1.7. Pilnosios metrinės erdvės

Konverguojančios sekos $\{x_n\}$ apibrėžime turime žinoti (atspėti, suformuluoti hipotezę), kam yra lygi riba x ir tik tada galime patikrinti, ar duotoji seka konverguoja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Todėl labai svarbu rasti sąlygas, kada konvergavimą galime tirti naudodami tik informaciją apie sekos elementus. Realiųjų skaičių aibėje parodėme, kad seka $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ konverguoja tada ir tik tada, kai ji yra Koši seka. Taigi Koši sekos savybė yra būtina ir pakankama tokių sekų konvergavimo sąlyga. Čia svarbu prisiminti, kad Koši sekos apibrėžime naudojame tik informaciją apie sekos elementus, taigi tai konstruktyvus apibrėžimas.

Apibendrinsime šį apibrėžimą ir sekoms bet kokioje metrinėje erdvėje $\{\mathbb{X}, d\}$.

25 apibrėžimas. Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ seka $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ yra vadinama Koši seka, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{su visais} \ \ n, m \geq N_\varepsilon.$$

Pateiksime keletą tvirtinimų apie tokių sekų savybes.

1.12 teorema. *Koši seka $\{x_n\}$ yra aprėžta.*

Įrodymas. Šią teoremą įrodome visai taip pat, kaip ir realiųjų skaičių atveju. Iš sekos apibrėžimo seka, jog egzistuoja toks $N_1 \in \mathbb{N}$, kad

$$d(x_n, x_m) < 1 \quad \text{su visais} \ \ n, m \geq N_1.$$

Tada $\{x_n\} \subset B_r(x_m)$, kur

$$r = \max\{d(x_1, x_m), d(x_2, x_m), \ldots, d(x_{N_1}, x_m), 1\},$$

taigi seka $\{x_n\}$ yra aprėžta. $\square$

1.13 teorema. *Kiekviena konverguojanti seka $\{x_n\}$ yra ir Koši seka.*

Įrodymas. Įrodymas vėl toks pat, kaip realiųjų skaičių atveju. Jeigu seka $\{x_n\}$ konverguoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime rasti tokį $N = N(\varepsilon)$, kad su visais $n, m \geq N$ teisingi įverčiai $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ ir $d(x_m, x) < \varepsilon/2$. Tada, pasinaudoję trikampio nelygybe ir metrikos simetriškumu, gauname įvertį

$$d(x_n, x_m) \leq d((x_n, x) + d(x, x_m) \leq d((x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon.$$

Teorema įrodyta. □

Tačiau ne kiekviena Koši seka yra konverguojanti seka, pavyzdžiui pirmoje paskaitoje sukonstravome racionaliųjų skaičių seką, kuri yra Koši seka, bet nekonverguoja į jokį racionalų skaičių (ji konvergavo į realųjį skaičių $\sqrt{2}$).

Todėl svarbu išskirti tokias metrines erdves, kai Koši sekos savybė yra ne tik būtina bet ir pakankama sekos konvergavimo sąlyga.

26 apibrėžimas. Metrinė erdvė $(\mathbb{X}, d)$ vadinama pilnąja, jei kiekviena jos Koši seka konverguoja.

Norint įrodyti, kad Koši seka konverguoja, pakanka įsitikinti, kad kuris nors jos posekis konverguoja.

1.4 lema. *Jei Koši seka turi konverguojantį posekį, tai ji ir pati konverguoja.*

Įrodymas. $\{x_n\}$ yra metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ Koši seka, todėl kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks N_ε, kad $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, kai $n, m \geq N_\varepsilon$. Jei $\{x_{n_k}\}$ yra konverguojantis šios sekos posekis, tai imdami $n_k \geq N_\varepsilon$ gauname

$$d(x_n, x_{n_k}) < \varepsilon, \quad \text{kai } \ n \geq N_\varepsilon.$$

Jei $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$, tai gautoje nelygybėje perėję prie ribos, kai $k \to \infty$, ir pasinaudoję atstumo funkcijos tolydumu, įrodome nelygybę

