Pratybos

1. Įrodykite, kad $\mathbb{Q}$ yra skaiti aibė.

2. Pateikite pavyzdį aibės $S \subset \mathbb{R}$, kuri nėra nei atviroji, nei uždaroji.

3. Turime aibę $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Ištirkite ar ši aibė yra
a) atviroji; b) uždaroji; c) kompaktiška.

4. Naudodami intervalo dalijimo pusiau metodą (žr. Bolcano-Vejerštraso teoremos įrodymą) sukonstruokite seką $\{x_n\}$, kuri konverguoja į aibės $(0, 2)$ tikslųjį viršutinį rėžį.

5. Sukonstruokite seką $\{x_n\}$, kuri konverguoja į aibės

$$S = \left\{\frac{1}{3}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{5}{7}, \ \frac{7}{9}\right\}$$

tikslųjį viršutinį rėžį.

6. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = 1/x$ yra tolydi, bet nėra tolygiai tolydi intervale $(0, 1)$.

7. Patikrinkite, kad funkcija

$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|, \quad x, y \in \mathbb{R}^N$$

apibrėžia metriką vektorių erdvėje $\mathbb{R}^N$. Įrodykite, kad ši metrika yra ekvivalenti metrikoms d_2 ir d_∞.

8. Įrodykite, kad funkcijos

$$d_M(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad d_D(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

apibrėžia metrikas realiųjų skaičių erdvėje $\mathbb{R}$, bet jos nėra tarpusavyje ekvivalenčios (ir nekvivalenčios metrikai d_1).

Tirdami ar funkcijai $d_M(x,y)$ teisinga trikampio nelygybės aksioma, pasinaudokite tuo, kad funkcija $f(x) = x/(1+x)$, $x \geq 0$ yra didėjanti. Tada gauname tokius įverčius

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}.$$

9. Įrodykite, kad $x_k \Rightarrow x$ metrikoje d_1 tada ir tik tada, kai $x_k \Rightarrow x$ metrikoje d_M, nors šios metrikos ir nėra ekvivalenčios.

10. Įrodykite, kad funkcija

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

apibrėžia metriką aibėje $B[0,1]$, bet naujoji metrika nėra ekvivalenti tolygiajai metrikai

$$d(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|, \quad f,g \in C[a,b].$$

11. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ pavaizduokite rutulius, atitinkančius metrikas d_1, d_2 ir d_∞.

12. Tarkime, kad aibės A_k, $k = 1,2,\ldots$ yra atvirosios. Įrodykite, kad baigtinė atvirųjų aibių sankirta $\cap_{k=1}^n A_k$ ir bet kurio skaičiaus atvirųjų aibių sąjunga $\cup_{k=1}^\infty A_k$ yra atvirosios aibės.

13. Tarkime, kad aibės A_k, $k = 1,2,\ldots$ yra uždarosios. Įrodykite, kad baigtinė uždarųjų aibių sąjunga $\cup_{k=1}^n A_k$ ir bet kurio skaičiaus atvirųjų aibių sankirta $\cap_{k=1}^\infty A_k$ yra uždarosios aibės.

14. Tarkime, kad $A \subset T \subset \mathbb{X}$. Įrodykite, kad

$$a)\ \bar{A} \subset \bar{T}, \qquad b)\ \bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

15. Metrinės erdvės $(\mathbb{R}, d)$ aibei $A = [0,1)$ raskite aibes $\mathring{A}$, $\bar{A}$, ∂A.

16. Įrodykite, kad teisingi tokie teiginiai:

a) $\mathrm{diam}\,(A) = 0$ tada ir tik tada, kai aibėje A yra tik vienas elementas;

b) jei $A \subset B$, tai $\mathrm{diam}\,(A) \leq \mathrm{diam}\,(B)$;

c) $\mathrm{diam}\,(S_r(x)) = \mathrm{diam}\,(B_r(x)) \leq 2r$.

17. Imkime metrinę erdvę $(\mathbb{N}, d)$, kai metrika apibrėžta taip (patikrinkite kad ši funkcija tikrai apibrėžia metriką)

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{xy}, \quad x, y \in \mathbb{N}.$$

Ar sekos

$$\begin{aligned} &a)\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \\ &b)\ 2,\ 1,\ 4,\ 2,\ 6,\ 3, \ldots,\ 2n,\ n,\ \ldots \\ &c)\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ \ldots,\ 1,\ n,\ \ldots \end{aligned}$$

yra Koši sekos?

18. Įrodykite, kad atvaizdis $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ yra tolydus tada ir tik tada, kai kiekvienos atvirosios aibės $A \subset \mathbb{Y}$ pirmvaizdis $f^{-1}(A) \subset \mathbb{X}$ yra atviroji aibė.

