizmas $\varphi_h : g \to hgh^{-1}$ yra vadinamas grupės G <u>vidiniu automorfizmu.</u>

<u>T1.</u> Grupės G vidinių automorfizmų aibė $\mathrm{Int}\, G$ sudaro grupę atvaizdžių kompozicijos atžvilgiu.

Apibrėšime algebrinę operaciją aibėje $\mathrm{Int}\, G$ lygybe

$$\varphi_h \circ \varphi_{h'} = \varphi_{hh'}$$

1) operacija asociatyvi

$$(\varphi_{h_1} \circ \varphi_{h_2}) \circ \varphi_{h_3} = \varphi_{h_1h_2} \circ \varphi_{h_3} = \varphi_{h_1h_2h_3} = \varphi_{h_1} \circ \varphi_{h_2h_3} = \varphi_{h_1} \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2)$$

2) egzistuoja vienetinis elementas φ_e:

$$\varphi_e \circ \varphi_h = \varphi_{eh} = \varphi_h = \varphi_{he} = \varphi_h \circ \varphi_e \quad (\forall \varphi_h \in \mathrm{Int}\, G)$$

3) kiekvienam aibės $\mathrm{Int}\, G$ elementui φ_h egzistuoja atvirkštinis elementas $(\varphi_h)^{-1} = \varphi_{h^{-1}}$:

$$\varphi_h \circ \varphi_{h^{-1}} = \varphi_{h \cdot h^{-1}} = \varphi_e = \varphi_{h^{-1}h} = \varphi_{h^{-1}} \circ \varphi_h$$

Bijekcinis homomorfizmas $\varphi : G \to G'$ yra vadinamas grupių G ir G' <u>izomorfizmu.</u>

Injektyvusis homomorfizmas vadinamas <u>monomorfizmu</u>

Siurjektyvusis homomorfizmas vadinamas <u>epimorfizmu.</u>

Pagrindinė grupių homomorfizmų teorema

Tarkime, φ yra grupės G homomorfizmas grupėje G'. Pažymėkime šio homomorfizmo vaizdų aibę

$$\varphi(G) = \mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(g) : g \in G\}$$

Įrodysime, kad $\mathrm{Im}\,\varphi$ yra grupės G' pogrupis. Tarkime,

$g_1', g_2' \in \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow \exists\, g_1, g_2 \in G : \varphi(g_1) = g_1',\ \varphi(g_2) = g_2' \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1' \cdot g_2'^{-1} = \varphi(g_1) \cdot (\varphi(g_2))^{-1} = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2^{-1}) = \varphi(g_1 g_2^{-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1' \cdot g_2'^{-1} \in \mathrm{Im}\,\varphi$.

Apibrėžiame homomorfizmo φ branduolį $\mathrm{Ker}\,\varphi$:

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e'\}.$$

Įrodysime, kad $\mathrm{Ker}\,\varphi$ yra grupės G normalusis daliklis.

Tarkime, $g_1, g_2 \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow \varphi(g_1 \cdot g_2^{-1}) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2^{-1}) = e' \cdot e' = e' \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Taigi $\mathrm{Ker}\,\varphi$ – pogrupis. Tarkime, $h \in \mathrm{Ker}\,\varphi,\ g \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(g \cdot h \cdot g^{-1}) = \varphi(g) \cdot \varphi(h) \cdot \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) \cdot e' \cdot (\varphi(g))^{-1} = g\, h\, g^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi$ – normalusis daliklis. $\square$

<u>Teorema</u> (Pagrindinė grupių homomorfizmo teorema).

1) Tarkime, φ yra grupės G homomorfizmas grupėje G'. Tada faktorgrupė

$$G/\ker\varphi$$

yra izomorfiška vaizdui $\operatorname{Im}\varphi$:

$$G/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

2) Tarkime, H yra grupės G normalusis daliklis. Tada egzistuoja grupės G siurjekcinis homomorfizmas (epimorfizmas) φ faktorgrupėje G/H toks, kad šio homomorfizmo branduolys $\ker\varphi$ sutampa su pogrupiu H.