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon, \quad \text{kai } \ n \geq N_\varepsilon.$$

Tada iš ribos apibrėžimo gauname, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Šią teoremą galima aiškinti ir tokia analogija: jei reikia įvertinti Technomatematikos grupės studentų funkcinės analizės žinias, tai teisingą atsakymą galime gauti ir išegzaminavę tik dalį studentų, kai visų studentų žinios yra labai panašios (t.y. grupė sudaro Koši seką). Aišku egzaminui privalo ruoštis visi studentai (jie iš anksto nežino, kuriuos studentus pasirinks dėstytojas).

Pilnųjų metrinių erdvių aibė išsiplečia, panaudojus tokį teiginį.

1.14 teorema. *Jei* $\mathbb{Y}$ *yra* **uždara** *pilnos metrinės erdvės* $(\mathbb{X}, d)$ *aibė, tai poerdvis* $(\mathbb{Y}, d)$ *yra pilna metrinė erdvė.*

Įrodymas. Tarkime, kad $\{x_n\} \subset \mathbb{Y}$ yra Koši seka, tada ji yra ir erdvės $\mathbb{X}$ Koši seka, taigi egzistuoja riba $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pagal apibrėžimą elementas $x \in \mathbb{X}$ yra aibės $\mathbb{Y}$ ribinis taškas, bet aibė $\mathbb{Y}$ yra uždara, todėl $x \in \mathbb{Y}$. Vadinasi $(\mathbb{Y}, d)$ yra pilna metrinė erdvė. $\square$

8 pavyzdys. Parodysime, kad teoremoje aibės $\mathbb{Y}$ uždarumas yra būtina metrinės erdvės $(\mathbb{Y}, d)$ pilnumo sąlyga. Imkime $\mathbb{Y} = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ir atstumo funkciją $d(x,y) = |x-y|$. Žinome, kad metrinė erdvė $(\mathbb{R}, d)$ pilna, o aibė $(0,1)$ atvira.

Nagrinėkime seką $\{x_n = 1/n\} \subset \mathbb{Y}$. Parodysime, kad tai Koši seka. Kiekvienam $\varepsilon > 0$ pasirinkime N_ε kaip mažiausią sveikąjį skaičių didesnį už $1/\varepsilon$. Tada su visais $n, m \geq N_\varepsilon$

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Taigi $\{x_n = 1/n\}$ yra Koši seka. Nesunku patikrinti, kad ši seka konverguoja $x_n \to 0$, bet $0 \notin (0,1)$. Vadinasi seka $\{1/n\}$ nekonverguoja aibėje $\mathbb{Y}$.

9 pavyzdys. Parodysime, kad metrinė erdvė $\mathbb{R}^p$ yra pilna. Priminsime, kad sekos $\{X_n\} \subset \mathbb{R}^p$ konvergavimas yra ekvivalentus kiekvienos koordinačių sekos konvergavimui. Tarkime, kad turime Koši seką $\{X_n\} \subset \mathbb{R}^p$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius N_ε, kad su visais $n, m \geq N_\varepsilon$ teisingas įvertis

$$\sum_{k=1}^{p} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2 < \varepsilon^2.$$

Iš šios nelygybės gauname įverčius kiekvienai koordinatei

$$|x_{n,k} - x_{m,k}| < \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, p,$$

todėl sekos $\{x_{n,k}\} \subset \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, p$ yra Koši sekos ir jos konverguoja, nes $\mathbb{R}$ yra pilna metrinė erdvė.

