1 skyrius

Metrinės erdvės

1.1. Realieji skaičiai

Su realiaisiais skaičiais susipažinote dar mokykloje, išmokote juos naudoti spręsdami įvairius matematikos uždavinius. Tokius skaičius naudojome visuose matemtikos, fizikos, mechanikos kursuose, kuriuos mokėtės iki šiol.

Tačiau šioje paskaitoje susipažinsime su dar vienu realiųjų skaičių apibrėžimu, kuris svarbus keliais požiūriais. Pirmiausia įsitikinsime, kad sveikųjų ar racionaliųjų skaičių neužtenka net tada, kai bandome spręsti labai paprastus uždavinius, pavyzdžiui kvadratines lygtis. Tenka apibrėžti platesnę skaičių aibę – realiuosius skaičius. Tai darysime papildydami racionaliųjų skaičių aibę. Aišku, kad galima sugalvoti daug būdų, kaip tai atlikti. Mūsų pasirinktas būdas yra:

- ekonomiškas – papildomai apibrėžiame minimalią aibę naujų skaičių,
- efektyvus – gauname jau mums pažįstamą realiųjų skaičių aibę, o ji jau tinkama daugelio uždavinių sprendimui,
- universalus – tokį išplėtimo metodą naudosime daug kartų visame funkcinės analizės kurse.

Net ir paprasčiausioje darbinėje veikloje bei buityje žmonėms reikėjo skaičiuoti įvairius daiktus, taip atsirado natūralieji skaičiai (teigiami sveikieji skaičiai, kurių aibę žymėsime $\mathbb{N}$) $1, 2, 3, \ldots$, nulis 0, ir neigiami sveikieji skaičiai $-1, -2, -3, \ldots$. Sveikųjų skaičių aibę žymėsime $\mathbb{Z}$.

Tačiau tokių skaičių aibės neužtenka, kai reikia du sveikus skaičius padalinti. Pastarąjį faktą galime suformuluoti ir taip: tiesinė lygtis

$$3x = 7$$

neturi sprendinio sveikųjų skaičių aibėje. Tai, kad sveikųjų skaičių aibė nėra labai universali matome ir atvaizdavę ją geometriškai skaičių tiesėje – joje užpildyti tik atskiri taškai, tarp kurių lieka dideli tarpai.

Priminsime svarbią aibių galios sąvoką. Sakoma, kad dvi aibės A ir B yra *tos pačios galios*, jei egzistuoja abibus vienareikšmis atvaizdis tarp aibių A ir B elementų. Aibė A yra *baigtinė*, jei ji turi baigtinį skaičių n elementų, priešingu atveju ji yra *begalinė*. Aibė A vadinama *skaičia*, jei ji yra tos pačios galios kaip ir natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$.

1 uždavinys. Įrodykite, kad $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ yra skaiti aibė, t.y. sugalvokite abipus vienareikšmį atvaizdį $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ į $\mathbb{N}$.

Tada apibrėžiame *racionaliuosius skaičius*, kurie gali būti gauti padalinus vieną sveikąjį skaičių iš kito (daliklis negali būti 0)

$$\mathbb{Q} = \big\{m/n, \;\; m, n \in \mathbb{Z}, \;\; n \neq 0\big\}.$$

Taigi racionaliųjų skaičių aibė papildo sveikųjų skaičių aibę taip, jog naujoje aibėje atimties, sudėties, daugybos ir dalybos rezultatai visada yra iš tos pačios aibės.

2 uždavinys. Įrodykite, kad $\mathbb{Q}$ yra skaiti aibė.

Tai, kad racionaliųjų skaičių aibė yra daug informatyvesnė už sveikuosius skaičius matome atvaizdavę ją geometriškai skaičių tiesėje. Net ir imant nedidelį jų skaičių

$$\{n = 500, \quad m = 0, 1, \dots, n\},$$

kompiuterio ekrane intervalas $[0, 1]$ atrodo be tarpų užpildytas taškais. Ši racionaliųjų skaičių savybė labai svarbi sprenžiant daugelį sudėtingų taikomųjų uždavinių, kai sprendinį randame aproksimuodami jį paprastesnėmis funkcijomis. Beje, visuose kompiuteriuose tik racionalūs skaičiai yra naudojami vykdant skaičiavmus (prisiminkite kompiuterinės aritmetikos savybes).

