

2.3. Lebego erdvės

Šioje paskaitoje išsamiai ištirsime pilnų normuotų tiesinių erdvių $L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$ savybes. Priminsime, kad šias erdves, vadinamas Lebego vardu, gavome papildydami iki pilnųjų tiesines erdves $C_p(a, b)$, sudarytas iš tolydžių intervale (a, b) funkcijų, kurioms teisingas įvertis $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$ su norma

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Čia integralai apibrėžiami Rimano prasme. Erdves $L_p(a, b)$ galima konstruoti ir naudojant Lebego integralą, kuris apibrėžiamas remiantis mato teorija. Tačiau mes naudosime papildymo metodą, nes daugelį $L_p(a, b)$ erdvių savybių daug patogiau įrodyti nagrinėjant analogiškas savybes tolydžioms funkcijoms ir paskui pereinant prie Koši sekos ribos.

Formaliai galime tvirtinti, kad jei $f \in C_p(a, b)$, tai $f \in L_p(a, b)$, tačiau griežtai laikantis apibrėžimo turime neužmiršti, kad $L_p(a, b)$ elementai yra ne funkcijos, o tolydžių funkcijų Koši sekų $\{f_n\} \subset C_p(a, b)$ ekvivalentumo klasės. Tada

$$\|f_n - f_m\|_p = \left(\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0, \quad \text{kai } n, m \rightarrow \infty.$$

Dvi Koši sekos $\{f_n\}$ ir $\{g_n\}$ yra ekvivalenčios, jei

$$\|f_n - g_n\|_p = \left(\int_a^b |f_n(x) - g_n(x)|^p dx \right)^{1/p} \rightarrow 0, \quad \text{kai } n \rightarrow \infty.$$

Todėl jei $f \in C_p(a, b)$, tai egzistuoja ekvivalentumo klasė, kuriai priklauso stacionari Koši seka $\{f, f, f, \dots\}$. Šią ekvivalentumo klasę galime žymėti $F(x) \in L_p(a, b)$ arba vėl naudoti tą patį simbolį $f(x) \in L_p(a, b)$.

Norėdami išsamiau susipažinti su Lebego erdvių elementų (funkcijų) savybėmis, išnagrinėsime svarbų pavyzdį. Funkcija $f(x) \equiv 0$ priklauso erdvei $C_p(-1, 1)$. Ekvivalentumo klasę, kuriai priklauso stacionari seka $\{0, 0, 0, \dots\}$, vadiname nuline klase ir žymime $0 \in L_p(-1, 1)$. Egzistuoja be galo daug kitų Koši sekų, kurios irgi priklauso tai pačiai ekvivalentumo klasei. Imkime funkcijų "stogelių" seką $\{f_n\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{jei } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 1 + nx, & \text{jei } -1/n \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{kituose taškuose.} \end{cases}$$

Funkcija $f_n(x) \in C_p(-1, 1)$, apskaičiuosime jos normą

$$\|f_n\|_p = \left(2 \int_0^{1/n} (1 - nx)^p dx\right)^{1/p} = \left(\frac{2}{n(p+1)}\right)^{1/p} \rightarrow 0, \text{ kai } n \rightarrow \infty.$$

Seka $\{f_n\}$ yra Koši seka, nes iš trikampio nelygybės gauname, kad

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \|f_n\|_p + \|f_m\|_p \rightarrow 0, \text{ kai } n, m \rightarrow \infty.$$

Taigi ši seka priklauso nulinei ekvivalentumo klasei $0 \in L_p(-1, 1)$. Nagrinėkime $\{f_n\}$ ribą kiekviename intervalo taške, kai $n \rightarrow \infty$, gauname funkciją

$$f^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x = 0, \\ 0, & \text{kituose taškuose.} \end{cases}$$

Matome, kad funkcija $f^*(x)$ nėra tolydi, taigi ji nepriklauso erdvei $C_p(-1, 1)$. Ji taip pat nepriklauso Lebego erdvei $L_p(-1, 1)$, nes šios erdvės elementai yra ekvivalentumo klasės. Tačiau formaliai galime sakyti, kad $f^*(x) \in L_p(-1, 1)$, ir kadangi Koši seka $\{f_n\}$ priklauso nulinei ekvivalentumo klasei, tai erdvėje $L_p(-1, 1)$ funkcija $f^*(x)$ laikoma nuliniu elementu. Taigi norma $\|\cdot\|_p$ negali atskirti dviejų klasikinių funkcijų $f(x) \equiv 0$ ir $f^*(x)$.

