1.2. Kompaktiškos aibės ir jų savybės

Šioje paskaitoje susipažinsime su svarbiomis realiųjų skaičių aibių savybėmis, jos bus naudojamos bei apibendrintos kitose paskaitose.

Imkime du realiuosius skaičius $a < b$. Realiųjų skaičių atviruoju intervalu vadinsime aibę skaičių $x \in \mathbb{R}$, tenkinančių įverčius $a < x < b$, jį žymėsime (a, b).

Uždaruoju intervalu vadinsime aibę skaičių $x \in \mathbb{R}$, tenkinančių įverčius $a \leq x \leq b$, jį žymėsime $[a, b]$.

6 apibrėžimas. *Realiųjų skaičių aibė $S \subset \mathbb{R}$ yra atvira, jei kiekvienas jos taškas $x \in S$ yra centras atvirojo intervalo, priklausančio aibei S, t.y. egzistuoja toks $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, kad $(x - \varepsilon,\, x + \varepsilon) \subset S$.*

Anksčiau mes pateikėme atvirojo intervalo apibrėžimą. Tačiau tokia aibė nebūtinai turi būti atviroji pagal naują apibrėžimą, tai reikia patikrinti (tiesa, pageidautina, kad naudojamieji matematiniai terminai būtų neklaidinantys, kad jie padėtų spręsti uždavinius). Tiesiogiai panaudoję apibrėžimą gauname, kad atvirasis intervalas (a, b) yra atviroji aibė. Tačiau uždarasis intervalas $[a, b]$ nėra atviroji aibė, nes intervalo galai a ir b negali būti centrais atvirųjų intervalų, kurie yra $[a, b]$ poaibiai.

Uždaras aibes patogu apibrėžti konstruktyviai papildant atviras aibes visais jų ribiniais taškais. Tai dar vienas bendros papildymo įdėjos taikymas, šį būdą išnagrinėsime apibrėždami uždaras aibes metrinėse erdvėse. O šioje paskaitoje pateiksime ekvivalentų apibrėžimą.

7 apibrėžimas. *Realiųjų skaičių aibė $S \subset \mathbb{R}$ yra uždara, jei kiekvienos konverguojančios sekos $\{x_n\} \subset S$ riba irgi priklauso aibei S.*

Įrodysime, kad uždarasis intervalas $[a, b]$ yra uždaroji aibė. Tarkime, kad $\{x_n\} \subset [a, b]$ ir $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Jei $x < a$, tai $a - x = \varepsilon > 0$ ir $x_n - x = x_n - a + a - x > \varepsilon$ visiems n. O tai prieštarauja prielaidai, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, taigi $a \leq x$. Analogiškai įrodome, kad $x \leq b$, taigi $x \in [a, b]$.

8 apibrėžimas. *Realiųjų skaičių aibė $S \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta, jei egzistuoja toks skaičius M, kad visiems $x \in S$ teisingas įvertis $|x| \leq M$.*

Taigi iš apibrėžimo gauname, kad aprėžtoji aibė S priklauso uždaram intervalui $[-M, M]$, t.y. $S \subset [-M, M]$.

Dabar ištirsime konverguojančių ir Koši sekų aprėžtumą. Pirmiausia įsitikinsime, kad kiekviena konverguojanti seka $\{x_n\}$ yra aprėžta. Tegul $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Tada egzistuoja toks N, kad visiems $n > N$ yra teisingas įvertis $|x_n - a| < 1$. Sekos aprėžtumo konstantą galime imti tokią

$$M = \max\big\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1\big\}.$$

Panašiai galima įrodyti, kad ir kiekviena Koši seka $\{x_n\}$ yra aprėžta.

9 apibrėžimas. *Aibė $S \subset \mathbb{R}$ vadinama aprėžta iš viršaus, jei egzistuoja toks skaičius $b \in \mathbb{R}$, kad $x \le b$ visiems $x \in S$. Panašiai apibrėžiame ir aibės aprėžtumą iš apačios.*

Nagrinėdami taikomuosius uždavinius mes dažniausiai galime išmatuoti tik dalį sekos $\{x_n\}$ narių, t.y. turime informaciją tik apie tam tikrą posekį. Kokias išvadas iš tokios informacijos galima padaryti apie visos sekos savybes? Priminsime matematinės analizės kurse įrodytas sekų savybes.

