(1) Abstrakčiosios algebros elementarios sąvokos

1.1 <u>Abstrakčiosios algebros</u>. Tegul A – netuščia aibė. Kiekvieną atvaizdavimą $\sigma : A^m \to A$, kitaip tariant, m kintamųjų funkciją, apibrėžtą aibėje A^m, įgyjančią reikšmes aibėje A, vadinsime m argumentų algebrine operacija aibėje A. Gali būti ir atvejis $m = 0$: tokiu atveju sakysime, kad turime 0 argumentų operaciją, ją suprasime, kaip fiksuoto elemento aibėje A išskyrimą $(\sigma \in A)$.

Jeigu $m = 1$, taigi, jei turime vieno argumento (unarinę) operaciją aibėje A, tai vietoj $\sigma(a)$, $a \in A$ paprastai rašysime σa. Jei $m = 2$, t.y. kai operacija σ yra dviejų argumentų, vietoj $\sigma(a_1, a_2)$, $a_1, a_2 \in A$, rašysime dažniausiai $a_1 \circ a_2$.

Poaibis $A' \subset A$ vadinamas <u>uždaruoju</u> m-argumentų operacijos σ atžvilgiu, jeigu $\forall (a_1, \dots, a_m) \in A^m$

(1) $$(a_1 \in A' \wedge \dots \wedge a_m \in A') \Rightarrow \sigma(a_1, \dots, a_m) \in A'$$

<u>Abstrakčiąja algebra</u> arba tiesiog <u>algebra</u> vadinsime bet kurią sistemą

$$\mathcal{A} = (A, \sigma_1, \dots \sigma_n),$$

kur A – netuščia aibė ir σ_j, $j = 1, \dots, n$ – algebrinės operacijos aibėje A. Kiekvienam $j = 1, \dots n$ simboliu $m(j)$ žymėsime operacijos σ_j argumentų skaičių.

<u>Pavyzdžiai</u>

1. Tegul ~~Z~~ Z sveikųjų skaičių aibė, $+$ - sudėties operacija, $\cdot$ - daugybos operacija. Tokiu atveju

$$\mathcal{Z} = (Z, +, \cdot) \text{ — abstrakčioji algebra.}$$

2. Tegul ~~F~~ N - natūraliųjų skaičių aibė, $+$ - sudėtis, $\cdot$ - daugyba. Tada

$$\mathcal{N} = (N, +, \cdot) \text{ — abstrakčioji algebra}$$

3. Tegul $X \neq \emptyset$ - aibė, o 2^X - visų aibės X poaibių aibė. Tada

$$\mathcal{X} = (2^X, \cup, \cap, -),$$

kur $\cup$, $\cap$, $-$ atitinkamai aibių sąjungos, sankirtos ir papildinio operacijos, yra abstrakčioji algebra.

4. Tegul $A = \{0, 1\}$. Aibėje A įvesime tris operacijas $\vee, \wedge, \sim$, apibrėžtas šių lentelių pagalba:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\sim$	
0	1
1	0

~~Algebrą~~ Abstrakčiąją algebrą $(\{0, 1\}, \vee, \wedge, \sim)$ vadinsime dviejų elementų Būlio (Boole) algebra.

2 1.2 Binariosios algebros

1. Apibrėžimas. Binarioji operacija aibėje S vadinama bet kuri funkcija

$$\beta : S^2 \to S$$

Kitaip tariant, binarioji operacija yra taisyklė, kuri bet kuriems dviem elementams $x, y \in S$ priskiria elementą $\beta(x,y) \in S$, t.y., operacijos β pritaikymą elementams x, y.

Dažnai tokią operaciją patogu įsivaizduoti kaip daugybą ir vietoj $\beta(x,y)$ rašyti $x*y$, $x\beta y$ arba tiesiog xy. Reikia atsiminti, kad binarioji operacija neprivalo būti nei komutatyvi, nei asociatyvi. Konkrečiai operacijai gali atsitikti, kad $xy \neq yx$,

$$x(yz) \neq (xy)z, \text{ kitaip}$$

$$\beta(x,y) \neq \beta(y,x), \quad \beta(x,\beta(y,z)) \neq \beta(\beta(x,y),z)$$

2. Apibrėžimas. Binarioji algebra $[S, \beta]$ vadinama aibė su ~~binari~~ joje apibrėžta binariąja operacija $\beta : S^2 \to S$

Jei β asociatyvi, tai binarioji algebra $[S, \beta]$ vadinama pusgrupe.

Jei aibėje S egzistuoja elementas $1_\ell \in S$, kuriam $\beta(1_\ell, x) = x$ visiems $x \in S$, tai jis yra vadinamas kairiuoju vienetu, analogiškai elementas 1_r toks, kad $\beta(x, 1_r) = x$ $\forall x \in S$, vadinamas dešiniuoju vienetu.