Nulinei ekvivalentumo klasei priklauso ir daugiau funkcijų, kurios klasikine prasme (kai nagrinėjame reikšmes apibrėžimo srities taškuose) gali smarkiai skirtis nuo $f(x) \equiv 0$ funkcijos. Intervale $(0, 1)$ apibrėžkime skaičių seką $\{x_n\}$ ir nagrinėkime funkciją

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{kituose taškuose.} \end{cases}$$

Ir šią funkciją generuojanti Koši seka priklauso $L_p(-1, 1)$ erdvės nulinei ekvivalentumo klasei, taigi norma $\|\cdot\|_p$ ir funkcijos $g(x)$ negali atskirti nuo tapatingai nuliui lygios funkcijos $f(x) \equiv 0$. Čia priminsime, kad racionaliųjų skaičiai intervale $(0, 1)$ sudaro skaičių aibę, taigi, jei funkcija $g(x)$ lygi 1 visuose intervalo racionaliųjų taškuose, vis tiek $L_p(-1, 1)$ erdvėje ją sutapatiname su nuline funkcija. Šis faktas tikrai svarbus, kai Lebego erdvės funkcijas naudojame įvairių technologinių procesų modeliavime, nes, pvz. kompiuteris gali atvaizduoti funkcijos taškus tik baigtinėje aibėje racionaliųjų taškų, taigi kompiuterinėje aritmetikoje funkcija $g(x) \equiv 1$.

10 apibrėžimas. Sakysime, kad funkcija $f(x)$ beveik visur lygi nuliui (rašysime $f(x) = 0$ b.v.), jeigu ji priklauso nulinei ekvivalentumo klasei kaip erdvės $L_p(a, b)$ elementas: egzistuoja Koši seka $\{f_n\} \subset C_p(a, b)$, kad

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in (a, b),$$

ir jos norma lygi nuliui

$$\|f\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0.$$

Jeigu $f(x) - g(x) = 0$ b.v., tai sakome, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra lygios b.v. Tokioms funkcijoms $\|f - g\|_p = 0$.

Matėme, kad funkcija, kuri lygi nuliui visur išskyrus skaičiosios aibės $\{x_n\}$ taškus, yra lygi nuliui b.v. Bendruoju atveju funkcija, kuri $f(x) = 0$ b.v., gali būti nelygi nuliui aibės $S \subset \Omega$ taškuose, kai S nėra suskaičiuojama. Tokios aibės S vadinamos nulinio mato aibėmis (pavyzdžiui kreivė dvimatėje erdvėje ar paviršius trimatėje erdvėje).

Apibendrinsime erdvių $L_p(\Omega)$ apibrėžimą, kai $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Elementas $F(x) \in L_p(\Omega)$ yra ekvivalentumo klasė Koši sekų $\{f_n(x)\} \subset C_p(\Omega)$. Lebego integralą $\int_{\Omega} |F(x)|^p d\Omega$ apibrėžiame taip: imkime bet kokią seką $\{f_n(x)\}$ iš ekvivalentumo klasės $F(x)$ ir nagrinėkime realiųjų skaičių seką $\{K_n\}$, kai

$$K_n = \|f_n\|_p := \left(\int_{\Omega} |f_n(x)|^p d\Omega \right)^{1/p}.$$

Parodysime, kad $\{K_n\}$ yra Koši seka. Nagrinėkime skirtumą

$$|K_n - K_m| = \left| \|f_n\|_p - \|f_m\|_p \right|.$$

Pasinaudoję Minkovskio nelygybe (trikampio nelygybe normai), įrodome įvertį

$$\|f_n\|_p = \|f_n - f_m + f_m\|_p \leq \|f_n - f_m\|_p + \|f_m\|_p.$$

Panašiai įrodome, kad

$$\|f_m\|_p \leq \|f_n - f_m\|_p + \|f_n\|_p.$$

Todėl

$$|K_n - K_m| \leq \|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty,$$

nes $\{f_n(x)\}$ yra tolydžių funkcijų Koši seka normoje $\|\cdot\|$. Tada $\{K_n\}$ yra realiųjų skaičių Koši seka ir egzistuoja riba