Tačiau ir racionaliųjų skaičių aibė nėra pakankamai plati. Spręskime kvadratinę lygtį

$$x^2 = 2.$$

Įsitikinsime, kad nėra tokio racionalaus skaičiaus $x = m/n$, kuris būtų šios lyties sprendiniu. Tarkime priešingai, kad toks skaičius egzistuoja. Skaičiai m ir n neturi bendrų daliklių (jie yra tarpusavyje pirminiai), jei taip nėra, tai trupmenos skaitiklį ir vardiklį padaliname iš jų didžiausio bendro daliklio. Tada gauname lygybę

$$m^2 = 2n^2.$$

Vadinasi m^2 yra lyginis skaičius, o taip gali būti tik tada, kai m yra lyginis skaičius $m = 2p$. Tada gauname lygybę

$$2p^2 = n^2,$$

taigi ir n yra lyginis skaičius. O tai prieštarauja mūsų prielaidai, kad m ir n neturi bendrų daliklių.

Norint, kad duotoji kvadratinė lygtis turėtų sprendinį, reikia išplėsti racionaliųjų skaičių aibę, ją papildyti naujais skaičiais.

Prisiminsime skaičių sekų ribos apibrėžimą. Ribos sąvoka yra labai svarbi diferencialinio ir integralinio skaičiavimo teorijoje.

1 apibrėžimas. *Skaičių seka $\{x_n\}$ turi ribą a, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime rasti tokį $N = N(\varepsilon)$, kad visiems $n > N$ teisingas įvertis $|x_n - a| < \varepsilon$. Ribą žymėsime*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Kol kas šiame apibrėžime visi skaičiai $x_1, x_2, \ldots; a, \varepsilon$ yra racionalieji.

Nesunku patikrinti, kad konverguojanti seka turi vienintelę ribą (įrodykite šį teiginį).

Pirmiausia parodysime, kad galime sudaryti racionaliųjų skaičių sekas, kurių narių kvadratai artėja prie 2. Spręskime kvadratinę lygtį iteraciniu Niutono metodu. Jeigu turime sekos narį x_n, tai kitą sekos narį randame taip:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}. \tag{1.1}$$

Pradiniu artiniu pasirinkę $x_1 = 1$, gauname racionaliųjų skaičių seką

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \ldots$$

Pasirinkę kitokį pradinį artinį $x_1 > 0$, gausime dar vieną racionaliųjų skaičių seką $\{x_n\}$. Įsitikinsime, kad šių sekų narių kvadratai artėja prie 2. Atlikę nesudėtingus skaičiavimus, gauname lygybę

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{(x_n^2 - 2)^2}{4x_n^2},$$

taigi pradedant antruoju sekos nariu $x_n^2 > 2$, $n = 2, 3, \ldots$. Kadangi tokiems nariams teisingas įvertis

$$\frac{x_n^2 - 2}{4x_n^2} < \frac{1}{4},$$

tai x_{n+1}^2 nario paklaidą galime įvertinti taip

$$x_{n+1}^2 - 2 \le \frac{1}{4}(x_n^2 - 2) \le \ldots \le \frac{1}{4^{n-1}}(x_2^2 - 2).$$

Vadinasi bet kokiems $\varepsilon > 0$ galime parinkti tokį $N = N(\varepsilon)$, kad $x_n^2 - 2 < \varepsilon$, kai $n > N$, taigi racionaliųjų skaičių seka $\{x_n^2\}$ konverguoja

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 2.$$

Pateiktojo ribos apibrėžimo pagrindinis trūkumas, kad pirmiausia reikia suformuluoti hipotezę, kam lygi skaičių sekos riba, o tada jau galima tikrinti, ar ši seka tikrai konverguoja. Sprendžiant realius uždavinius, kai uždavinio sprendinį, kurio nežinome, norime aproksimuoti konverguojančia seka, toks konverguojančios sekos apibrėžimas yra visai nepraktiškas.

Todėl ieškosime ekvivalenčių sąlygų, garantuojančių sekos konvergavimą, kurias galima patikrinti naudojant tik sekos narius.

