

2 skyrius

Normuotos erdvės

2.1. Tiesinės normuotos erdvės

Prisiminsime tiesinių erdvių apibrėžimą.

1 apibrėžimas. Aibė $\mathbb{X}$ yra tiesinė erdvė virš realiųjų skaičių aibės, jeigu bet kuriems dviems elementams $x, y \in \mathbb{X}$ ir bet kuriam $\lambda \in \mathbb{R}$ galima apibrėžti elementų sumą $x + y \in \mathbb{X}$ ir sandaugą iš skaliaro $\lambda \cdot x \in \mathbb{X}$ taip, kad teisingos aksiomos

1. $x + y = y + x$ (sumos komutatyvumas);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (sumos asociatyvumas);
3. Egzistuoja nulinis elementas $0 \in \mathbb{X}$, toks kad $x + 0 = x$;
4. Kiekvieną elementą $x \in \mathbb{X}$ atitinka priešingas elementas $(-x) \in \mathbb{X}$, toks kad $x + (-x) = 0$;
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;
6. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;
7. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
8. Su kiekvienu elementu $x \in \mathbb{X}$ teisinga lygybė $1 \cdot x = x$.

Paprasčiausias tiesinės erdvės pavyzdys yra baigtinės dimensijos erdvė $\mathbb{R}^d$, kurios elementai yra vektoriai $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$, $x_j \in \mathbb{R}$, o dviejų vektorių sumos ir sandaugos iš skaliaro operacijos apibrėžiamos standartiniu

būdu, kaip tai daroma tiesinėje algebroje. Todėl ir bendruoju atveju tiesinės erdvės elementus dažnai vadinsime *vektoriais*.

Dabar suformuluosime paprasčiausias išvadas, kurios seka iš šių aksiomų.

1 išvada. *Nulinis elementas yra vienintelis.*

Irodymas. Tarkime, kad egzistuoja du nuliniai elementai 0_1 ir 0_2 . Tada iš trečiosios ir pirmosios aksiomų gauname, kad

$$0_1 \stackrel{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{(3)}{=} 0_2.$$

Taigi $0_1 = 0_2$, vadinasi nulinis elementas yra vienintelis. $\square$

2 išvada. *Kiekvienam elementui $x \in \mathbb{X}$ egzistuoja vienintelis priešingas elementas.*

3 išvada. Jei $x + y = x$, tai $y = 0$.

Irodymas. Įrodymas seka iš tokių lygybių

$$\begin{aligned} y &\stackrel{(3)}{=} y + 0 \stackrel{(4)}{=} y + (x + (-x)) \stackrel{(2)}{=} (y + x) + (-x) \\ &\stackrel{(1)}{=} (x + y) + (-x) = x + (-x) \stackrel{(4)}{=} 0. \end{aligned}$$

$\square$

4 išvada. $0 \cdot x = 0$.

Irodymas. Pasinaudoję aksiomomis įrodome, kad teisingos tokios lygybės

$$x + 0 \cdot x \stackrel{(8)}{=} 1 \cdot x + 0 \cdot x \stackrel{(7)}{=} (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x \stackrel{(8)}{=} x.$$

Taigi $x + 0 \cdot x = x$, tada iš 3 išvados gauname, kad $0 \cdot x = 0$. $\square$

5 išvada. Elemento x priešingas elementas $(-x)$ tenkina sąryšį

$$(-x) = -1 \cdot x.$$

6 išvada. Lygybė $x = y$ yra ekvivalenti lygybei $x - y = 0$.

Pateiksime pavyzdį tiesinės erdvės, kai $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, taigi tiesinės erdvės elementai irgi yra realieji skaičiai, bet dviejų skaičių suma ir sandauga iš skaliaro apibrėžiami kitaip, nei įprastiniai aritmetiniai veiksmai.

1 pavyzdys. Imkime bijekcijos atvaizdį $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pažymėkime atvirkštinę funkciją $g = f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tada apibrėžiame sumavimo $\oplus$ ir daugybos iš skaliaro $\odot$ veiksmus

$$x = \alpha \odot y \oplus \beta \odot z := g(\alpha f(y) + \beta f(z)).$$

Įsitikinsime, kad gavome naują tiesinę erdvę, t.y. patikrinsime, kad išpildytos visos tiesinių erdvių aksiomos (pateikiame tik kai kurių aksiomų analizę, kitų aksiomų teisingumą patikrinkite savarankiškai).

