1.5. Aibės metrinėse erdvėse

Šioje paskaitoje apibendrinsime pagrindines aibių savybes metrinėms erdvėms.

16 apibrėžimas. Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ aibė

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{X}, \quad d(x,a) < r\}$$

vadinama atviruoju rutuliu su spinduliu r ir centru a.

17 apibrėžimas. Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ aibė

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{X}, \quad d(x,a) \le r\}$$

vadinama uždaruoju rutuliu su spinduliu r ir centru a.

Toje pačioje aibėje $\mathbb{X}$ skirtingas metrikas atitiks skirtingi rutuliai.

8 uždavinys. Plokštumoje $\mathbb{R}^2$ pavaizduokite rutulius, atitinkančius metrikas d_1, d_2 ir d_∞.

1 pavyzdys. Nagrinėkime erdvės $C[0,1]$ rutulius. Imkime funkciją $g \in C[0,1]$. Jei $f \in B_r(g)$, tai

$$\sup_{t\in[0,1]} |g(t) - f(t)| \le r.$$

Tai yra

$$g(t) - r \le f(t) \le g(t) + r \quad \forall t \in [0,1].$$

Rutulį $B_r(g)$ sudaro visos tokios tolydžiosios funkcijos $f \in C[0,1]$, kurių grafikai telpa juostoje $[g(t) - r, g(t) + r]$, $t \in [0,1]$.

Atvirosios aibės apibrėžime naudosime bendresnes aibes nei atvirąjį rutulį, kurį naudojome imdami daugiamatę realiųjų skaičių erdvę $\mathbb{R}^N$.

18 apibrėžimas. Aibė A vadinama taško x aplinka, jei egzistuoja toks $r > 0$, kad $S_r(x) \subset A$. Taškas x yra aibės $A \subset \mathbb{X}$ vidinis taškas, jei A yra šio taško aplinka.

19 apibrėžimas. Aibė $A \subset \mathbb{X}$ vadinama atvirąja, jei ji yra kiekvieno savo taško aplinka. Pagal susitarimą tuščioji aibė laikoma atvira.

Nesunku patikrinti, kad atvirasis rutulys $S_r(a)$ tikrai yra atviroji aibė, tačiau uždarasis rutulys $B_r(a)$ jau nėra atviroji aibė.

9 uždavinys. Tarkime, kad aibės A_k, $k = 1, 2, \ldots$ yra atvirosios. Įrodykite, kad baigtinė atvirųjų aibių sankirta $\cap_{k=1}^{n} A_k$ ir bet kurio skaičiaus atvirųjų aibių sąjunga $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ yra atvirosios aibės.

Sprendžiant šį uždavinį, užtenka pasinaudoti atvirųjų aibių apibrėžimu. Pavyzdžiui, parodysime, kad aibė $\cap_{k=1}^{n} A_k$ yra atviroji. Jeigu $x \in \cap_{k=1}^{n} A_k$, tai iš aibių sankirtos apibrėžimo gauname, kad $x \in A_k$ su visais $k = 1, 2, \ldots, n$. Kadangi aibės A_k yra atvirosios, tai egzistuoja tokie $r_k > 0$, kad

$$S_{r_k}(x) \subset A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Imkime $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, tada

$$S_r(x) \subset A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad S_r(x) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Pastebėsime, kad bet kurio skaičiaus atvirųjų aibių sankirta jau gali ir nebūti atviroji aibė. Metrinės erdvės $\mathbb{R}$ aibės $I_n = (-1/n, 1/n)$ yra atviros su kiekvienu $n \geq 1$, tačiau jų sankirta $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ nėra atvira.

20 apibrėžimas. Aibė $A \subset \mathbb{X}$ vadinama uždarąja, jei jos papildinys $A^c = \mathbb{X} \setminus A$ yra atviroji aibė. Pagal susitarimą tuščioji aibė laikoma ir uždarąja.

Šis apibrėžimas skiriasi nuo realiųjų skaičių uždarosios aibės apibrėžimo, tačiau vėliau parodysime, kad senasis ir naujasis apibrėžimai yra ekvivalentūs.

10 uždavinys. Tarkime, kad aibės A_k, $k = 1, 2, \ldots$ yra uždarosios. Įrodykite, kad baigtinė uždarųjų aibių sąjunga $\cup_{k=1}^{n} A_k$ ir bet kurio skaičiaus uždarųjų aibių sankirta $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$ yra uždarosios aibės.

Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ taškai aibės $A \subset \mathbb{X}$ atžvilgiu skirstomi į vidinius (visi vidiniai taškai aibrėžia aibės A vidų $\overset{\circ}{A}$), išorinius, ribinius, kraštinius (priklausančius kraštui ∂A) ir izoliuotus.

