

1.9. Tolydieji ir susitraukiantieji atvaizdžiai

Šioje paskaitoje apibendrinsime svarbias funkcijų savybes, išnagrinėtas matematinės analizės paskaitose. Parodysime, kaip ši teorija naudojama sprendžiant netiesines ir integralines lygtis.

1.9.1. Tolydieji atvaizdžiai

28 apibrėžimas. Tarkime, kad turime metrinės erdves $\{\mathbb{X}, d_X\}$ ir $\{\mathbb{Y}, d_Y\}$. Imkime aibę $X_0 \subset \mathbb{X}$. Atvaizdis $f : X_0 \rightarrow \mathbb{Y}$ yra tolydus taške $x_0 \in X_0$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, kad

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \text{su visais } x \in S_\delta(x_0) \cap X_0.$$

Atvaizdis $f : X_0 \rightarrow \mathbb{Y}$ vadinamas tolydžiuoju, jei jis tolydus kiekviename aibės X_0 taške. Atvaizdis f vadinamas tolygiai tolydžiu, jei $\delta(\varepsilon, x_0)$ nepriklauso nuo x_0 , t.y. toks pat $\delta = \delta(\varepsilon)$ yra tinkamas visuose aibės X_0 taškuose.

Pavyzdžiui, funkcija $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ yra tolydi, bet ne tolygiai tolydi intervale $(0, 1)$.

1.5 lema. Tegu $f : X_0 \rightarrow \mathbb{Y}$ yra tolydus atvaizdis. Tada teisingi tokie teiginiai:

- a) Jei $\{x_n\} \subset X_0$ – Koši seka, tai $\{f(x_n)\} \subset \mathbb{Y}$ irgi yra Koši seka.
- b) Jei $x_n \Rightarrow \bar{x} \in X_0$, kai $n \rightarrow \infty$, tai $f(x_n) \Rightarrow f(\bar{x})$. Šį teiginį užrašome ir taip

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(\bar{x}).$$

Irodymas. Abu teiginiai įrodomi labai panašiai, todėl pateiksime tik antrojo teiginio išsamią analizę. Kadangi f tolydus atvaizdis taške $\bar{x}$, todėl kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x})$, kad

$$d_Y(f(x), f(\bar{x})) < \varepsilon \quad \text{su visais } x \in S_\delta(\bar{x}) \cap X_0.$$

Seka $x_n \Rightarrow \bar{x}$, kai $n \rightarrow \infty$, todėl egzistuoja toks N_δ , kad su visais $n \geq N_\delta$ teisingas įvertis $d_X(x_n, \bar{x}) < \delta$, t.y. $x_n \in S_\delta(\bar{x})$. Iš šių dviejų įverčių gauname, kad

$$d_Y(f(x_n), f(\bar{x})) < \varepsilon \quad \text{kai } n \geq N_\delta,$$

taigi $f(x_n) \Rightarrow f(\bar{x})$ metrinėje erdvėje $\mathbb{Y}$. $\square$

Dabar tirsime atstumo funkcijų tolydumą.

1.6 lema. Fiksuokime metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ tašką $a \in \mathbb{X}$ ir apibrėžkime funkciją

$$f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = d(x, a).$$

Funkcija f yra tolygiai tolydi.

Irodymas. Lemos teiginys seka iš metrikos trikampio nelygybės aksiomos

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y),$$

nes tada gauname, jog $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, kai $d(x, y) < \varepsilon$. Taigi galime imti $\delta = \varepsilon$ ir šis pasirinkimas nepriklauso nuo x, y . $\square$

Be įrodymo pateiksime dvi teoremas, kuriose suformuluotos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad atvaizdis būtų tolydus. Kiekviena iš šių sąlygų gali būti naudojama kaip alternatyvus atvaizdžio tolydumo apibrėžimas. Beje, įvairiuose vadovėliuose autoriai apibrėžia tolydumą imdami skirtingas (bet ekvivalenčias) sąlygas, tokiu atveju mūsų pasirinktas apibrėžimas jau įrodomas kaip būtinoji ir pakankamoji atvaizdžio tolydumo sąlyga.

1.17 teorema. Atvaizdis $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ yra tolydus taške $x_0 \in \mathbb{X}$ tada ir tik tada, kai kiekvienai konverguojančiai į x_0 sekai $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ riba

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

1.18 teorema. Atvaizdis $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ yra tolydus tada ir tik tada, kai kiekvienos atvirosios aibės $A \subset \mathbb{Y}$ pirmvaizdis $f^{-1}(A) \subset \mathbb{X}$ yra atviroji aibė.

1.9.2. Susitraukiantieji atvaizdžiai

29 apibrėžimas. Atvaizdis $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ vadinamas susitraukiančiuoju, jei egzistuoja toks skaičius $0 \leq q < 1$, kad

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y) \quad \text{su visais } x, y \in \mathbb{X}.$$

Taškas $x \in \mathbb{X}$, su kuriuo $x = f(x)$, vadinamas atvaizdžio f *nejudamuoju* tašku.

