Ekvivalentumo sąryšis

~~Ekvivalentiškumo~~ Ekvivalentumo sąryšio apibrėžimas. ~~Abstrakcijos principas.~~

Sąryšį $\rho \in X \times X$ vadiname ekvivalentumo sąryšiu aibėje X, jeigu ρ yra refleksyvus, simetrinis ir tranzityvus, t.y., jeigu išpildyti šie reikalavimai:

1° $x \rho x \, , \forall x \in X$

2° $x \rho y \Rightarrow y \rho x , \; \forall x, y \in X$

3° $(x \rho y \wedge y \rho z) \Rightarrow x \rho z \, , \; \forall x, y, z \in X$

Ekvivalentumo sąryšis dažnai žymimas simboliu $\sim$.

Pavyzdžiai. 1. Tegul $\mathbb{R}$ – visų realiųjų skaičių aibė, o $\sim$ binarusis sąryšis, apibrėžtas tokiu būdu: du realieji skaičiai susiję sąryšiu $\sim$ tada ir tik tada, jeigu skirtumas $x-y$ – sveikas skaičius. Tai galima užrašyti tokiu būdu:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Šis sąryšis refleksyvus, kadangi $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, simetrinis, kadangi $y - x = -(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \sim x$ ir tranzityvus, nes jei $x \sim y$ ir $y \sim z$, tai $x - y \in \mathbb{Z}$ ir $y - z \in \mathbb{Z}$, o iš čia $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Z}$, taigi $x \sim z$.

Išvada: taip apibrėžtas sąryšis yra ekvivalentumo sąryšis.

2 pvz. Tegul $\mathcal{L}$ – visų tiesių plokštumoje R^2 aibė. Tarkim $\sim$ – sąryšis aibėje $\mathcal{L}$, apibrėžtas tokiu būdu: dvi tiesės ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jos lygiagrečios. Galima patikrinti, kad šis sąryšis yra ekvivalentumo sąryšis.

3 pvz. Tegul E_2 – visų plokštumos vektorių $(\overrightarrow{p,q})$, kur p ir q – bet kurie tos plokštumos taškai, aibė. Jeigu $p=(x_1,y_1)$, $q=(x_2,y_2)$, tai vektoriaus $(\overrightarrow{p,q})$ koordinatės yra x_2-x_1, y_2-y_1. Tegul $\sim$ yra binarinis sąryšis aibėje E_2 apibrėžtas tokiu būdu, kad $(\overrightarrow{p,q}) \sim (\overrightarrow{p_1,q_1})$, jei vektoriaus $(\overrightarrow{p,q})$ ~~ky~~ koordinatės lygios vektoriaus $(\overrightarrow{p_1,q_1})$ koordinatėms.

~~4 pvz.~~

Lema. Ekvivalentumo klasių atžvilgiu sąryšio $\sim$ aibė yra aibės X skaidinys ta prasme, kad X yra sąjunga nesusikertančių poaibių (galima tai pažymėti $\pi_\sim(X)$).

Iš tikrųjų, kadangi $x \in \bar{x}$, tai $X = \bigcup_{x \in X} \bar{x}$.

Jeigu $\bar{x'} \cap \bar{x''} \neq \emptyset$ ir $x \in \bar{x'} \cap \bar{x''}$, tai $x \sim x'$ ir $x \sim x''$ ir iš tranzityvumo turėsime $x' \sim x''$, todėl $\bar{x'} = \bar{x''}$. Reiškia, skirtingos klasės nesikerta.

Grupių pogrupiai, normaliniai dalikliai

1Ap. Netuščias grupei G poaibis H vadinamas jos pogrupiu, kai:

1) $h_1 \cdot h_2 \in H \quad \forall h_1, h_2 \in H$

2) $h^{-1} \in H \quad \forall h \in H$

Pastaba. Šias dvi sąlygas galima pakeisti viena ekvivalenčia

$$h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$$

Kai H yra G pogrupis, žymėsime $H < G$.

Apibrėšime ekvivalentumo sąryšį grupėje G atžvilgiu pogrupio H. Sakysime, kad grupės G elementas a ekvivalentus b ir rašysime $a \sim b$, kai $a^{-1}b \in H$. Įrodysime, kad tai ekvivalentumo sąryšis grupėje G. Iš tikrųjų

1) $a \sim a$, nes $a^{-1}a = e \in H$

2) Jei $a \sim b$, tai $a^{-1}b \in H \Rightarrow (a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H \Rightarrow b \sim a$