21 apibrėžimas. Taškas $x \in \mathbb{X}$ vadinamas aibės A

- *išoriniu tašku*, jei egzistuoja rutulys $S_r(x)$, nesikertantis su aibe A;
- *ribiniu tašku*, jei kiekviename atvirame rutulyje $S_r(x)$ yra bent vienas aibės A taškas, nesutampantis su x;
- *izoliuotuoju tašku*, jei $x \in A$ ir egzistuoja toks atvirasis rutulys $S_r(x)$, kuriame daugiau aibės A taškų nėra.
- *kraštiniu tašku*, jei kiekviename **netuščiame** atvirame rutulyje $S_r(x)$ yra bent vienas aibės A ir bent vienas aibės A^c taškas. Taigi aibės izoliuotieji taškai priklauso jos kraštui.

Izoliuotieji ir ribiniai aibės taškai dar vadinami jos *sąlyčio taškais*.

22 apibrėžimas. Aibės A uždarinį $\bar{A}$ sudaro jos sąlyčio taškų aibė.

Tada galime įrodyti ir ekvivalentų uždarosios aibės apibrėžimą: aibė $A \subset \mathbb{X}$ yra uždaroji tada ir tik tada, kai $A = \bar{A}$.

Labai svarbu suprasti, kad aibės uždarumas priklauso nuo metrinės erdvės, kurioje ši aibė apibrėžta, nes $\bar{A} \subset \mathbb{X}$, t.y. aibei $\bar{A}$ priklauso tik metrinės erdvės $\mathbb{X}$ elementai. Pavyzdžiui nagrinėkime racionaliųjų skaičių metrinę erdvę $(\mathbb{Q}, d)$, joje aibė

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : \quad |x| \leq 2\}$$

yra uždara, kadangi jei s yra šios aibės ribinis taškas, tai jis būtinai yra racionalusis skaičius ir nesunku parodyti, kad $|s| \leq 2$. Tačiau realiųjų skaičių metrinėje erdvėje $(\mathbb{R}, d)$ ši aibė nėra uždara, nes

$$\bar{A} = B_2(0) := \{x \in \mathbb{R} : \quad |x| \leq 2\}$$

ir pvz. $\sqrt{2} \in B_2(0)$, bet $\sqrt{2} \notin A$.

11 uždavinys. Tarkime, kad $A \subset T \subset \mathbb{X}$. Įrodykite, kad

$$a)\ \ \bar{A} \subset \bar{T}, \qquad b)\ \ \bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

12 uždavinys. Įrodykite, kad jei x yra ribinis aibės A taškas, tai kiekviename atvirame rutulyje $S_r(x)$ yra be galo daug aibės A taškų.

13 uždavinys. Metrinės erdvės $(\mathbb{R}, d)$ aibei $A = [0, 1)$ raskite aibes $\mathring{A}$, $\bar{A}$, ∂A.

Dabar apibendrinsime aibės *aprėžtumo* sąvoką. Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ aibės A diametru vadinamas skaičius

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

23 apibrėžimas. Aibė A vadinama aprėžta, jei jos diametras yra baigtinis.

14 uždavinys. Įrodykite, kad teisingi tokie teiginiai:

a) $\operatorname{diam}(A) = 0$ tada ir tik tada, kai aibėje A yra tik vienas elementas;

b) jei $A \subset B$, tai $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$;

c) $\operatorname{diam}(S_r(x)) = \operatorname{diam}(B_r(x)) \leq 2r$.

Panaudodami aibių veiksmus ir jų savybes galime efektyviai apibrėžti daug svarbių metrinių erdvių sąvokų. Tačiau dažnai nagrinėjame ir ekvivalenčius tų pačių sąvokų apibrėžimus, kurie yra konstruktyvūs, todėl patogesni sprendžiant įvairius taikymų uždavinius.

24 apibrėžimas. Nagrinėkime metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ aibes $A \subset B \subset \mathbb{X}$. Aibė A yra tirštas aibės B poaibis, jei $B \subset \bar{A}$.

Pateiksime ir ekvivalentų konstruktyvų šios savybės apibrėžimą. Nesunku patikrinti, kad aibė A yra tirštas aibės B poaibis tada ir tik tada, kai kiekvienam $y \in B$ su visais $\varepsilon > 0$ atvirajame rutulyje $S_\varepsilon(y)$ yra bent vienas aibės A elementas:

$$S_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall \varepsilon > 0, \ \forall y \in B.$$