Labai svarbias pakankamas sąlygas, kada egzistuoja vienintelis nejudamasis taškas suformulavo lenkų matematikas S. Banachas.

1.19 teorema. Tarkime $\mathbb{X}$ – pilna metrinė erdvė. Jei atvaizdis $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ yra susitraukiantysis, tai

a) egzistuoja vienintelis nejudamasis atvaizdžio f taškas x_* ;

b) su kiekvienu $x_0 \in \mathbb{X}$ paprastųjų iteracijų seka $\{x_n\}$

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

konverguoja į x_* , konvergavimo greitį įvertiname nelygybe

$$d(x_n, x_*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, f(x_0)).$$

Irodymas. Įrodysime, kad $\{x_n\}$ yra Koši seka. Pirmiausia įvertinsime atstumą tarp gretimų sekos narių

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq q d(x_k, x_{k-1}) \\ &\leq q^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \dots \leq q^k d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Imkime $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ ir įvertinkime atstumą tarp bet kurių dviejų sekos narių

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \dots + q^n) d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Kadangi $0 \leq q < 1$, tai $q^n \rightarrow 0$, kai $n \rightarrow \infty$, todėl $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$, kai $n, m \rightarrow \infty$. Vadinasi $\{x_n\}$ yra Koši seka. Kadangi $\mathbb{X}$ – **pilna** metrinė erdvė, tai egzistuoja riba $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_* \in \mathbb{X}$. Kiekvienas susitraukiantis atvaizdis yra tolydus, todėl

$$x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_*).$$

Taigi x_* yra atvaizdžio f nejudamasis taškas. Parodysime, kad toks taškas yra vienintelis. Tarkime priešingai, kad egzistuoja dar vienas nejudamasis taškas $y_* = f(y_*)$ ir $x_* \neq y_*$. Apskaičiuosime atstumą tarp šių taškų

$$d(x_*, y_*) = d(f(x_*), f(y_*)) \leq q d(x_*, y_*).$$

Ši nelygybė teisinga tik kai $d(x_*, y_*) = 0$, o tada iš atstumo funkcijos viena-ties aksiomos gauname, kad $x_* = y_*$.

Artinio x_n paklaidos įvertinimas seka iš jau įrodyto atstumo tarp bet kurių dviejų sekos narių įverčio:

$$d(x_n, x_*) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Teorema įrodyta. $\square$

Susitraukiančio atvaizdžio reikalavimas yra stipresnis už kitą panašų reikalavimą – kad atvaizdis būtų nesiplečiantis:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Parodysime, kad tokios savybės neužtenka, kad egzistų atvaizdžio f nejudamasis taškas. Norėdami tuo įsitikinti, nagrinėkime funkciją

$$f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty), \quad f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Funkcija apibrėžia nesiplečiantį atvaizdį, nes

$$\left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| x - y - \frac{x - y}{xy} \right| = \left| \left(1 - \frac{1}{xy} \right) (x - y) \right| < |x - y|.$$

Tačiau šis atvaizdis neturi nejudamojo taško, nes

$$x = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = 0,$$

o ši lygtis neturi baigtinio sprendinio.

Nejudamojo taško metodą galime apibendrinti platesnei atvaizdavimų aibei, kai f nėra susitraukiantis atvaizdis. Tarkime, kad turime atvaizdį $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, tada apibrėžiame atvaizdį $f^n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ naudodami rekursiją:

$$f^n(x) = f^{n-1}(f(x)), \quad \text{kai } x \in \mathbb{X}, \quad n > 1.$$

1.20 teorema. Tarkime $\mathbb{X}$ – pilna metrinė erdvė. Jei egzistuoja toks $n \in \mathbb{N}$, kad atvaizdis $f^n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ yra susitraukiantysis ir $0 \leq q < 1$ yra jo susitraukimo konstanta, tai

- a) egzistuoja vienintelis nejudamasis atvaizdžio f taškas x_* ;
- b) su kiekvienu $x_0 \in \mathbb{X}$ paprastųjų iteracijų seka $\{x_m\}$

$$x_m = f(x_{m-1}), \quad m = 1, 2, \dots$$

konverguoja į x_* , konvergavimo greitį įvertiname nelygybe

$$d(x_m, x_*) \leq \frac{q^{m/n}}{1 - q^{1/n}} C(x_0).$$

Irodymas. Kadangi atvaizdis f^n yra susitraukiantis, tai iš Banacho teoremos gauname, kad egzistuoja vienintelis šio atvaizdžio nejudamasis taškas

$$x_* = f^n(x_*), \quad x_* \in \mathbb{X}.$$

Nagrinėkime į ką atvaizdis f^n atvaizduoja elementą $f(x_*)$:

$$f^n(f(x_*)) = f^{n+1}(x_*) = f(f^n(x_*)) = f(x_*).$$

Taigi $f(x_*)$ irgi yra atvaizdžio f^n nejudamasis taškas. Tačiau toks taškas yra vienintelis, todėl $x_* = f(x_*)$, vadinasi x_* yra ir atvaizdžio f nejudamasis taškas. Kiti teoremos teiginiai įrodomi visiškai panašiai kaip ir Banacho teoremos atveju. $\square$