3) Jei $a \sim b$, $b \sim c$, tai $a^{-1}b$, $b^{-1}c \in H \Rightarrow$

$(a^{-1}b) \cdot (b^{-1}c) = a^{-1}c \in H \Rightarrow a \sim c$ $\square$

Pažymėję klasę su atstovu a

$$\overline{a} = \{ b \in G \mid b \sim a \},$$

suskaidome grupę ekvivalentumo klasių sąjunga

$$G = \bigcup_{a \in G} \overline{a}$$

Įrodysime, kad klasė $\bar{a}$ sutampa su aibe

$$aH = \{ah \mid h \in H\}$$

Tarkime, $b \in \bar{a} \Rightarrow a \sim b \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow \exists h \in H: a^{-1}b = h$

Padauginę šios lygybės abi puses iš kairės iš a, turime

$$b = ah \Rightarrow b \in aH \Rightarrow \bar{a} \subset aH$$

Tarkime, $b \in aH. \Rightarrow \exists h \in H: b = ah$. Padauginę šios lygybės abi puses iš kairės iš a^{-1}, turime

$$a^{-1}b = h \in H. \Rightarrow a \sim b \Rightarrow b \in \bar{a} \Rightarrow aH \subset \bar{a}$$

Tokiu būdu $\bar{a} = aH$ $\square$.

Klasė aH yra vadinama grupės G <u>kairiniuoju sluoksniu</u> pagal pogrupį H.

Panašiu būdu galima apibrėžti grupėje G dar vieną ekvivalentumo sąryšį – sakome, kad elementas a yra ekvivalentus b ir rašome $a \sim b$, jei $ab^{-1} \in H$. Nesunku matyti, kad tai yra iš tikrųjų ekvivalentumo sąryšis ir klasė $\bar{a}$ sutampa su poaibiu Ha, kurį vadiname <u>dešiniuoju sluoksniu</u> (pagal pogrupį H). Tokiu būdu, grupė G gali būti išreikšta ir kairiųjų ir dešiniųjų sluoksnių sąjunga.

$$G = \bigcup_{a \in G} aH = \bigcup_{b \in G} Hb$$

Kairiųjų sluoksnių aibė $\{aH \mid a \in G\}$ nebūtinai turi sutapti su dešiniųjų sluoksnių aibe $\{Hb \mid b \in G\}$.

Išskirsime tuos grupės G pogrupius H, kuriems šios aibės sutampa.

2 Ap. Sakome, kad grupės G pogrupis H yra <u>normalusis daliklis</u> ir žymime $H \triangleleft G$, kai grupės G pagal pogrupį H kairiųjų sluoksnių aibė sutampa su dešiniųjų sluoksnių aibe.

1 T. (I normaliojo daliklio kriterijus). <u>Pogrupis H yra grupės G normalusis daliklis tada ir tik tada, kai $aH = Ha \quad \forall a \in G$.</u>

<u>Įrodymas. Būtinumas</u>. Tarkime, H yra normalusis daliklis ir aH – fiksuotas kairysis sluoksnis. Iš 2 Ap. išplaukia, kad egzistuoja dešinysis sluoksnis Hb, lygus aH. Įrodysime, kad dešinieji sluoksniai Hb ir Ha sutampa. Tam pakanka įrodyti, kad $Ha \cap Hb \neq \emptyset$

Iš tikrųjų, $a \in Ha$ ir $a \in aH = Hb$. Vadinasi, $a \in Ha \cap Hb$.

Todėl $Ha = Hb = aH$.

<u>Pakankamumas</u>. Tarkime, $aH = Ha \quad \forall a \in G$. Teiginio įrodymas išplaukia tiesiogiai iš aibių lygybės apibrėžimo. $\square$.

3 Ap. Sakome, kad grupės G elementas a yra jungtinis tos grupės elementui b, kai egzistuoja $x \in G$ toks, kad $b = x a x^{-1}$

Įsitikinsime, kad sąryšis, siejantis grupės G jungtinius elementus, yra ekvivalentumo sąryšis toje grupėje.

1. $a \sim a$, nes $a = e a e^{-1}$

2. Tarkime, $a \sim b. \Rightarrow \exists x \in G : b = x a x^{-1}$! Padauginę šios lygybės abi puses iš dešinės iš x, o iš kairės iš x^{-1} ir pasinaudoję lygybe $(x^{-1})^{-1} = x$, gauname

$$a = x^{-1} \cdot c \cdot (x^{-1})^{-1}$$

Vadinasi, $b \sim a$

3. Tarkime, $a \sim b$, $b \sim c$. $\Rightarrow \exists x, y \in G : b = x a x^{-1}$, $c = y b y^{-1} \Rightarrow c = y \cdot (x a x^{-1}) y^{-1} = y x a x^{-1} y^{-1} = (y \cdot x) a (yx)^{-1} \Rightarrow a \sim c$. $\square$

Šis ekvivalentumo sąryšis leidžia grupę G užrašyti jungtinių elementų klasių sąjunga:

$$G = \bigcup_{a \in G} \{ x a x^{-1} \mid x \in G \}$$

Pritaikysime jungtinio elemento sąvoką kitoje normaliojo daliklio kriterijaus formuluotėje.

