# Aibių atvaizdavimai

Tegul $X$ ir $Y$ – aibės. ~~Sąlyginumą, kad~~ Taisyklę $f$, kiekvienam $X$ elementui $x$ priskiriančią aibės $Y$ elementą $f(x)$ vadinsime *funkcija* arba *atvaizdavimu* iš $X$ į $Y$. Tai žymėsime

$$f: X \to Y \quad \text{arba} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

Atvaizdavimo $f$ *vaizdu* vadinamas $Y$ poaibis, sudarytas iš elementų pavidalo $f(x)$. Jį žymėsime $\mathrm{Im}\, f$. Taigi

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(x) \mid x \in X \} = f(X) \subset Y$$

($\mathrm{Im}$ – nuo image (angl.))

Aibė

$$f^{-1}(y) = \{ x \in X : f(x) = y \}$$

yra vadinama elemento $y \in Y$ pirmvaizdžiu. Galima tai apibendrinti: jei $Y_0 \subset Y$, tai

$$f^{-1}(Y_0) = \{ x \in X : f(x) \in Y_0 \} = \bigcup_{y \in Y_0} f^{-1}(y)$$

Jeigu $y \in Y \setminus \mathrm{Im}\, f$, tai $f^{-1}(y) = \emptyset$.

Atvaizdavimas $f: X \to Y$ vadinamas *siurjektyviuoju* arba atvaizdavimu ant, kada $\mathrm{Im}\, f = Y$, jis vadinamas *injektyviuoju*, kada iš $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Atvaizdavimas $f: X \to Y$ vadinamas *bijektyviuoju* arba abipus vienareikšmiu, jeigu jis tuo pat metu injektyvus ir siurjektyvus.

Dviejų atvaizdavimų lygybė $f=g$ reiškia, kad jų atitinkamos sritys sutampa

$$X \xrightarrow{f} Y \qquad X \xrightarrow{g} Y,$$

be to $\forall x \in X \quad f(x)=g(x)$.

Dar žymėsime $\quad x \mapsto f(x)$

Pvz. taisyklei $x \mapsto x^2$ turėsime tris skirtingus atvaizdavimus

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nei siurjektyvus nei injektyvus)
$g: R \to R_+ \cup \{0\}$ (siurjektyvus, bet neinjektyvus)
$h: R_+ \to R_+$ (bijektyvus)

Vienetiniu (tapatinguoju) atvaizdavimu $e_X: X \to X$ vadinsime atvaizdavimą, pervedantį kiekvieną elementą į save $\quad e_X: X \to X \qquad e_X(x)=x$

Jei $X \subset Y$, tai atvaizdavimą

$$I: X \to Y \qquad I(x)=x$$

vadiname įdėtimi (aibės $X$ į $Y$).

Atvaizdavimą $f: X \to Y$ vadinsime atvaizdavimo $g: X' \to Y'$ siauriniu (arba apribojimu) jeigu $X \subset X'$, $Y \subset Y'$ ir $\forall x \in X$ turime $f(x)=g(x)$. Tokiu atveju atvaizdavimas $g$ yra vadinamas atvaizdavimo $f$ plėtiniu. Pvz., jei turime įdėtį $X \subset Y \quad I: X \to Y$, tai ji yra tapatingojo atvaizdavimo $e_Y: Y \to Y$ siauriniu.

Daugelio kintamųjų funkciją galime apibrėžti kaip $f: X^n \to \cancel{X}\, Y$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Y$$

Dviejų atvaizdavimų kompozicija (superpozicija)

$$g: U \to V \quad , \quad f: V \to W$$

vadinsime atvaizdavimą

$$f \circ g : U \to W,$$

apibrėžtą formule

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) \quad \forall u \in U$$

Tai galima iliustruoti tokia diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & W \\ & V \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Sakoma, kad ši diagrama <u>komutuoja</u> (yra komutatyvi).

Vietoj $f \circ g$ rašysime $fg$

$$f e_X = f, \quad e_Y f = f \quad \forall f \quad f: X \to Y$$

1 <u>Teorema</u>. Atvaizdavimų kompozicija yra asociatyvi, t.y. jei turime tris atvaizdavimus

$$h: U \to V \; , \; g: V \to W, \; f: W \to T,$$

tai $f(gh) = (fg)h$

Įrodymas.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "h"'] \arrow[drr, dashed, "\alpha"] & & T \\
V \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, dashed, "\beta"] & & W \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

$\alpha = gh$ , $\beta = fg$

Reikia patikrinti lygybę bet kuriam taške $u \in U$

$$(f(gh))u = f((gh)u) = f(g(hu)) = fg(hu) = ((fg)h)u \quad \blacksquare$$

Tačiau net ir atveju $X \to X$ atvaizdavimų kompozicija nėra komutatyvi

$$fg \neq gf$$

Kai kurios funkcijos turi atvirkštines

Jei $fg = e_Y$ $gf = e_X$, tai sakome, kad $f$ ir $g$ yra vienas kitam ~~ap~~ abipusiai atvirkštiniai atvaizdavimai. Tokiu atveju žymime $g = f^{-1}$

$$f(u) = v \Longleftrightarrow f^{-1}(v) = u$$

~~Ab~~ Abipusiai atvirkštinis atv. $f^{-1}$, jei jis egzistuoja, yra vienintelis. Jei tarsim, kad $\exists$ $g' : Y \to X$

$fg' = e_Y$ , $g'f = e_X$, turėsime

$$g' = e_X g' = (gf)g' = g(fg') = g \cdot e_Y = g$$

Taigi, abipus atvirkštinis atv. yra vienintelis, todėl jį galima žymėti $f^{-1}$.

<u>Teorema.</u> Atvaizdavimas $f: X \to Y$ turi atvirkštinį tada ir tik tada, kada jis yra bijektyvus.

<u>Lema.</u> Jei $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ bet kurie atvaizdavimai, kuriems $gf = e_X$, tai $f$ - injektyvus, o $g$ - siurjektyvus.

<u>Įr.</u> Jei $x, x' \in X$ ir $f(x) = f(x')$, tai

$$x = e_X(x) = (gf)x = g(f(x)) = (gf)x' = e_X(x') = x',$$

taigi $f$ - injektyvus. Jei $x$ - bet kuris $X$ elementas, tai $x = e_X(x) = (gf)x = g(f(x))$, taigi, $x$ yra $g$ vaizdas, reiškia $g$ - siurjektyvus.

---

Leiskime, kad $f$ turi atvirkštinį $g = f^{-1}$. Tada, kadangi $fg = e_Y$, $gf = e_X$, tai iš lemos turime, kad $f$ - siurjektyvus ir injektyvus, t.y., bijektyvus.

Atvirkščiai, jei $f$ - bijektyvus, tai $\forall y \in Y$ rasim <u>vienintelį</u> $x \in X$, kuriam $f(x) = y$. Priskyrę $g(y) = x$, turėsime atvaizdavimą tokį, kad

$$fg = e_Y, \quad gf = e_X$$

Taigi, $f^{-1} = g$.

<u>Išvada</u>. Iš to, kad atvaizdavimas $f: X \to Y$ bijektyvus, išplaukia, kad $f^{-1}$ taip pat bijektyvus; be to

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Tegul $f: X \to Y$, $h: Y \to Z$ - bijektyvūs atvaizdavimai. Tada bijektyvi ir jų kompozicija $hf$, be to

$$(hf)^{-1} = f^{-1}h^{-1}$$

<u>Teorema 3</u>. Jei $X$ baigtinė aibė ir atvaizdavimas $f: X \to X$ injektyvus, tai jis ir bijektyvus.