Pusgrupį, kuriai priklauso elementas 1, pasižyminčią savybėmis

$$x1 = 1x = x \quad \forall x \in S,$$

vadinama <u>monoidu</u>. Pakartosime šį apibrėžimą:

<u>3 Apibrėžimas.</u> <u>Monoidu</u> $[S, \beta]$ vadinsime aibę su binariąja operacija $\beta(x,y) = xy$, tenkinančia tokias savybes:

M1. $x(yz) = (xy)z$ visiems $x, y, z \in S$ (asociatyvumas)

M2. Yra tokia $1 \in S$ ir visiems $x \in S$ teisingos lygybės

$$1x = x1 = x$$

Pastebėsime, kad iš aksiomos M2 išplaukia vieneto vienatis: jei 1 ir 1' – du vienetai, tai

$$1 = 1 \cdot 1' = 1'.$$

Jei pusgrupėje vieneto nėra, mes galime jį „prijungti" prie S, ~~pa~~ apibrėždami jam operaciją β sąlygomis $1 \cdot x = x \cdot 1$ visiems $x \in S$ ir $1 \cdot 1 = 1$. Rezultate gauname monoidą $[S \cup \{1\}, \beta]$ vietoj $[S, \beta]$.

Iš Bulio algebros $[A, \wedge, \vee, -, 0, I]$ galima sukonstruoti du monoidus

$$[A, \wedge, I] \text{ ir } [A, \vee, 0]$$

su vienetais I ir 0.

2 pavyzdys. Tarkime, turime netuščią aibę X ir visų funkcijų $f: X \to X$ (unarinių operacijų) aibę X^X. Tada $[X^X, \circ]$ - monoidas kairiosios kompozicijos atžvilgiu. Ji taip pat yra monoidas dešiniosios kompozicijos atžvilgiu.

$$f \diamond (g \diamond h) = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = (f \diamond g) \diamond h \quad (1)$$

$$1_X \diamond f = f \circ 1_X = f = 1_X \circ f = f \diamond 1_X$$

<u>1 Lema</u>. Jei binariojoje algebroje yra kairysis vienetas ir dešinysis vienetas, tai jie apibrėžti vienareikšmiškai ir sutampa su vieninteliu dvipusiu vienetu.

<u>Įrodymas</u>. Tegul 1_l ir 1_r - kairysis ir dešinysis vienetai. Tada $1_l 1_r = 1_r$, kadangi 1_l - kairysis vienetas ir $1_l 1_r = 1_l$, kadangi 1_r - dešinysis vienetas. Lema įrodyta.

<u>4 Apibrėžimas</u>. Binariojoje algebroje $[S, \beta]$ <u>kairiuoju nuliu</u> vadinamas elementas 0_l, turintis savybę $0_l x = 0_l$ visiems $x \in S$, o <u>dešiniuoju nuliu</u> - elementas 0_r, turintis savybę $x 0_r = 0_r$ $\forall x \in S$. <u>Nuliu</u> yra vadinamas elementas, esantis vienu metu kairiuoju ir dešiniuoju nuliu.

Pvz., $\emptyset$ yra nulis algebroje $[A, \wedge]$, I - nulis algebroje $[A, \vee]$.

1.3. Grupės

Monoido M elementas a vadinamas apverčiamu (iš kairės) (turinčiu kairįjį atvirkštinį), jeigu $xa=1$ tam tikram $x\in M$, ir apverčiamu iš dešinės, jei $ay=1$ tam tikram y. Elementas, turintis dešinįjį atvirkštinį ir kairįjį atvirkštinį, yra vadinamas tiesiog apverčiamu.

Lema 1. Bet kuris apverčiamas elementas $a\in M$ turi atvirkštinį elementą a^{-1} tokį, kad $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. Bet kuris elemento a kairysis ar dešinysis atvirkštinis sutampa su a^{-1}.

<u>Įrodymas</u>. Tegul b_l ir b_r – elemento a kairysis ir dešinysis atvirkštiniai. Tada

$$b_l = b_l\cdot 1 = b_l(a b_r) = (b_l a) b_r = 1 b_r = b_r$$

Todėl, tardami, kad $a^{-1}=b_l=b_r$, gauname $aa^{-1}=a^{-1}a=1$. Bet kuriam ~~kairio~~ elemento a kairiajam atvirkštiniam x turim

$$x = x(ab_r) = (xa)b_r = 1 b_r = b_r = a^{-1}$$

Analogiškai nagrinėjamas dešiniojo atvirkštinio elemento atvejis.

Apibr. Grupe, t.y., monoidu, kuriame visi elementai apverčiami, vadinama algebra $[G, \cdot, ^{-1}, 1]$, turinti šias savybes:

G1. $x(yz) = (xy)z \quad \forall\, x, y, z \in G$ (asociatyvumas)

G2. $1x = x1 = x \quad \forall\, x \in G$ (vienetas)

G3. $xx^{-1} = x^{-1}x = 1 \quad \forall\, x \in G$ (atvirkštinis)