2.2. Tiesiniai operatoriai

Imkime dvi tiesines erdves $\mathbb{X}$ ir $\mathbb{Y}$.

9 apibrėžimas. Operatorius $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ yra tiesinis, jei jo apibrėžimo sritis $D(A)$ yra erdvės $\mathbb{X}$ tiesinis poerdvis ir visiems $x_1, x_2 \in D(A)$ bei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ teisinga lygybė

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2).$$

Tiesinio operatoriaus vaizdą $A(x)$ dažniausiai žymime Ax.

3 uždavinys. Įrodykite, kad tiesinio operatoriaus A vaizdas $R(A)$ ir nulinė aibė $N(A) = \{x : Ax = 0\}$ yra tiesinių erdvių $\mathbb{Y}$ ir $\mathbb{X}$ poerdviai.

Tarkime, kad tiesinės erdvės $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ yra normuotos. Tada galime apibrėžti atstumo funkcijas

$$d_X(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_X, \quad d_Y(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_Y$$

ir tirti tiesinio operatoriaus A tolydumą. Priminsime, kad bendruoju atveju atvaizdis F yra tolydus aibėje X, jeigu jis tolydus kiekviename šios aibės taške. Tiesinių operatorių tolydumo tyrimą esminiai palengvina tokia lema.

2.2 lema. *Tiesinis operatorius A yra tolydus tada ir tik tada, jei jis yra tolydus bent viename taške $x_0 \in D(A)$.*

Įrodymas. Įrodysime tik sąlygos pakankamumą, nes būtinumas yra akivaizdus. Tarkime, kad A yra tolydus taške $x_0 \in D(A)$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $\delta = \delta(\varepsilon)$, kad $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$, jei $\|x - x_0\|_X < \delta$.

Imkime bet kokį $x_1 \in D(A)$ ir nagrinėkime elementus x' iš šio taško aplinkos $\|x' - x_1\|_X < \delta$. Tada egzistuoja tokie x, kad $x' - x_1 = x - x_0$. Pasinaudoję operatoriaus A tiesiškumu, gauname lygybę

$$Ax' - Ax_1 = Ax - Ax_0,$$

todėl teisingas įvertis

$$\|Ax' - Ax_1\|_Y = \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon, \quad \text{jei } \|x' - x_1\|_X = \|x - x_0\|_X < \delta.$$

Vadinasi operatorius A tolydus kiekviename taške $x_1 \in D(A)$. $\square$

2.3 lema. *Tarkime, kad A yra tiesinis operatorius. Tada teisinga lygybė $A\,0 = 0$.*

Įrodymas. Pasinaudoję tiesinių erdvių ir tiesinių operatorių savybėmis, gauname

$$Ax = A(x + 0) = Ax + A0.$$

Kadangi tiesinio operatoriaus vaizdas $R(A)$ apibrėžia tiesinę erdvę, tai iš jau įrodytų tiesinių erdvių savybių seka, kad $A0 = 0$. □

2.2 teorema. *Tiesinis operatorius A yra tolydus tada ir tik tada, kai jis yra aprėžtas, t.y. egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad su visais $x \in \mathbb{X}$ teisingas įvertis*

$$\|Ax\|_Y \leq c\,\|x\|_X.$$

Tikslusis apatinis visų tokių konstantų rėžis yra vadinamas operatoriaus A norma

$$\|A\| = \sup_{x \in D(A)} \left\{ \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \right\}.$$

Įrodymas. Užtenka nagrinėti operatoriaus tolydumą viename taške $x_0 = 0$. Įrodysime sąlygos pakankamumą. Jei operatorius A yra aprėžtas, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ imsime $\delta = \varepsilon / c$, tada visiems $\|x - 0\|_X < \delta$ gausime įvertį

$$\|Ax - A0\|_Y = \|Ax\|_Y \leq c\,\|x\|_X = c\,\|x - 0\|_X < \varepsilon.$$

Taigi operatorius A yra tolydus.