2T (II normaliojo daliklio kriterijus). Pogrupis H yra grupės G normaliuoju dalikliu tada ir tik tada, kai su kiekvienu to pogrupio elementu h jam priklauso ir visi jo jungtiniai elementai $a h a^{-1}$, $a \in G$

Įrodymas. <u>Būtinumas</u>. Tarkime, H yra grupės G normaliuoju dalikliu, a – fiksuotas grupės G elementas. Iš 1 teoremos išplaukia lygybė $aH = Ha$. Padauginę šios lygybės abi puses iš dešinės iš a^{-1} gauname $a H a^{-1} = H$. Vadinasi, $a h a^{-1} \in H$ $\forall a \in G$.

<u>Pakankamumas</u>. Tarkime, $a h a^{-1} \in H$ $\forall a \in G, \forall h \in H$. $\Rightarrow ah \in Ha \Rightarrow aH \subset Ha$.

Iš kitos pusės $a^{-1} h (a^{-1})^{-1} = a^{-1} h a \in H \Rightarrow ha \in aH \Rightarrow Ha \subset aH$

Tokiu būdu, $aH = Ha$ $\forall a \in G$. Toliau pakanka pasinaudoti 1 teorema.

Faktorgrupė, grupių homomorfizmai

Tarkime, H yra grupės G normalusis daliklis ir
$$G/H = \{aH \mid a \in G\} -$$
grupės G kairiųjų sluoksnių aibė pagal pogrupį H. Šioje aibėje apibrėžiame algebrinę operaciją tokiu būdu:
$$aH \cdot bH = a \cdot b H$$

Apibrėžiant algebrinę operaciją tarp klasių per jų atstovus, iškyla tos operacijos apibrėžimo korektiškumo klausimas – klasių operacijos rezultatas turi nepriklausyti nuo atstovų pasirinkimo. Įrodysime, kad ši operacija apibrėžta korektiškai.

Tarkime, $a'H = aH$, $b'H = bH$. Reikia įrodyti, kad $a'b'H = abH$. Tam pakanka parodyti, kad šių sluoksnių sankirta yra netuščia aibė.

Turime $a \in aH \Rightarrow a \in a'H$, nes $a'H = aH$.
$\Rightarrow \exists h_1 \in H : a = a'h_1$

Analogiškai $\exists h_2 \in H : b = b'h_2 \Rightarrow ab = a'h_1 \cdot b'h_2$

Kadangi $h_1 b' \in Hb'$ ir $Hb' = b'H$, $\exists h_3 \in H : h_1 b' = b'h_3$.
Vadinasi, $ab = a'(h_1 b')h_2 = a'b'h_3h_2 \in a'b'H$. Bet $ab \in abH$.
Vadinasi, $abH \cap a'b'H \neq \emptyset \Rightarrow abH = a'b'H$. Todėl algebrinė operacija kairiųjų sluoksnių aibėje yra apibrėžta korektiškai. Šios operacijos atžvilgiu G/H yra grupė.
Iš tikrųjų:

1) operacija asociatyvi:
$$(aH \cdot bH)cH = a \cdot bH \cdot cH = a \cdot b \cdot cH = aH \cdot b \cdot cH = aH \cdot (bH \cdot cH)$$

$(3k+1)(3k+1) = 9k^2+6k+1$

$(3k+2)(3k+1) =$

$2 \cdot 1 = 2$

$2 \cdot 2 = 1$

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	0	2	0
2	2	0	1

$(3k+2)(3k+2) = 9k^2+6k+4$

$2\mathbb{Z}$

$m\mathbb{Z}$

$mk \cdot ml = m^2kl$

$mk + ml = m(k+l)$

Daugybos atžvilgiu

tai bus pusgrupė

Abelio grupėje

visi pogrupiai yra normalieji daliklia

$aH = Ha$

$b = xax^{-1}$

$bx = xa$

2) egzistuoja vienetinis elementas $eH = H$

$$aH \cdot eH = a \cdot eH = aH \quad \forall aH \in G/H$$

3) su kiekvienu sluoksniu aH egzistuoja jam atvirkštinis sluoksnis $a^{-1}H$:

$$a^{-1}H \cdot aH = a^{-1}aH = eH = H = a \cdot a^{-1}H = aH \cdot a^{-1}H$$

4 Ap. Grupės G kairiųjų sluoksnių grupė G/H pagal normalųjį daliklį H yra vadinama grupės G faktorgrupe pagal normalųjį daliklį H.

5 Ap. Grupės G homomorfizmu grupėje G' yra vadinamas toks atvaizdis

$\varphi: G \to G'$, kai su kiekviena grupės G elementų pora a, b teisinga lygybė

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$