2 apibrėžimas. *Skaičių seką $\{x_n\}$ vadiname Koši seka (angl. a Cauchy sequence), jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime rasti tokį $N = N(\varepsilon)$, kad visiems $n, m > N$, teisingas įvertis $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Taigi skirtumas tarp Koši sekos narių yra kiek norima mažas, jei imsime pakankamai didelius sekos indeksus. Panašiai, kaip ir konverguojačios sekos nariai, jie grupuojasi vieno taško kiek norima mažoje aplinkoje. Įsitikinsime, kad šitas panašumas nėra atsitiktinis.

1.1 lema. *Konverguojanti seka $\{x_n\}$ yra ir Koši seka.*

Įrodymas. Jeigu seka $\{x_n\}$ konverguoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime rasti tokį $N = N(\varepsilon)$, kad visiems $n, m > N$, teisingi įverčiai $|x_n - a| < \varepsilon/2$ ir $|x_m - a| < \varepsilon/2$. Tada, pasinaudoję trikampio nelygybe, gauname įvertį

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon.$$

Lema įrodyta. $\Box$

Tačiau atvirkščias teiginys ne visada teisingas. Tuo įsitikinsime parodę, kad Niutono metodu (1.1) sudaryta kvadratinės lygties sprendinio artinių seka $\{x_n\}$ yra Koši seka. Matėme, kad kvadratinė lygtis $x^2 = 2$ neturi sprendinių racionaliųjų skaičių aibėje, todėl ir seka $\{x_n\}$ neturi ribos šioje aibėje.

Taigi patikrinkime, ar $\{x_n\}$ yra Koši seka. Nagrinėdami jos konvergavimą įrodėme, kad $x_n^2 > 2$, kai $n \geq 2$, tada teisingas įvertis $x_n > 1$, kai $n \geq 2$. Taip pat įrodėme, kad

$$|x_{n+1}^2 - 2| < \frac{1}{4}|x_n^2 - 2|, \quad n \geq 2. \tag{1.2}$$

Imkime $m > n$, tada

$$\begin{aligned}|x_n - x_m| &= |x_n - x_{n+1} + x_{n+1} - x_{n+2} + \cdots + x_{m-1} - x_m| \\ &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m|.\end{aligned}$$

Pasinaudoję Niutono sekos apibrėžimu ir nelygybe $x_n > 1$ gauname, kad

$$|x_n - x_{n+1}| = \left|\frac{x_n^2 - 2}{2x_n}\right| < \frac{|x_n^2 - 2|}{2}.$$

Pasinaudoję (1.2) įverčiu, panašiai įrodome, kad

$$|x_{n+1} - x_{n+2}| = \left|\frac{x_{n+1}^2 - 2}{2x_{n+1}}\right| < \frac{|x_{n+1}^2 - 2|}{2} < \frac{1}{4}\frac{|x_n^2 - 2|}{2}.$$

Tęsdami šį procesą, įrodome, kad

$$|x_{n+k} - x_{n+k+1}| < \frac{1}{4^k}\frac{|x_n^2 - 2|}{2}.$$

Dabar jau galime įvertinti skirtumą

$$|x_m - x_n| < \frac{|x_n^2 - 2|}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{m-n-1}}\right) \leq \frac{2}{3}|x_n^2 - 2|.$$

Kadangi seka $\{x_n^2\}$ konverguoja į 2, tai skirtumą $|x_m - x_n|$ galime padaryti kiek norima mažu visiems $n, m > N$ imdami N pakankamai didelį skaičių. Taigi $\{x_n\}$ yra Koši seka ir ji neturi ribos racionaliųjų skaičių aibėje.

Dabar išplėsime racionaliųjų skaičių aibę taip, kad kiekviena Koši seka būtų ir konverguojanti seka. Nagrinėjamo pavyzdžio atveju visos Niutono metodu sudarytos sekos turi konverguoti prie naujo skaičiaus $\sqrt{2}$.

Priminsime ekvivalentumo sąryšių ir klasių apibrėžimus, kurie apibendrina įprastinę elementų lygybės sąvoką. Aibės A elementų *binariniu sąryšiu* vadinamas bet kuris poaibis $E \subset A \times A$. Jei $(x, y) \in E$, tai sakome, kad elementas $x \in A$ yra susijęs su elementu $y \in A$ sąryšiu E, tai žymėsime xEy.

