Kinetinės energijos teorema

Ši teorema nustato santykį tarp judančio materialiojo taško kinetinės energijos ir veikiančios tašką jėgos atlikto darbo.

Materialiajam taškui, kurio masė m, judančiam dėl jėgos $\vec{F}$ poveikio pagreičiu $\vec{a}$, pritaikysime pagrindinį dinamikos dėsnį $m\vec{a} = \vec{F}$, kurį pertvarkę gausime $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$. Padauginsime abi lygties puses iš $d\vec{r}$ turėsime $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Pertvarkę lygtį gausime: $d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = dA$, nes jėgos $\vec{F}$ ir elementaraus poslinkio $d\vec{r}$ sandauga yra šios jėgos elementarusis darbas, o santykis $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ yra judančio taško greitis $\vec{v}$. Gavome materialiojo taško kinetinės energijos teoremą diferencialine forma, t. y. materialiojo taško kinetinės energijos diferencialas lygus veikiančiosios jėgos elementariajam darbui.

Integravę gautą lygtį turėsime kinetinės energijos pokyčio teoremą išplėstine forma: $\dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2} = A,$.

Kitaip tariant, materialiojo taško kinetinės energijos pokytis įveiktame kelyje lygus veikiančiosios jėgos atliktam darbui tame pačiame kelyje.

Tuo atveju, kai nagrinėjame materialiųjų taškų mechaninę sistemą, kinetinės energijos teoremai taikyti pasirenkame bet kurį vieną sistemos materialųjį tašką, kuriam ir užrašysime pagrindinį dinamikos dėsnį: $m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^v$; čia m_k – taško masė; $\vec{a}_k$ – taško pagreitis; $\vec{F}_k^i$ – tašką veikiančių išorinių jėgų atstojamoji; $\vec{F}_k^v$ – tašką veikiančių vidinių jėgų atstojamoji.

Padauginsime abi šios lygties puses iš $d\vec{r}_k$. Po lygties pertvarkymų gausime: $d\left(\dfrac{m_k v_k^2}{2}\right) = \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^v \cdot d\vec{r}_k,$.

Vienam mechaninės sistemos materialiajam taškui turime kinetinės energijos teoremos diferencialinę išraišką, pagal kurią sistemos materialiojo taško diferencialas lygus šį tašką veikiančių jėgų, tiek išorinių, tiek vidinių, elementariajam darbui.

Jeigu visiems mechaninės sistemos taškams n užrašytume tokias išraiškas ir jas sudėtume, tai, įvertinę materialiųjų taškų greičių keitimosi ribas nagrinėjamuose kelio ruožuose, po matematinių pertvarkymų gautume:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^v \cdot d\vec{r}_k,$$

arba $T - T_0 = A^i + A^v$; čia T – mechaninės sistemos kinetinė energija, kai sistemos taškai pereina į kitą padėtį; T_0 – mechaninės sistemos kinetinė energija pradiniu laiko momentu; A^i – visų išorinių jėgų, veikiančių šią sistemą, atliktų darbų suma; A^v – visų vidinių jėgų, veikiančių šią sistemą, atliktų darbų suma.

Taigi turime mechaninės sistemos kinetinės energijos pokyčio teoremą išplėstine forma. Joje sakoma, kad materialiųjų taškų mechaninės sistemos kinetinės energijos pokytis lygus visų išorinių bei vidinių jėgų darbų sumai visuose sistemos taškų nueitų kelių ruožuose.

Nagrinėjant standžiojo kūno dinamiką, įvertinę tai, kad kūno vidinių jėgų darbų suma lygi nuliui, turėsime kinetinės energijos teoremą tokiu pavidalu: $T - T_0 = A^i$.

Kinetinės energijos teorema taikoma tais atvejais, kai nagrinėjami uždaviniai apie greičių pokyčius žinomame kelio ruože.