1.2 lema. *Tarkime realiųjų skaičių seka $\{x_n\}$ konverguoja ir $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Tada ir bet kuris šios sekos posekis $\{x_{n_k}\}$ konverguoja į x. Ir atvirkščiai, jei konverguojančios sekos posekis $\{x_{n_k}\}$ konverguoja į x, tai ir visa seka konverguoja į tą pačią ribą.*

Aišku, jei nežinome ar seka konverguoja, tai iš jos posekio $\{x_{n_k}\}$ konvergavimo neseka visos sekos konvergavimas. Pavyzdžiui, nagrinėkime seką $\{1, -1, 1, -1, \dots,\}$, jos nelyginių narių posekis $\{1, 1, \dots,\}$ konverguoja, bet seka ribos neturi.

Tačiau norint įrodyti, kad Koši seka konverguoja, pakanka įsitikinti, kad kuris nors jos posekis konverguoja. Šis rezultatas yra įdomus tada, kai aibė, kurioje apibrėžti sekos nariai nebūtinai yra pilna. Tada Koši sekos savybė nėra ekvivalenti konverguojančiai sekai ir gauname patogų įrankį Koši sekos konvergavimui tirti.

1.3 lema. *Jei Koši seka $\{x_n\}$ turi konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\}$:*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x,$$

tai ji ir pati konverguoja į x.

Įrodymas. Kadangi posekis $\{x_{n_k}\}$ konverguoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks $N_1 = N_1(\varepsilon)$, kad

$$|x_{n_k} - x| < \varepsilon/2, \quad \text{jei} \quad n_k > N_1.$$

Seka $\{x_n\}$ yra Koši seka, todėl egzistuoja toks $N = N(\varepsilon)$, kad

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2, \quad \text{jei} \quad n, m > N_2.$$

Imkime $N = \max(N_1, N_2)$, tada

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \varepsilon, \quad \text{jei} \quad n, n_k > N.$$

Lemos teiginys įrodytas. $\square$

Kol kas apibrėžėme dvi svarbias aibių savybes – uždarumą ir aprėžtumą. Jas abi susieja dar viena svarbi aibių savybė – jos kompaktiškumas.

10 apibrėžimas. *Realiųjų skaičių aibė $S \subset \mathbb{R}$ yra kompaktiška, jeigu iš kiekvienos sekos $\{x_n\} \subset S$ galima išskirti konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\}$, kurio riba $x \in S$.*

Įrodysime svarbią Bolcano - Vejerštraso teoremą apie kompaktiškas aibes.

1.1 teorema. *Realiųjų skaičių aibė $S \subset \mathbb{R}$ yra kompaktiška tada ir tik tada, kai ji yra uždara ir aprėžta.*

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime šių sąlygų būtinumą. Tarkime, kad aibė $S \subset \mathbb{R}$ yra kompaktiška. Patikrinsime ar tokia aibė yra uždara ir aprėžta.

Imkime konverguojančią seką $\{x_n\} \subset S$. Nežinome ar jos riba priklauso aibei S. Kadangi S yra kompaktiška, tai galime išskirti konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\}$, kurio riba $x \in S$. Bet tada, remiantis 1.2 lema, ir visa seka $\{x_n\}$ turi konverguoti į $x \in S$, taigi aibė S yra **uždara**.

Dabar įrodysime aibės S aprėžtumą. Tarkime priešingai, kad aibė S nėra aprėžta. Tada galime rasti tokią seką $\{x_n\}$, kad $|x_{n+1}| > |x_n| + 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Ši seka negali turėti Koši posekio, taigi ji neturi ir konverguojančio posekio, o tai prieštarauja prielaidai, kad aibė S yra kompaktiška. Gautasis prieštaravimas ir įrodo, kad S yra **aprėžta**.