10 pavyzdys. Dabar nagrinėsime sudėtingesnį pavyzdį ir įrodysime, kad ℓ_p yra pilna metrinė erdvė. Analizę atliksime, kai $1 \leq p < \infty$. Priminsime, kad ℓ_p sudaryta iš realiųjų skaičių sekų, kurioms eilutė $\sum_j |x_j|^p$ konverguoja:

$$X = \{x_j\} \in \ell_p \ \text{ tada ir tik tada, kai } \ \sum_j |x_j|^p < \infty.$$

Atstumas tarp dviejų sekų $X, Y \in \ell_p$ yra skaičiuojamas taip:

$$d(X,Y) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\Big)^{1/p}, \ \text{kai} \quad p \geq 1.$$

Tarkime, kad $\{X_n\}$ yra erdvės ℓ_p elementų Koši seka, tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius N_ε, kad su visais $n, m \geq N_\varepsilon$ teisingas įvertis

$$d(X_n, X_m) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^p < \varepsilon^p.$$

Iš šios nelygybės gauname įverčius $|x_{n,k} - x_{m,k}| < \varepsilon$, taigi realiųjų skaičių seka $\{x_{n,k}\} \subset \mathbb{R}$ yra Koši seka kiekvienam fiksuotam $k \geq 1$. Kadangi realiųjų skaičių metrinė erdvė yra pilna, tai egzistuoja ribos

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = x_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Sudarykime naują realiųjų skaičių seką $X = \{x_k\} \subset \mathbb{R}$. Pirmiausia parodysime, kad $X \in \ell_p$. Pasirinkime sveikąjį skaičių $J > 1$ ir imkime $n \geq N_\varepsilon$, tada naudodami Minkovskio nelygybę gauname įverčius

$$\Big(\sum_{k=1}^{J} |x_k|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{k=1}^{J} |x_{n,k} - x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^{J} |x_{n,k}|^p\Big)^{1/p}.$$

Iš nelygybės $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^p < \varepsilon^p$ triviliai gauname įvertį dalinei sumai $\sum_{k=1}^{J} |x_{n,k} - x_{m,k}|^p < \varepsilon^p$. Perėję prie ribos $m \to \infty$ ir pasinaudoję metrikos tolydumu, gauname įvertį

$$\sum_{k=1}^{J} |x_{n,k} - x_k|^p \leq \varepsilon^p.$$

Vadinasi

$$\Big(\sum_{k=1}^{J} |x_k|^p\Big)^{1/p} \leq \varepsilon + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}|^p\Big)^{1/p} \leq C,$$

nes $X_n \in \ell_p$. Taigi dalinių sumų seka yra aprėžta iš viršaus konstanta, todėl eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$ konverguoja, vadinasi $X \in \ell_p$.

Lieka įrodyti, kad $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ metrinėje erdvėje ℓ_p. Taigi remdamiesi ribos apibrėžimu tikrinsime hipotezę, kad X yra mūsų ieškoma riba. Jau parodėme, kad su visais $n > N_\varepsilon$ ir $J \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{J} |x_{n,k} - x_k|^p \leq \varepsilon^p.$$

Kadangi šis įvertis galioja visoms dalinėms sumoms, tai perėję prie ribos $J \to \infty$, gauname nelygybę

$$d(X_n, X) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k} - x_k|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Taigi seka $\{X_n\}$ konverguoja ir $X_n \Rightarrow X$. $\square$

1.15 teorema. *Tolydžiųjų funkcijų $C[a,b]$, aprėžtųjų funkcijų $B[a,b]$ ir tolydžiai k kartų diferencijuojamų funkcijų $C^k[a,b]$ metrinės erdvės yra pilnos.*

Įrodymas. Pateiksime tik įrodymą apie erdvės $C[a,b]$ pilnumą. Faktiškai čia tik pakartosime 1.7 teoremos įrodymą. Nagrinėkime Koši seką $\{f_n\} \subset C[a,b]$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius N_ε, kad su visais $n, m \geq N_\varepsilon$ teisingas įvertis

$$d(f_n, f_m) = \sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon.$$

Fiksuokime t, tada gauname nelygybę

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon, \tag{1.11}$$

taigi realiųjų skaičių seka $\{f_n(t)\}$ yra Koši seka. Kadangi metrinė erdvė $\mathbb{R}$ pilna, tai ši seka konverguoja

$$\lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t), \forall t \in [a,b].$$