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |f_n(x)|^p d\Omega \right)^{1/p}.$$

Skaičius K ir yra elemento $F(x) \in L_p(\Omega)$ norma

$$K = \left(\int_{\Omega} |F(x)|^p d\Omega \right)^{1/p}.$$

Nesunku patikrinti, kad toks apibrėžimas nepriklauso nuo sekos $\{f_n(x)\}$ parinkimo.

2 uždavinys. Funkcija $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ apibrėžta intervale $(0, 1)$. Rasime, kada $f(x) \in L_p(0, 1)$, $p \geq 1$. Skaičiuojame integralą

$$K = \int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 x^{-p\alpha} dx = \frac{x^{1-p\alpha}}{1-p\alpha} \Big|_0^1.$$

Integralas yra baigtinis $K < \infty$, kai

$$1 - p\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \frac{1}{p}.$$

Dažnai tenka palyginti skirtingų Lebegio erdvių funkcijas arba atsakyti į klausimą ar elementas, kuris priklauso vienai normuotai tiesinei erdvei yra ir kitos normuotos tiesinės erdvės elementas.

11 apibrėžimas. Normuota tiesinė erdvė $\mathbb{X}$ yra įdėta į kitą normuotą tiesinę erdvę $\mathbb{Y}$, jei

- a) $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$;
- b) tiesinis operatorius $I : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, $Ix = x$, $\forall x \in \mathbb{X}$ yra tolydus.

Suformuluosime svarbų teiginį apie Lebegio erdvių palyginimą.

2.4 teorema. Tarkime, kad Ω yra aprėžta aibė, $1 \leq p \leq q < \infty$. Jei $F(x) \in L_q(\Omega)$, tai $F(x) \in L_p(\Omega)$ ir teisingas normos įvertis

$$\|F\|_p \leq (\text{meas } \Omega)^{(1/p-1/q)} \|F\|_q,$$

čia $\text{meas } \Omega$ yra aibės Ω matas (pvz. ilgis, plotas, tūris).

Irodymas. Priminsime Holderio nelygybę:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d\Omega \leq \|f\|_{p'} \|g\|_{q'}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Imkime tolydžių funkcijų Koši seką $\{f_n\} \subset C_q(\Omega)$, priklausančią ekvivalentumo klasei $F(x) \in L_q(\Omega)$. Tada Holderio nelygybėje pasirinkime:

$$f(x) = |f_n(x)|^p, \quad g(x) \equiv 1, \quad p' = \frac{q}{p}, \quad \frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{p'} = \frac{q-p}{q},$$

gauname įvertį

$$\int_{\Omega} |f_n(x)|^p d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} |f_n(x)|^q d\Omega \right)^{p/q} (\text{meas } \Omega)^{(q-p)/q}.$$

Pakėlę abi nelygybes puses $1/p$ laipsniu, gauname įvertį

$$\|f_n\|_p \leq (\text{meas } \Omega)^{(1/p-1/q)} \|f_n\|_q.$$

Teoremos įrodymas užbaigiamas nagrinėjant ribą, kai $n \rightarrow \infty$. $\square$

Kadangi tiesinis operatorius, apibrėžiantis atvaizdį $I : L_q(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$, $IF = F$, $\forall F(x) \in L_q(\Omega)$ yra aprėžtas, tai šis jis yra ir tolydus (priminsime, kad tiesiniams operatoriams tolydumas yra ekvivalentus aprėžtumui). Taigi įrodėme, kad erdvė $L_q(\Omega)$ yra įdėta į erdvę $L_p(\Omega)$, kai $1 \leq p \leq q < \infty$. Ši teiginį žymėsime $L_q(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

Įdėjimo teorema naudojama pagrindžiant daug svarbių teiginių apie Lebego erdvių elementus. Pateiksime du tokius teiginius.