12 pavyzdys. Tarkime, kad turime funkciją $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Metrinė erdvė $(\mathbb{R}, d)$, su metrika $d(x, y) = |x - y|$ yra pilna. Tada funkcijos f nejudamojo taško $x = f(x)$ radimo uždavinys yra ekvivalentus lygties

$$x - f(x) = 0$$

sprendinių paieškai. Rasime pakankamąją sąlygą, kad atvaizdis f būtų susitraukiantis. Tarkime, kad funkcija f yra diferencijuojama ir

$$|f'(x)| \leq \alpha < 1.$$

Panaudoję Teiloro formulę su liekamuoju nariu, užrašytu Lagranžo forma, gauname

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\tilde{x})(x - y)| \leq \alpha|x - y|,$$

čia $\tilde{x} = x + \theta(y - x)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Taigi tada atvaizdis f yra susitraukiantis ir iš Banacho teoremos gauname, kad egzistuoja vienintelis nejudamasis taškas, kurį galime apskaičiuoti paprastųjų iteracijų metodu.

Kai sprendžiame netiesines lygtis, reikia stengtis pertvarkyti lygtį taip, kad gautume uždavinį apie nejudamojo taško radimą, o atvaizdis būtų susitraukiantysis. Imkime lygtį

$$x + 2 \ln x = 0$$

ir ieškokime jos sprendinių intervale $[0, 1]$. Trivialiai gauname nejudamojo taško uždavinį $x = -2 \ln x$. Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = -2 \ln x$ išvestinę

$$f'(x) = -\frac{2}{x}, \quad \text{todėl} \quad |f'(x)| > 1$$

ir toks atvaizdis nėra susitraukiantis. Tačiau tą pačią lygtį galime pertvarkyti į nejudamojo taško uždavinį ir kitaip

$$\ln x = -\frac{x}{2} \implies x = e^{-x/2}.$$

Atvaizdis $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $F(x) = e^{-x/2}$ yra susitraukiantysis, nes

$$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2} \implies |F'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1, \text{ kai } x \in [0, 1].$$

Metrinė erdvė $([0, 1], d)$ yra pilna, nes uždarysis intervalas $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, o $\mathbb{R}$ yra pilna metrinė erdvė. Todėl iš Banacho teoremos gauname, kad egzistuoja vienintelis lygties sprendinys $x_* \in [0, 1]$.

Integralinės lygties sprendimas. Spręskime tiesinę integralinę lygtį

$$u(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) u(s) ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

čia u – ieškomoji funkcija, f ir K – duotosios funkcijos, λ – konstanta.

1.21 teorema. Tarkime, kad išpildytos dvi sąlygos:

1. $f \in L_2(a, b)$, t.y. $\int_a^b f^2(t) dt < \infty$;
2. Funkcija $K(t, s)$ yra tolydi abiejų argumentų atžvilgiu.

Tada pakankamai mažiems $|\lambda| \leq \lambda_0$ integralinė lygtis turi vienintelį sprendinį $u \in L_2(a, b)$.

Irodymas. Kadangi $K(t, s)$ yra tolydi abiejų argumentų atžvilgiu, tai ji ir aprėžta uždaroje aibėje $[a, b] \times [a, b]$, o tada ir integruojama funkcija. Pažymėkime

$$P^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(t, s) ds dt < \infty.$$

Atvaizdį $F : L_2(a, b) \rightarrow L_2(a, b)$ apibrėžkime taip

$$F(v)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) v(s) ds + f(t), \quad t \in [a, b], \quad v \in L_2(a, b).$$

Tada integralinės lygties sprendinys $u(t)$ yra atvaizdžio F nejudamasis taškas

$$u = F(u), \quad u \in L_2(a, b).$$

Kadangi metrinė erdvė $L_2(a, b)$ pilna, tai iš Banacho teoremos gauname, kad toks taškas egzistuoja, jei atvaizdis F yra susitraukiantis. Skaičiuokime atstumo tarp dviejų funkcijų $v, w \in L_2(a, b)$ vaizdų kvadratą:

$$\begin{aligned} \left(d(F(v), F(w))\right)^2 &= \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s)(v(s) - w(s)) ds \right)^2 dt \\ &\leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(t, s) ds \int_a^b (v(s) - w(s))^2 ds dt \leq \lambda^2 P^2 (d(v, w))^2. \end{aligned}$$

Taigi $d(F(v), F(w)) \leq \lambda P d(v, w)$ ir kai $|\lambda|P \leq q < 1$, atvaizdis F yra susitraukiantis. $\square$