1. $x \oplus y := g(f(x) + f(y)) = g(f(y) + f(x)) = y \oplus x$;
2. Pasinaudoję bijekcijos atvirkštinio atvaizdžio savybe $f(g(x)) = x$, gauname

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &:= g(f(x) + f(y \oplus z)) = g[f(x) + f(g(f(y) + f(z)))] \\ &= g(f(x) + f(y) + f(z)) \\ &= g[f(g(f(x) + f(y))) + f(z)] \\ &= g[f((x \oplus y)) + f(z)] = (x \oplus y) \oplus z; \end{aligned}$$

3. Rasime nulinį elementą $\tilde{0} \in \mathbb{X}$, tokį kad

$$x \oplus \tilde{0} = x.$$

Patikrinkime, kad šis nulinis elementas yra lygties $f(z) = 0$ sprendinys, t.y. $f(\tilde{0}) = 0$. Tikrai, tada

$$\begin{aligned} x \oplus \tilde{0} &:= g(f(x) + f(\tilde{0})) \\ &= g(f(x) + 0) = g(f(x)) = x. \end{aligned}$$

Kaip pavyzdį imkime atvaizdį $f(x) = x^3 - 1$, jo atvirkštinis atvaizdis $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Tada tokios tiesinės erdvės nulinis elementas yra lygties

$$x^3 = 1$$

sprendinys, t. y. $\tilde{0} = 1$.

4. Parodysime, kad kiekvieną elementą $x \in \mathbb{X}$ atitinka priešingas elementas $(-x) \in \mathbb{X}$, toks kad $x + (-x) = 0$. Iš 5 išvados seka, jog priešingą elementą apskaičiuojame taip:

$$(-x) = (-1) \odot x = g(-f(x)).$$

Kadangi f yra bijekcijos atvaizdis, tai toks elementas visada egzistuoja.

Kaip pavyzdį vėl nagrinėkime bijekciją $f(x) = x^3 - 1$, tada $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Priešingą elementą apskaičiuojame formule

$$(-x) = \sqrt[3]{1 - (x^3 - 1)} = \sqrt[3]{2 - x^3}.$$

Imkime elementą $x = \sqrt[3]{2}$. Tada jo priešingas elementas yra

$$(-x) := (-\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2 - 2} = 0.$$

Aptarsime labai svarbią pastabą. Kadangi tiesinės erdvės $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ elementai yra realieji skaičiai, tai reikia skirti tris atvejus, kai kalbame apie nulį:

- tiesinės erdvės nulinis elementas (pavyzdyje tai $\tilde{0} = 1$, jo priešingas elementas aišku yra vėl tas pats elementas),
 - šios erdvės elementas $0 \in \mathbb{X}$, jo priešingas elementas $(-0) = \sqrt[3]{2}$.
 - skaliaras $0 \in \mathbb{R}$, nes tiesinė erdvė yra apibrėžta virš realiųjų skaičių.
8. Su kiekvienu elementu $x \in \mathbb{X}$ teisinga lygybė $1 \odot x = x$. Pasinaudoję sandaugos iš skaliaro apibrėžimu gauname

$$1 \odot x := g(f(x)) = x.$$

Priminsime, kad jei $f(x) = x^3 - 1$, tai $\tilde{0} = 1$, tačiau 8 aksiomoje elementą x dauginame iš skaliaro 1, o ne iš nulinio elemento!

Dabar įvesime naują tiesinės erdvės elementų matą.

2 apibrėžimas. Funkcija $\|\cdot\| : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ vadinama norma, apibrėžta tiesinėje erdvėje $\mathbb{X}$, jei su visais $x, y \in \mathbb{X}$ ji tenkina tokias aksiomas:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \text{ ir } \|x\| = 0 \text{ tada ir tada, kai } x = 0.$$

$$(N2) \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Tiesinė erdvė $\mathbb{X}$, kurioje apibrėžta norma $\|\cdot\|$, vadinama normuota tiesine erdve.

Jeigu normos apibrėžimo (N1) aksiomoje lygybė $\|x\| = 0$ gali būti išpildyta ir kai $x \neq 0$, tai tokią funkciją vadiname pusnorme ir žymime $|\cdot|$.

