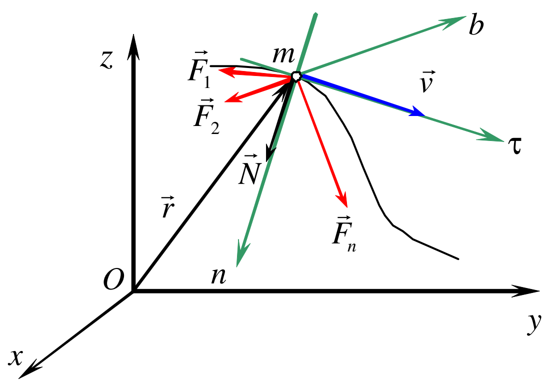
Dinamikos uždavinių apibrėžimai ir sprendimai

Taikant materialiojo taško pagrindinį dinamikos dėsnį, galima išvesti šio taško diferencialines judėjimo lygtis, kurias taikant sprendžiami materialiojo taško dinamikos uždaviniai. Jeigu nagrinėjamas objektas yra laisvasis materialusis taškas, kuris neturi judėjimo apribojimo ir gali judėti bet kokia kryptimi, tai dinamikos uždaviniams spręsti galima taikyti pagrindinį dinamikos dėsnį. Jeigu laisvąjį materialųjį tašką veikia kelios išorinės jėgos, tai dinamikos uždaviniui spręsti galima taikyti diferencialines judėjimo lygtis ir ketvirtąją dinamikos aksiomą. Jeigu nagrinėjamas judantis objektas yra nelaisvasis materialusis taškas, tai pagal statikos ryšių atlaisvinimo aksiomą nelaisvąjį kūną bus galima laikyti laisvuoju, jeigu nutrauksime esamus ryšius ir vietoj jų pridėsime atitinkamas ryšių reakcijų jėgas.

Materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys

Masės m nelaisvasis materialusis taškas juda su pagreičiu $\vec{a}$ dėl išorinių jėgų $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ poveikio (61 pav.).

Taikant ketvirtąją dinamikos aksiomą, šiam taškui galima užrašyti pagrindinį dinamikos dėsnį: $m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Dešiniojoje šios priklausomybės pusėje yra visos veikiančiosios jėgos – tiek žinomos (aktyviosios), tiek nežinomos (ryšių reakcijos), nes nelaisvajam materialiajam taškui taikome statikos ryšių atlaisvinimo principą ir pridedame nežinomas ryšių reakcijų jėgas, tuomet nelaisvasis taškas tampa laisvuoju.



61 pav. Materialiojo taško judėjimas erdvėje

Suprojektuosime pagrindinį dinamikos dėsnį į Dekarto koordinačių ašis:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy}, \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz}. \end{cases}$$

Jeigu pagrindinio dinamikos dėsnio išraišką suprojektuosime natūraliųjų ašių sistemoje, turėsime:

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{\rho} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{in}, \\ m\dfrac{d^2 s}{dt^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{i\tau}, \\ 0 = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ib}. \end{cases}$$

Taikant diferencialines lygtis sprendžiami du pagrindiniai dinamikos uždaviniai.

Pirmasis dinamikos uždavinys: žinant materialiojo taško masę m ir jo judėjimo dėsnį, reikia rasti tašką veikiančiąją jėgą.

Tarkime, žinomi masės m taško judėjimo dėsniai Dekarto koordinačių ašių atžvilgiu $x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$. Taikome diferencialines judėjimo lygtis. Veikiančiosios jėgos projekcijas į koordinačių ašis galima rasti padauginus materialiojo taško masę iš antrosios koordinačių išvestinės pagal laiką, t. y.

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{d^2 x}{dt^2}, \\ F_y = m\dfrac{d^2 y}{dt^2}, \\ F_z = m\dfrac{d^2 z}{dt^2}. \end{cases}$$

Toliau pagal jėgos projekcijas galime rasti jėgos modulį: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ ir jėgos kryptį erdvėje: $\cos\alpha = \dfrac{F_x}{F}$, $\cos\beta = \dfrac{F_y}{F}$, $\cos\lambda = \dfrac{F_z}{F}$.

