1.6. Konvergavimas metrinėse erdvėse

Šioje paskaitoje apibendrinsime skaičių, vektorių ir funkcijų sekų konvergavimą metrinėse erdvėse.

24 apibrėžimas. Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ seka $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ turi ribą $x \in \mathbb{X}$, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, kad

$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \text{su visais} \ \ n > N_\varepsilon.$$

Tada rašysime

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{arba} \ \ x_n \Rightarrow x, \ \ \text{kai} \ \ n \to \infty$$

ir sakysime, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja į elementą x.

Pastebėsime, kad $\{d(x_n, x)\}$ yra realiųjų skaičių seka, tada iš skaičių sekų savybių gauname, kad seka $\{x_n\}$ konverguoja tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Taigi sekų konvergavimas metrinėse erdvėse yra glaudžiai susijęs su įprastiniu skaičių sekų kovergavimu. Tai leidžia nesunkiai perelti nemažai svarbių rezultatų ir sekoms metrinėse erdvėse.

Panagrinėkime keletą pavyzdžių.

5 pavyzdys. Imkime metrinę erdvę $(\mathbb{R}^m, d)$, kai d yra euklidinė metrika

$$d(X, Y) = \left(\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}, \quad X, Y \in \mathbb{R}^m.$$

Tada konvergavimas euklidinėje erdvėje $\mathbb{R}^m$

$$X_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nm}) \Rightarrow X = (x_1, x_2, \dots, x_m), \ \ \text{kai} \ \ n \to \infty$$

reiškia kiekvienos koordinačių sekos $\{x_{n,j}\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ konvergavimą (seka $\{X_n\} \subset \mathbb{R}^m$ konverguoja tada ir tik tada):

$$x_{n,j} \to x_j, \ \ \text{kai} \ \ n \to \infty.$$

Šios sąlygos būtinumas seka iš įverčio

$$|x_k - y_k| \le d(X, Y), \quad 1 \le k \le m.$$

Dabar įrodysime sąlygos pakankamumą. Imkime $\varepsilon > 0$, kadangi kiekviena koordinačių seka $\{x_{n,j}\}$ konverguoja, tai galime parinkti tokius $N_{\varepsilon,k}$, $k = 1, \ldots, m$, kad su visais $n > N_{\varepsilon,k}$ bus teisingi įverčiai:

$$|x_{n,k} - x_k| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Apibrėžkime $N_\varepsilon = \max\{N_{\varepsilon,1}, \ldots, N_{\varepsilon,m}\}$, tada su visais $n > N_\varepsilon$

$$d(X_n, X) < \varepsilon,$$

taigi seka $\{X_n\}$ konverguoja.

6 pavyzdys. Erdvės $C[a,b]$ elementų sekos konvergavimas sutampa su tolygiuoju tolydžių funkcijų konvergavimu.

7 pavyzdys. Metrinės erdvės $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ elementų sekos konvergavimas irgi ekvivalentus koordinatinių sekų konvergavimui. Priminsime, kad šioje erdvėje atstumas tarp dviejų elementų (t.y. realiųjų skaičių sekų $X, Y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) yra apibrėžtas taip

$$d(X,Y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Nagrinėkime seką $\{X_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ ir elementą $X \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Tarkime, kad $X_n \Rightarrow X$, kai $n \to \infty$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius N_ε, kad

$$d(X_n, X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_{n,k} - x_k|}{1 + |x_{n,k} - x_k|} < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad n > N_\varepsilon.$$