Apibrėžėme naują funkciją $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Įsitikinkime, kad $f \in C[a,b]$. Nelygybėje (1.11) pereikime prie ribos $m \to \infty$, tada gauname, kad su visais $n \geq N_\varepsilon$ (pastebėsime, kad N_ε nepriklauso nuo t):

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [a,b].$$

Imkime $\varepsilon_0 > 0$, tada egzistuoja toks N, kad

$$|f_N(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \forall t \in [a,b].$$

Funkcija $f_N \in C[a,b]$, todėl iš 1.5 teoremos gauname, kad ji yra tolygiai tolydi. Tada egzistuoja toks $\delta = \delta(\varepsilon_0)$, kad $\forall t, s \in [a,b]$:

$$|f_N(t) - f_N(s)| < \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \text{kai } |t - s| < \delta.$$

Iš šių įverčių ir trikampio nelygybės gauname, kad $\forall t, s \in [a, b]$:

$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(s)| + |f_N(s) - f(s)| < \varepsilon_0,$$

kai $|t - s| < \delta$, vadinasi funkcija f yra tolygiai tolydi. Taigi įrodėme, kad $f_n \to f$ erdvėje $C[a, b]$. $\square$

Tačiau ne visos metrinės erdvės yra pilnos. Nesunku patikrinti, kad tolydžiųjų funkcijų erdvė $C_p(0, 1)$, $p > 0$ nėra pilna. Parodysime tai vienam pavyzdžiui $C_1(-1, 1)$, kai metrika apibrėžiama taip:

$$d(f, g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\, dt.$$

Bendrasis atvejis nagrinėjamas analogiškai.

Sukonstruojame funkcijų seką $\{f_n\} \subset C_1(-1, 1)$:

$$f_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, -1/n], \\ nt, & t \in (-1/n, 1/n), \\ 1, & t \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

Patikrinkime, kad $\{f_n\}$ yra Koši seka. Įvertinsime atstumą tarp dviejų sekos narių (pažymėkime $M = \min(n, m)$):

$$d(f_n, f_m) := \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt = \int_{-1/M}^{1/M} |f_n(t) - f_m(t)|\, dt \leq \frac{2}{M}.$$

Imkime N_ε pirmą sveiką skaičių didesnį už $2/\varepsilon$. Tada $d(f_n, f_m) < \varepsilon$, kai $n, m \geq N_\varepsilon$, taigi $\{f_n\}$ yra Koši seka. Tarkime, kad ši seka konverguoja erdvėje $C_1(-1, 1)$, t.y. egzistuoja sekos riba

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \in C_1(-1, 1).$$

Iš metrikos apibrėžimo gauname

$$d(f_n, f) = \int_{-1}^{-1/n} |1 + f(t)|\, dt + \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(t) - f(t)|\, dt + \int_{1/n}^{1} |1 - f(t)|\, dt.$$

Kadangi seka konverguoja, tai $\lim_{n \to \infty} d(f_n, f) = 0$. Imdami tik pirmąjį sumos dėmenį, gauname įverčius

$$0 \leq \int_{-1}^{-1/n} |1 + f(t)|\, dt \leq d(f_n, f), \quad \text{kai} \quad n \to \infty.$$

Perėję prie ribos $n \to \infty$ ir pasinaudoję ribų palyginimo teorema bei integralų savybėmis, įrodome lygybę

$$\int_{-1}^{0} |1 + f(t)|\, dt = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = -1, \ \ t \in (-1, 0).$$

Panašiai įrodome, kad $f(t) = 1$, kai $t \in (0, 1)$. Taigi funkcija f yra trūki taške $t = 0$, todėl $f \notin C_1(-1, 1)$. Gautasis prieštaravimas ir įrodo, kad metrinė erdvė $C_1(-1, 1)$ nėra pilna.