Įrodymas. 1) Tarkime,

$$\varphi: G \to G' \quad - \text{homomorfizmas.}$$

Galime apibrėžti faktorgrupę $G/\ker\varphi$, nes, kaip buvo įrodyta, $\ker\varphi$ yra normalusis dalikis. Apibrėžiame atvaizdį $f: G/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$ lygybe

$$f(g\ker\varphi) = \varphi(g)$$

Įsitikinsime, kad atvaizdis apibrėžtas korektiškai. Tarkime, $g'\ker\varphi = g\ker\varphi$ ir $f(g'\ker\varphi) = \varphi(g')$

Parodysime, kad $\varphi(g') = \varphi(g)$. Iš tikrųjų, kadangi $g \in g\ker\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow g \in g'\ker\varphi \Rightarrow \exists h \in \ker\varphi: g = g'h \Rightarrow \varphi(g) = \varphi(g' \cdot h) = \varphi(g')\varphi(h) =$
$= \varphi(g')$.

Atvaizdis f – homomorfizmas:

$$f(g_1\ker\varphi \cdot g_2\ker\varphi) = f(g_1g_2\ker\varphi) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2) = f(g_1\ker\varphi)\cdot f(g_2\ker\varphi).$$

Kad f - injekcija, įrodysime prieštaros būdu. Tarkime, $g_1 Ker\varphi \neq g_2 Ker\varphi$, o $f(g_1 Ker\varphi) = f(g_2 Ker\varphi)$. Vadinasi, $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Padauginkime abi šios lygybės puses iš dešinės iš $\varphi(g_2)^{-1} \Rightarrow e' = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)^{-1} = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2^{-1}) = \varphi(g_1\cdot g_2^{-1}) \Rightarrow$
$\Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in Ker\varphi \Rightarrow g_1 \in g_2 Ker\varphi$. Bet $g_1 \in g_1 Ker\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow g_1 \in g_1 Ker\varphi \cap g_2 Ker\varphi. \Rightarrow g_1 Ker\varphi \cap g_2 Ker\varphi \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow g_1 Ker\varphi = g_2 Ker\varphi$. Gavome prieštarą prielaidai.

Atvaizdis f - siurjekcija. Iš tikrųjų, elemento $\varphi(g) \in Im\varphi$ pirmvaizdžiu yra sluoksnis $g Ker\varphi$, nes $f(g Ker\varphi) = \varphi(g)$.

Tokiu būdu, f - izomorfizmas.

2) Tarkime, H yra grupės G normalusis daliklis. Sudarę faktorgrupę G/H, apibrėžiame atvaizdį

$$\varphi: G \to G/H \quad \text{lygybe}$$

$$\varphi(g) = gH \qquad (\forall g \in G)$$

Šia lygybe apibrėžtas atvaizdis yra homomorfizmas. Iš tikrųjų,

$$\varphi(g_1\cdot g_2) = g_1\cdot g_2 H = g_1 H\cdot g_2 H = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)$$

Atvaizdis φ - siurjekcija. Iš tikrųjų, sluoksnio gH pirmvaizdžiu yra elementas g : $\varphi(g) = gH$

Liko įrodyti lygybę $Ker\,\varphi = H$.

Tarkime, $g \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(g) = H$. Iš kitos pusės, $\varphi(g) = gH \Rightarrow gH = H \Rightarrow g \in H \Rightarrow Ker\varphi \subset H$

Tarkime, $g \in H \Rightarrow \varphi(g) = gH = H \Rightarrow g \in Ker\varphi \Rightarrow H \subset Ker\,\varphi \Rightarrow$
$\Rightarrow H = Ker\varphi$.

Teorema. (injekcinio homomorfizmo kriterijus).

Homomorfizmas $\varphi : G \to G'$ yra injekcija (monomorfizmas) tada ir tik tada, kai

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{e\}.$$

Įrodymas. Būtinumas. Taikome prieštaros būdą. Tarkime, φ – injekcija, o $\mathrm{Ker}\,\varphi \neq \{e\}$. Vadinasi, $\exists h \in \mathrm{Ker}\,\varphi : h \neq e$. $\Rightarrow \varphi(h) = e'$. Bet ir $\varphi(e) = e'$. Gavome prieštarą injekcijos apibrėžimui.

Pakankamumas. Tarkime, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{e\}$, o φ – nėra injekcija. Vadinasi, $\exists g \neq h : \varphi(g) = \varphi(h)$. Padauginę abi šios lygybės puses iš dešinės iš $(\varphi(h))^{-1}$, turėsime

$$\varphi(g)\cdot\varphi(h))^{-1} = e'$$

$$\Rightarrow e' = \varphi(g)\cdot\varphi(h^{-1}) = \varphi(gh^{-1}) \in \mathrm{Ker}\,\varphi = \{e\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow gh^{-1} = e \Rightarrow g = h$. Vėl gavome prieštarą.