Įrodysime sąlygų pakankamumą, t.y. jei $S \subset \mathbb{R}$ yra uždara ir aprėžta aibė, tai ji kompaktiška. Kadangi S yra aprėžtoji aibė, tai ji priklauso intervalui $S \subset [-M, M]$. Imkime seką $\{x_n\} \subset S$. Iš jos turime išskirti konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\}$. Dalinkime intervalą $I = [-M, M]$ pusiau į du intervalus $[-M, 0]$ ir $[0, M]$. Bent vienam iš jų, šį intervalą žymėsime I_1, turi priklausyti be galo daug sekos narių. Pasirinkime vieną tokį narį ir pažymėkime jį $x_{n_1} \in I_1$. Tęsdami šį procesą, dalinkime pusiau intervalą I_1, tada viena jo dalis, ją žymėsime I_2, turės be galo daug sekos $\{x_n\}$ narių, pasirinkime $x_{n_2} \in I_2$ tokį, kad $n_2 > n_1$. Taip gausime posekį $\{x_{n_k}\}$, kuris apibrėžia Koši seką (nes intervalų I_k ilgiai artėja į nulį). Kadangi $S \subset \mathbb{R}$, o $\mathbb{R}$ yra pilnoji aibė, tai Koši seka $\{x_{n_k}\}$ konverguoja į $x \in \mathbb{R}$. Kadangi $\{x_{n_k}\} \subset S$, o aibė S yra uždara, tai $x \in S$. $\square$

Kiekvienai baigtinei realiųjų skaičių aibei $x_1, x_2, \dots, x_n$ egzistuoja didžiausias ir mažiausias nariai:

$$\max_{1 \le i \le n} x_i, \quad \min_{1 \le i \le n} x_i.$$

Jei aibė yra begalinė, tai net aprėžtoji aibė gali neturėti nei didžiausiojo nei mažiausiojo nario. Kaip pavyzdį nagrinėkime realiųjų skaičių aibę

$$\left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, -\frac{n-1}{n}, \dots \right\}.$$

11 apibrėžimas. *Skaičius $x \in \mathbb{R}$ yra aibės S tikslusis viršutinis rėžis, jei*

- *x yra aibės S viršutinis rėžis;*
- *jei $z \in \mathbb{R}$ ir $z < x$, tai būtinai egzistuoja toks $y \in S$, kad $y > z$.*

Tikslusis viršutinis rėžis žymimas $\sup S$. Analogiškai apibrėžiamas aibės S tikslusis apatinis rėžis $\inf S$.

Iš apibrėžimo seka, kad aibės tikslusis viršutinis arba apatinis rėžis gali būti tik vienas. Jeigu $\sup S \in S$, tai jis vadinamas aibės S maksimaliuoju elementu ir žymimas $\max S$ (analogiškai, jeigu $\inf S \in S$, tai jis vadinamas aibės S minimaliuoju elementu ir žymimas $\min S$).

1.2 teorema. *Jeigu realiųjų skaičių aibė $S \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta iš viršaus, tai ji būtinai turi tikslųjį viršutinį rėžį.*

Įrodymas. Naudosime tą patį srities skaidymo metodą, kaip ir įrodydami Bolcano - Vejerštraso teoremą. Sudarysime seką $\{y_k\} \subset S$, konverguojančią į tikslųjį viršutinį rėžį. Pasirinkime $x_1 \in S$ ir pažymėkime uždarą intervalą $I_1 = [x_1, b]$. Jam priklauso bent vienas elementas $x_1 \in S$, pažymėkime jį $y_1 = x_1$. Imkime intervalo I_1 vidurio tašką z_1 ir padalinkime I_1 į du naujus intervalus

$$I_{1,1} = [x_1, z_1], \quad I_{1,2} = [z_1, b].$$

Intervalą I_2 pasirenkame taip:

$$I_2 = \begin{cases} I_{1,2}, & \text{jei jam priklauso bent vienas } S \text{ elementas}, \\ I_{1,1}, & \text{kitu atveju}. \end{cases}$$

Pasirenkame elementą $y_2 \in S \cap I_2$. Šį dalijimo pusiau procesą pratęsiame ir gauname Koši seką $\{y_k\} \subset S$, konverguojančią į aibės S tikslųjį viršutinį rėžį $\sup S$.

Analogiškas teiginys teisingas apie aprėžtos iš apačios aibės S tikslųjį apatinį rėžį $\inf S$.