Aibės A elementų binarinis sąryšis E vadinamas:

- refleksyviu, jei xEx su kiekvienu $x \in A$;
- tranzityviu, jei iš xEy, yEz išplaukia xEz;
- simetrišku, jei iš xEy išplaukia yEx.

Refleksyvus, simetriškas ir tranzityvus sąryšis vadinamas *ekvivalentumo* sąryšiu. Jei E yra aibės A ekvivalentumo sąryšis ir $x \in A$, tai aibė

$$[x] = \{y : \quad y \in A, \quad yEx\}$$

vadinama *ekvivalentumo klase*, atitinkančia elementą x.

3 uždavinys. Sakome, kad du sveikieji skaičiai m ir n yra lygūs moduliu p (žymime $m = n \mod (p)$) tada ir tik tada, kai $m - n$ dalijasi iš p. Patikrinkite, kad lygybė moduliu p yra sveikųjų skaičių ekvivalentumo sąryšis.

3 apibrėžimas. *Dvi Koši sekos $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ yra vadinamos ekvivalenčiomis, $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$, jei $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$.*

Nesunku patikrinti, kad teisingi tokie teiginiai

1. $\{x_n\} \equiv \{x_n\}$.
2. Jei $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$, tai ir $\{y_n\} \equiv \{x_n\}$.
3. Jei $\{x_n\} \equiv \{y_n\}$ ir $\{y_n\} \equiv \{z_n\}$, tai $\{x_n\} \equiv \{z_n\}$.

Todėl tikrai turime ekvivalentumo sąryšį tarp Koši sekų.

4 apibrėžimas. *Bet kurią Koši seką $\{x_n\}$ susiejame su visomis jai ekvivalenčiomis sekomis. Visos tokios sekos sudaro ekvivalentumo klasę $x := [\{x_n\}]$. Bet kuri seka $\{x_n\}$, priklausanti x, yra vadinama jos atstovu.*

Ekvivalentumo klasės padalina visas Koši sekas į atskiras grupes ir nei viena seka $\{x_n\}$ negali priklausyti dviems skirtingoms klasėms.

Dabar įsitikinsime, kad sekų ekvivalentumo klases galime palyginti, tai yra sekoms apibendriname sąryšius *didesnis, mažesnis, lygus.* Tarkime, kad sekos $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ priklauso skirtingoms ekvivalentumo klasėms x ir y. Iš apibrėžimo seka, kad tada būtinai egzistuoja toks $\varepsilon > 0$, kad visiems $n > N_1$ yra teisingas įvertis $|x_n - y_n| \geq 2\varepsilon$. Kadangi $\{y_n\}$ yra Koši seka, tai egzistuoja toks $N_2 = N_2(\varepsilon)$, kad $|y_n - y_m| < \varepsilon$, kai $m, n > N_2$. Pasinaudoję šiomis nelygybėmis įrodome dviejų skirtingų Koši sekų atskiriamumo įvertį

$$|x_n - y_m| \geq \varepsilon, \quad n, m > N = \max(N_1, N_2).$$

Remiantis gautuoju įverčiu nesunku įrodyti, kad jei sekos $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ priklauso skirtingoms ekvivalentumo klasėms x ir y, tai egzistuoja toks N_0, kad visiems $n, m > N_0$ teisinga viena iš nelygybių $x_n > y_m$ arba $x_n < y_m$. Taigi, panašiai kaip racionaliuosius skaičius, galime lyginti ekvivalentumo klases, teisinga, kad $x < y$ arba $x = y$ arba $x > y$.

5 apibrėžimas. *Realieji skaičiai yra racionaliųjų skaičių Koši sekų ekvivalentumo klasės x, jų aibę žymėsime $\mathbb{R}$.*

Racionalieji skaičiai $x = m/n$ irgi priklauso realiųjų skaičių aibei, skaičių x atitinka ekvivalentumo klasė, kurios atskiru nariu yra stacionari Koši seka $x, x, x, \ldots$.