Tai su kiekvienu $k \geq 1$

$$2^{-k} \frac{|x_{n,k} - x_k|}{1 + |x_{n,k} - x_k|} < \varepsilon, \quad \text{kai} \quad n > N_\varepsilon.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$|x_{n,k} - x_k| < \frac{2^k \varepsilon}{1 - 2^k \varepsilon} < 2^{k+1} \varepsilon, \quad \text{kai} \quad 2^k \varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Todėl

$$\lim_{n \to \infty} x_{n,k} = x_k \quad \text{su kiekvienu} \quad k \geq 1.$$

Įrodykime sąlygos pakankamumą, t.y. kad seka $\{X_n\}$ konverguoja į X, jei su kiekvienu k, $\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = x_k$. Imkime $\varepsilon > 0$ ir parinkime tokį m, kad $\sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2$. Tuomet atstumą nuo X_n iki X galime įvertinti taip

$$\begin{aligned} d(X_n, X) &= \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \frac{|x_{n,k} - x_k|}{1 + |x_{n,k} - x_k|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_{n,k} - x_k|}{1 + |x_{n,k} - x_k|} \\ &< \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \frac{|x_{n,k} - x_k|}{1 + |x_{n,k} - x_k|} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Kadangi m yra fiksuotas ir $\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = x_k$, kai $k = 1, \dots, m$, tai galime parinkti tokį $N_{\varepsilon,m}$, kad

$$\sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \frac{|x_{n,k} - x_k|}{1 + |x_{n,k} - x_k|} < \frac{\varepsilon}{2},$$

kai $n > N_{\varepsilon,m}$. Taigi įrodėme, kad

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

Metrinėse erdvėse konverguojančių sekų savybės dažnai sutampa su atitinkamomis skaičių sekų ribų savybėmis. Svarbiausias iš jų išvardinsime.

1.9 teorema. *Konverguojanti seka $\{x_n\}$ turi vienintelę ribą.*

Įrodymas. Tarkime, kad egzistuoja dvi skirtingos ribos $x, x' \in \mathbb{X}$. Tada iš metrikos teigiamumo ir trikampio nelygybės gauname

$$0 \le d(x, x') \le d(x, x_n) + d(x_n, x').$$

Pereiname prie ribos, kai $n \to \infty$, tada gauname lygybę $d(x, x') = 0$. Pagal vienaties aksiomą, $x = x'$, taigi prielaida apie dviejų skirtingų ribų egzistavimą buvo neteisinga. $\square$

1.10 teorema. *Konverguojanti seka $\{x_n\}$ yra aprėžta.*

Šią teoremą įrodome parodę, kad egzistuoja toks baigtinio radiuso uždarasis rutulys $B_r(0)$, kad $\{x_n\} \subset B_r(0)$, o $\operatorname{diam} B_r(0) \le 2r$.

Aibės ribinius taškus apibrėžėme nenaudodami konvergavimo sąvokos. Dabar įsitikinsime, kad ribiniai taškai labai glaudžiai susiję su konverguojančiomis sekomis.

1.11 teorema. *Elementas $x \in \mathbb{X}$ yra aibės $A \subset \mathbb{X}$ ribinis taškas tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia seka $\{x_n\} \subset A$, $x_n \neq x$, $n \geq 1$, kad*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime sąlygos būtinumą. Tarkime, kad x yra aibės A ribinis taškas. Tada su kiekvienu $n \geq 1$ rutulyje $S_{1/n}(x)$ egzistuoja toks x_n, kad $x_n \in A$ ir $x_n \neq x$. Kadangi $d(x_n, x) < 1/n$, tai seka $\{x_n\}$ konverguoja į elementą x.

Dabar patikrinsime sąlygos pakankamumą. Imkime bet kokią elemento x aplinką $S_\varepsilon(x)$. Kadangi seka $\{x_n\}$ konverguoja į elementą x, tai egzistuoja toks N_ε, kad su kiekvienu $n > N_\varepsilon$ atstumas $d(x_n, x) < \varepsilon$, o tai ekvivalentu teiginiui, kad $x_n \in S_\varepsilon(x)$. Taigi x tikrai yra aibės A ribinis taškas. □

Gauname svarbią išvadą, kad netuščia aibė $A \subset \mathbb{X}$ yra uždara tada ir tik tada, kai kiekvienos konverguojančios aibės A elementų sekos riba priklauso aibei A. Tokį uždarosios aibės apibrėžimą ir naudojome pirmoje paskaitoje, kai nagrinėjome realiųjų skaičių aibes.