Dabar įrodysime sąlygos būtinumą. Tarkime, kad A tolydus taške 0. Imkime $\varepsilon = 1$, tada egzistuoja toks $\delta = \delta(1)$, kad

$$\|Ax\|_Y < 1, \quad \text{jei } \|x\|_X < \delta.$$

Kiekvienam $x \in \mathbb{X}$, $x \neq 0$, apibrėžkime elementą $x^* = \dfrac{\delta x}{2\|x\|_X}$. Įvertinsime jo normą:

$$\|x^*\|_X = \frac{\delta \|x\|_X}{2\|x\|_X} = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

todėl $\|Ax^*\|_Y < 1$. Kadangi A tiesinis operatorius, tai

$$\|Ax^*\|_Y = \frac{\delta}{2\|x\|_X}\|Ax\|_Y < 1 \quad \Longrightarrow \quad \|Ax\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|x\|_X.$$

Taigi tiesinis operatorius A yra aprėžtas. □

Dabar suformuluosime labai svarbų teiginį apie tiesinius operatorius, kurių apibrėžimo sritis yra baigtinės dimensijos tiesinė erdvė.

2.3 teorema. *Tarkime, kad* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *– normuotos tiesinės erdvės,* $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *tiesinis operatorius. Jei* $\mathbb{X}$ *yra baigtinės dimensijos tiesinė erdvė, tai* A *yra tolydus operatorius.*

Įrodymas. Tegul $\dim(\mathbb{X}) = N$, o elementai $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ sudaro tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ bazę. Kiekvieną $x \in \mathbb{X}$ vieninteliu būdu galime išreikšti tiesine kombinacija $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Tada pasinaudoję normos trikampio nelygybe, gauname įvertį

$$\|Ax\|_Y = \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n A x_n \Big\|_Y \le \sum_{n=1}^{N} |c_n| \, \|Ax_n\|_Y \le \max_{1 \le n \le N} \|Ax_n\|_Y \sum_{n=1}^{N} |c_n|.$$

Prisiminę 2.1 lemos įvertį

$$\|c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_N x_N\|_X \ge \gamma \big(|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_N| \big), \quad \gamma > 0,$$

gauname, kad

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n| \le \frac{1}{\gamma} \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|_X = \frac{1}{\gamma} \|x\|_X.$$

Tada tiesinis operatorius A yra aprėžtas

$$\|Ax\|_Y \le \frac{1}{\gamma} \max_{1 \le n \le N} \|Ax_n\|_Y \, \|x\|_X, \quad \forall x \in \mathbb{X},$$

taigi toks operatorius yra tolydus. $\square$

10 apibrėžimas. Dvi tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ ir $\mathbb{Y}$ yra vadinamos izomorfinėmis, jeigu egzistuoja tiesinis bijekcijos operatorius $l : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, atvaizduojantis vienos erdvės elementus į kitos erdvės elementus.

Funkcinėje analizėje izomorfinių erdvių savybes nagrinėjame bendrai, gautos išvados teisingos visoms tokioms tiesinėms erdvėms. Pavyzdžiui nesunkiai įrodome, kad jei $\mathbb{X}$ ir $\mathbb{Y}$ yra izomorfinės baigtinės dimensijos tiesinės erdvės, tai jų dimensijos sutampa.

Pateiksime izomorfinių tiesinių erdvių pavyzdį. Tegul $P_k[0,1]$ yra aibė polinomų, kurių laipsnis nedidesnis už k ir apibrėžtų intervale $[0,1]$. Aišku, kad $P_k[0,1]$ yra tiesinis poerdvis tolydžių funkcijų tiesinės erdvės $C[0,1]$, jo elementai yra $a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$. Tada tiesinis operatorius

$$l : \ a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \to (a_0, a_1, \ldots, a_k)^T \in \mathbb{R}^{k+1}$$

apibrėžia bijekciją iš $P_k[0,1]$ į $\mathbb{R}^{k+1}$. Taigi polinomų erdvė $P_k[0,1]$ yra izomorfiška vektorių erdvei $\mathbb{R}^{k+1}$.