Realiųjų skaičių aibėje apibrėžiame aritmetines operacijas. Tegul Koši sekos $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ yra atstovai ekvivalentumo klasių x ir y. Tada dviejų realiųjų skaičių suma $x + y$, skirtumu $x - y$, sandauga xy ir dalyba x/y ($y \neq 0$) vadinsime ekvivalentumo klases, kurioms atitinkamai priklauso Koši sekos $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$. Nesunku patikrinti, kad tokių aritmetinių veiksmų rezultatas nepriklauso nuo atstovų $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ parinkimo.

Šiuo papildymo metodu atlikę racionaliųjų skaičių aibės išplėtimą iki realiųjų skaičių aibės, automatiškai garantuojame svarbią savybę – *kiekviena racionaliųjų skaičių Koši seka $\{x_n\}$ konverguoja į jos ekvivalentumo klasę x (realųjį skaičių).* Priešingu atveju iš Koši sekų atskiriamumo nelygybės sektų, kad seka $\{x_n\}$ negali priklausyti klasei x.

Tirsime kitą svarbų klausimą – ar realiųjų skaičių aibė yra *pilna*, t.y. ar realiesiems skaičiams Koši sekos savybė yra būtina ir pakankama sekos konvergavimo sąlyga. Tai, kad kiekviena konverguojanti seka yra ir Koši seka jau matėme, taigi sąlygos būtinumas akivaizdus.

Pirmiausia įsitikinsime, kad racionaliųjų skaičių aibė yra *tirštas* raliųjų skaičių poaibis. Imkime $x \in \mathbb{R}$, pasirinkime bet kurį šio skaičiaus ekvivalentumo klasės atstovą – racionaliųjų skaičių Koši seką $\{x_n\}$. Kadangi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ galima surasti tokį sekos narį x_m, kad teisingas įvertis $|x_m - x| < \varepsilon$. Taigi įrodėme, kad bet kurį realųjį skaičių norimu tikslumu galima aproksimuoti racionaliaisiais skaičiais.

Racionaliųjų skaičių aibė $\mathbb{Q}$ yra skaiti. Vadinasi realiųjų skaičių aibė $\mathbb{R}$ turi visur tirštą skaitųjį poaibį. Tokia aibė (tiksliau, metrinės erdvė, bet kaip matysime $\mathbb{R}$ yra ir metrinė erdvė) vadinama *separabiliąja*.

Tirdami realiųjų skaičių aibės pilnumą vėl naudosime papildymo metodo schemą. Kiekvienai realiųjų skaičių Koši sekai $\{f_n\}$, čia $f_n \in \mathbb{R}$, priskirsime jai ekvivalenčių sekų klasę f. Reikia išsiaiškinti ar f yra realusis skaičius, o gal vėl gauname skaičių, kuris išplečia realiųjų skaičių aibę.

Imkime šios klasės atstovą $\{f_n\}$ ir kiekvienam f_n parinkime tokį racionalų skaičių x_n, kad būtų teisingas įvertis $|f_n - x_n| < 1/n$ (tai padaryti visada galime, nes racionalieji skaičiai sudaro tirštą realiųjų skaičių poaibį). Parodysime, kad gautoji seka $\{x_n\}$ yra racionaliųjų skaičių Koši seka. Nagrinėkime dviejų sekos narių skirtumą:

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - f_n| + |f_n - f_m| + |x_m - f_m| \\ &\leq 1/n + |f_n - f_m| + 1/m. \end{aligned}$$

Kadangi $\{f_n\}$ yra realiųjų skaičių Koši seka, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N_1 = N_1(\varepsilon)$, kad $|f_n - f_m| < \varepsilon/3$, kai $n, m > N_1$. Tada imdami $n, m > \max(N_1, 3/\varepsilon)$ gauname įvertį $|x_n - x_m| < \varepsilon$, t.y. $\{x_n\}$ yra racionaliųjų skaičių Koši seka. Pažymėkime jos ekvivalentumo klasę x (tai realusis skaičius). Iš sekos $\{x_n\}$ sudarymo seka, kad

$$\lim_{n \to 0} |x_n - f_n| = 0,$$

todėl ji yra ekvivalenti realiųjų skaičių Koši sekai $\{f_n\}$, vadinasi jos abi priklauso tai pačiai ekvivalentumo klasei. Taigi $x = f$, ir x yra realiųjų skaičių Koši sekos $\{f_n\}$ riba.