Antrasis dinamikos uždavinys: žinant materialiojo taško masę m ir tašką veikiančias jėgas, reikia nustatyti taško judėjimo dėsnį.

Sprendžiant antrąjį dinamikos uždavinį į kairiąsias lygčių puses reikia įrašyti taško masę m, o į dešiniąsias – visų veikiančiųjų jėgų projekcijų sumą. Ieškomą judėjimo dėsnį gausime du kartus suintegravę šias lygtis.

Akivaizdu, kad šis uždavinys turi didesnę praktinę reikšmę ir yra gerokai sudėtingesnis už pirmąjį dinamikos uždavinį.

Atsižvelgiant į tai, kad bendruoju atveju materialųjį tašką veikiančios jėgos gali priklausyti nuo laiko, padėties arba greičio, privalu įvertinti tai, kad šių jėgų atstojamoji jėga $\vec{F}$ taip pat priklausys nuo laiko, koordinačių ir greičio projekcijų, t. y. $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z)$.

Uždaviniui spręsti taikome diferencialines judėjimo lygtis, išreikštas projekcijomis į Dekarto koordinačių ašis. Todėl nagrinėjamo materialiojo taško diferencialinės judėjimo lygtys bus tokios:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z\right), \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z\right), \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = F_z\left(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z\right). \end{cases}$$

Siekiant nustatyti, kaip juda materialusis taškas, arba, kitaip tariant, norint rasti taško judėjimo lygtis, reikia du kartus integruoti šias diferencialines judėjimo lygtis.

Po lygčių pirmojo integravimo gausime taško greičio projekcijų reikšmes su trimis integravimo konstantomis:

$$\begin{cases} v_x = \varphi_1\left(t, C_1, C_2, C_3\right), \\ v_y = \varphi_2\left(t, C_1, C_2, C_3\right), \\ v_z = \varphi_3\left(t, C_1, C_2, C_3\right). \end{cases}$$

Po antrojo integravimo gauname taško koordinačių kitimo dėsnius su šešiomis integravimo konstantomis:

$$\begin{cases} x = f_1\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right), \\ y = f_2\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right), \\ z = f_3\left(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\right). \end{cases}$$

Integravimo konstantas galime rasti pagal pradines judėjimo sąlygas, t. y. pagal žinomus taško greitį ir padėtį, pavyzdžiui, pradiniu laiko momentu.

Jeigu žinome, kad pradiniu laiko momentu, kai $t = t_0$, taškas yra padėtyje, kurios koordinatės $x = x_0$, $y = y_0$ ir $z = z_0$, ir turi pradinį greitį, kurio projekcijos $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y}$ ir $v_z = v_{0z}$, tai, įrašę šias reikšmes į greičių ir koordinačių bendruosius sprendimus, rasime visas integravimo konstantas $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$. Įvertinę konstantų reikšmes, gausime tokio pavidalo materialiojo taško judėjimo lygtis:

$$\begin{cases} x = f_1\left(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right), \\ y = f_2\left(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right), \\ z = f_3\left(t, x_0, y_0, z_0, v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\right). \end{cases}$$

Matome, kad kai materialųjį tašką veikia ta pati išorinė jėga, taško judėjimas priklausys nuo pradinių sąlygų.

Pavyzdžiui, materialusis taškas dėl sunkio poveikio gali:

1. judėti vertikaliai žemyn, jeigu buvo paleistas laisvai kristi;
2. judėti pradiniu momentu į viršų, jeigu jam buvo suteiktas vertikalios krypties greitis;
3. judėti tam tikra trajektorija, jei įgijo greitį, nelygiagretų horizontui.

Jėga, veikianti materialųjį tašką, gali būti:

1. nekintanti;
2. priklausanti nuo laiko;
3. priklausanti nuo judėjimo greičio;
4. priklausanti nuo taško padėties.