19. Įrodykite, kad atvaizdžiai $F:\ C[0,1] \to \mathbb{R}$ yra tolydūs ervėje $C[0,1]$:

$$\begin{aligned} &a)\ F(v) = v(0), \quad v \in C[0,1]. \\ &b)\ F(v) = \max_{0 \leq t \leq 1} |v(t)|, \quad v \in C[0,1]. \\ &c)\ F(v) = \int_0^1 \sin\big(v(t)\big)\,dt, \quad v \in C[0,1]. \end{aligned}$$

20. Ar atvaizdžiai $F:\ C[0,1] \to C[0,1]$ yra tolydūs:

$$\begin{aligned} &a)\ F(v)(t) = \int_0^t v(s)\,ds, \quad v \in C[0,1]. \\ &b)\ F(v)(t) = \int_0^1 \sin(t - s)v(s)\,ds, \quad v \in C[0,1]. \end{aligned}$$

21. Sukonstruokite šių aibių ε-tinklus, kai $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$:

$$
\begin{aligned}
&a)\, K_1 = \big\{(x,y): \ \ |x| \le 1,\ |y| \le 1\big\} \subset \mathbb{R}^2,\\
&b)\, K_2 = \big\{(x,y): \ \ x^2 + y^2 = 1\big\} \subset \mathbb{R}^2,\\
&c)\, K_3 = \Big\{(x_1, x_2, \dots, x_n): \ \ \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \le 1\Big\} \subset \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

22. Kada aibė $A \subset \mathbb{X}$ yra kompaktiška diskrečiojoje metrikoje

$$
d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y,\\ 1, & x \ne y. \end{cases}
$$

23. Kada šios aibės yra reliatyviai kompaktiškos metrinėje erdvėje $C[0,1]$:

$$
\begin{aligned}
&a)\, A_1 = \big\{\, at + b,\ \ a \in [0,1],\ b \in [0,1]\,\big\},\\
&b)\, A_2 = \big\{\, t^n, \quad n \in \mathbb{N}\,\big\},\\
&c)\, A_3 = \big\{\, \sin(nt), \quad n \in \mathbb{N}\,\big\}, \quad d)\, A_4 = \big\{\, \sin(n+t), \quad n \in \mathbb{N}\,\big\}.
\end{aligned}
$$

24. Parodykite, kad tiesinės erdvės elemento x priešingas elementas $(-x)$ tenkina sąryšį

$$
(-x) = -1 \cdot x.
$$

25. Nagrinėkime n-matę tiesinę erdvę $\mathbb{R}^n$, jos elementai-vektoriai $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Apibrėžiame tokias normas (patikrinkite, kad jos tenkina visas 3 aksiomas):

$$
\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^2, \quad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.
$$

Įrodykite, kad šios normos ekvivalenčios, t.y. suraskite atitinkmas konstantas m_1, m_2.

26. Įrodykite, kad tiesinio operatoriaus A vaizdas $R(A)$ ir nulinė aibė $N(A) = \{x:\ Ax = 0\}$ yra tiesinių erdvių $\mathbb{Y}$ ir $\mathbb{X}$ poerdviai.

26. Tegul $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Patikrinkite, kad tolydžiųjų funkcijų aibė $C(\Omega)$ sudaro tiesinę erdvę, kai elementų suma ir sandauga iš skaliaro apibrėžiama įprastiniu būdu:

$$1)\ \big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in \Omega,$$

$$2)\ \big(\alpha f\big)(x) = \alpha f(x), \quad x \in \Omega.$$

27. Nagrinėkime poaibius $\mathbb{X}$, $\widetilde{\mathbb{X}} \subset \mathbb{R}^3$:

$$1)\ \mathbb{X} = \big\{x:\ x = (x_1,\, x_2,\, 0), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\},$$

$$2)\ \widetilde{\mathbb{X}} = \big\{x:\ x = (x_1,\, x_2,\, 1), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\big\}.$$

Įrodykite, kad $\mathbb{X}$ yra tiesinis poerdvis, o $\widetilde{\mathbb{X}}$ nėra tiesinis poerdvis.

28. Įrodykite, kad tiesinėje erdvėje $C[0,1]$ funkcijos $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ yra tiesiškai nepriklausomos.

29. Kada aibė

$$\mathbb{X} = \big\{f:\ \ f \in C[0,1], \quad f(0) = a\big\}$$

yra tiesinė erdvė?

30. Įrodykite, kad diferencialinės lygties

$$u''(x) + u(x) = 0$$

tolydžiųjų sprendinių aibė sudaro tiesinę erdvę.

31 uždavinys. Funkcija $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ apibrėžta intervale $(0,1)$. Rasime, kada $f(x) \in L_p(0,1)$, $p \geq 1$.