3 apibrėžimas. Tegul $\mathbb{X}$ yra normuota tiesinė erdvė. Dvi normos $\|\cdot\|_1$ ir $\|\cdot\|_2$ vadinamos ekvivalenčiomis, jeigu egzistuoja tokie skaičiai $m_1, m_2 > 0$, kad teisingi įverčiai

$$m_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq m_2\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Dabar nagrinėsime ryšį tarp metrinių ir normuotų erdvių. Kiekvienoje tiesinėje normuotoje erdvėje galime apibrėžti metriką

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (2.1)$$

Nesunku patikrinti, kad tada išpildytos visos atstumo funkcijos aksiomos. Taigi ir tiesinėms normuotoms erdvėms galime apibrėžti elementų sekų konvergavimą, nagrinėti Koši sekas ir tirti gautųjų erdvių pilnumą.

Tačiau ne kiekvienai metrinei erdvei galima parinkti tokią normą, kad galiotų (2.1) lygybė. Tokioms metrikoms turi galioti lygybė

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y),$$

bet ji neišpildyta, pavyzdžiui, atstumo funkcijai

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

4 apibrėžimas. Tegul $\mathbb{X}$ yra normuota tiesinė erdvė ir imkime poaibį $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$. Tada $\mathbb{Y}$ yra vadinamas erdvės $\mathbb{X}$ poerdviu, jei $\mathbb{Y}$ pati yra tiesinė erdvė (t.y. tenkinamos visos 8 aksiomos), o jos normą indukuoja erdvės $\mathbb{X}$ norma, susiaurinus apibrėžimo sritį iki poaibio $\mathbb{Y}$.

$\mathbb{Y}$ yra uždaras tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ poerdvis, jei ji yra poerdvis, o aibė $\mathbb{Y}$ uždara.

Sprendžiant daugelį taikomųjų uždavinių labai svarbūs baigtinės dimensijos poerdviai.

5 apibrėžimas. Tegul $\mathbb{X}$ yra tiesinė erdvė. Jos elementai $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ yra vadinami tiesiškai nepriklausomais virš realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$, jei lygtis

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$$

turi vienintelį sprendinį $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Priešingu atveju šie elementai vadinami tiesiškai priklausomais ir bent vienas iš jų gali būti išreikštas tiesine kitų elementų kombinacija

$$x_k = \alpha_1x_1 + \dots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + \alpha_{k+1}x_{k+1} + \dots + \alpha_nx_n.$$

1 uždavinys. Imkime tolydžių funkcijų $C[0, 1]$ tiesinę erdvę. Parodykite, kad funkcijos $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ yra tiesiškai nepriklausomos.

Dabar parodysime, kaip galima apibrėžti spacialaus tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ pordvio dimensiją. Pasirinkime $\mathbb{X}$ elementus $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tada aibė

$$\mathbb{Y} = \{x : x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n\}$$

sudaro tiesinį poerdvį $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ (patikrinkite visas 8 aksiomas). Apibrėšime šio poerdvio dimensiją. Jei $x_1, x_2, \dots, x_n$ yra tiesiškai nepriklausomi elementai, tai $\dim(\mathbb{Y}) = n$. Priešingu atveju egzistuoja toks skaičius $N < n$, kad N šios aibės elementų yra tiesiškai nepriklausomi (tokių rinkinių gali būti ne vienas), o bet kurie $(N + 1)$ elementai jau yra tiesiškai priklausomi. Tada $\dim(\mathbb{Y}) = N$. Kadangi iš baigtinio skaičiaus elementų galime sudaryti tik baigtinį skaičių įvairių rinkinių, tai toks algoritmas yra konstruktyvus.

Dabar nagrinėsime bendrąjį atvejį.

6 apibrėžimas. Tiesinė erdvė $\mathbb{X}$ yra baigtinės dimensijos, jei egzistuoja toks $N \geq 0$, kad N šios aibės elementų yra tiesiškai nepriklausomi, o bet kurie $N + 1$ elementai jau yra tiesiškai priklausomi. Tada $\dim(\mathbb{X}) = N$. Jeigu $\mathbb{X}$ nėra baigtinės dimensijos erdvė, tai sakysime, kad $\mathbb{X}$ yra begalinės dimensijos erdvė.