2.5 teorema. *Jei sritis Ω yra aprėžta, tai kiekvienam elementui (funkcijai) $F(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geq 1$ egzistuoja integralas $\int_{\Omega} F(x) d\Omega$, kuris apibrėžiamas taip:*

$$\int_{\Omega} F(x) d\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\Omega.$$

Irodymas. Imkime bet kurią Koši seką $\{f_n\} \subset C_p(\Omega)$, priklausančią ekvivalentumo klasei $F(x) \in L_p(\Omega)$. Nagrinėkime realiųjų skaičių seką $\{J_n\}$:

$$J_n = \int_{\Omega} f_n(x) d\Omega.$$

Patikrinsime, kad $\{J_n\}$ yra Koši seka. Pasinaudoję integralų savybėmis ir Holderio nelygybę gauname

$$\begin{aligned} |J_n - J_m| &= \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f_m(x)) d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} 1 \cdot |f_n(x) - f_m(x)| d\Omega \\ &\leq (\text{meas } \Omega)^{1-1/p} \|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

nes $\{f_n(x)\}$ yra tolydžių funkcijų Koši seka normoje $\|\cdot\|_p$. Tada $\{J_n\}$ yra realiųjų skaičių Koši seka ir egzistuoja riba

$$\int_{\Omega} F(x) d\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) d\Omega.$$

□

2.6 teorema. Tarkime, kad $F(x) \in L_p(\Omega)$, $G(x) \in L_q(\Omega)$, čia $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$. Tada egzistuoja integralas $\int_{\Omega} F(x)G(x) d\Omega$ ir teisingas įvertis

$$\left| \int_{\Omega} F(x)G(x) d\Omega \right| \leq \|F\|_p \|G\|_q.$$

Irodymas. Imkime dvi Koši sekas $\{f_n\} \subset C_p(\Omega)$, $\{g_n\} \subset C_q(\Omega)$, priklausančias, atitinkamai, ekvivalentumo klasėms $F(x) \in L_p(\Omega)$, $G(x) \in L_q(\Omega)$. Nagrinėkime realiųjų skaičių seką $\{J_n\}$:

$$J_n = \int_{\Omega} f_n(x)g_n(x) d\Omega.$$

Patikrinsime, kad $\{J_n\}$ yra Koši seka. Pasinaudoję integralų savybėmis ir Holderio nelygybę gauname

$$\begin{aligned} |J_n - J_m| &= \left| \int_{\Omega} (f_n(x)g_n(x) - f_m(x)g_m(x)) d\Omega \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} [(f_n(x) - f_m(x))g_n(x) + f_m(x)(g_n(x) - g_m(x))] d\Omega \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f_n(x) - f_m(x)| |g_n(x)| d\Omega + \int_{\Omega} |f_m(x)| |g_n(x) - g_m(x)| d\Omega \\ &\leq \|f_n - f_m\|_p \|g_n\|_q + \|f_m\|_p \|g_n - g_m\|_q \rightarrow 0, \quad \text{kai } n, m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

nes $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ yra tolydžių funkcijų Koši sekos normose $\|\cdot\|_p$ ir $\|\cdot\|_q$, atitinkamai, o pakankamai dideliems numeriams n teisingi įverčiai

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_n(x)|^p d\Omega &\leq \int_{\Omega} |F(x)|^p d\Omega + 1, \\ \int_{\Omega} |g_n(x)|^q d\Omega &\leq \int_{\Omega} |G(x)|^q d\Omega + 1. \end{aligned}$$

Tada $\{J_n\}$ yra realiųjų skaičių Koši seka ir egzistuoja riba

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \int_{\Omega} F(x)G(x) d\Omega.$$

Teoremos įvertį gauname pasinaudoję integralų savybe

$$\left| \int_{\Omega} f_n(x)g_n(x) d\Omega \right| \leq \int_{\Omega} |f_n(x)| |g_n(x)| d\Omega$$

ir pritaikę Holderio nelygybę, bei perėję prie ribos, kai $n \rightarrow \infty$. $\square$