7 apibrėžimas. Jeigu $\dim(\mathbb{X}) = N$, tai bet kuri N tiesiškai nepriklausomų jos elementų aibė $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ yra vadinama tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ baze. Tada kiekvieną elementą $x \in \mathbb{X}$ vieninteliu būdu galime išreikšti bazės elementų tiesine kombinacija

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N.$$

Nesunku įrodyti, kad baigtinės dimensijos tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ bet kurioje bazėje yra toks pat elementų skaičius.

Be įrodymo pateiksime vieną svarbų teiginį, kurį dažnai naudosime mūsų tolimesnėje analizėje.

2.1 lema. Tegul $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ yra baigtinės dimensijos normuotos tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ bazė, tada egzistuoja toks skaičius $\gamma > 0$, kad visiems $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ teisingas įvertis:

$$\|c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N\| \geq \gamma (|c_1| + |c_2| + \dots + |c_N|). \quad (2.2)$$

Ankstesnėse paskaitose parodėme, kad toje pačioje elementų aibėje, galima apibrėžti įvairias neekvivalenčias metrinės erdves, prisiminkime skaičių sekų erdves ℓ^∞ ir ℓ^2 . Situacija yra kitokia, kai nagrinėjame baigtinės dimensijos normuotas tiesines erdves.

2.1 teorema. *Baigtinės dimensijos normuotoje tiesinėje erdvėje $\mathbb{X}$ visos normos yra ekvivalenčios.*

Irodymas. Tegul $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ yra tiesinės erdvės $\mathbb{X}$ bazė. Imkime bet kokią šios erdvės elementą $x \in \mathbb{X}$, tada jį galime užrašyti kaip tiesinę kombinaciją $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N$. Pasinaudoję normos trikampio nelygybe, gauname įvertį

$$\|x\|_2 = \|c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N\|_2 \leq \sum_{i=1}^N |c_i| \|x_i\|_2 \leq k_2 \sum_{i=1}^N |c_i|,$$

čia pažymėjome $k_2 = \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|_2$, ši konstanta nepriklauso nuo x . Kita vertus, iš (2.2) įverčio gauname:

$$\|x\|_1 \geq \gamma_1 \sum_{i=1}^N |c_i| \implies \sum_{i=1}^N |c_i| \leq \frac{1}{\gamma_1} \|x\|_1.$$

Todėl teisinga pirmoji ekvivalenčių normų nelygybė

$$\|x\|_2 \leq k_2 \sum_{i=1}^N |c_i| \leq \frac{k_2}{\gamma_1} \|x\|_1.$$

Antroji nelygybė

$$\|x\|_1 \leq \frac{k_1}{\gamma_2} \|x\|_2, \quad k_1 = \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|_1$$

įrodoma visai analogiškai. Čia γ_2 yra konstanta nelygybėje

$$\|x\|_2 \geq \gamma_2 \sum_{i=1}^N |c_i|.$$

□

2 uždavinys. Nagrinėkime n -matę tiesinę erdvę $\mathbb{R}^n$, jos elementai $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Apibrėžiame tokias normas (patikrinkite, kad jos tenkina visas 3 aksiomas):

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Įrodykite, kad šios normos ekvivalenčios, t.y. suraskite atitinkamas konstantas m_1, m_2 .

8 apibrėžimas. Pilna, normuota tiesinė erdvė vadinama Banacho erdve.

Jeigu normuota tiesinė erdvė nėra pilna, tai ją galime papildyti iki pilnos taikydami bendrąją papildymo schemą, kurią išnagrinėjome tirdami metrines erdves. Gausime pilnąją erdvę, kuri irgi yra tiesinė ir normuota.

Pateiksime Banacho erdvių pavyzdžių (atitinkamų metrinių erdvių pilnumas buvo įrodytas ankstesnėse paskaitose).

- Tolydžių funkcijų erdvė $C[a, b]$ su norma $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$.
- Aprėžtųjų skaičių sekų $\{x_i\}$ erdvė ℓ^∞ su norma $\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_i |x_i|$.
- Skaičių sekų $\{x_i\}$ erdvė ℓ^2 su norma $\|x\|_{\ell^2} = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 \right)^{1/2}$.