

1.8. Metrinių erdvių papildymas

Jeigu metrinė erdvė nėra pilna, tai labai svarbu išmokti ją papildyti (išplėsti) iki pilnos erdvės. Sieksime tai padaryti taip, kad išplėstoji erdvė būtų kuo artimesnė duotajai. Šioje paskaitoje apibendrinsime metodą, kurį naudojome papildydami racionaliųjų skaičių aibę $\mathbb{Q}$ iki realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$.

Tarkime, kad turime dvi metrinės erdves $(\mathbb{X}_1, d_1)$ ir $(\mathbb{X}_2, d_2)$, tarp jų elementų apibrėžtas bijekcijos atvaizdis (t.y. abipus vienareikšmis atvaizdavimas) $x_1 \leftrightarrow x_2$, čia $x_1 \in \mathbb{X}_1$, $x_2 \in \mathbb{X}_2$. Šis atvaizdavimas vadinamas *izometrinium*, jei paėmus bet kokias susietųjų elementų poras (x_1, y_1) ir (x_2, y_2) teisinga lygybė

$$d_1(x_1, y_1) = d_2(x_2, y_2), \text{ kai } x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2.$$

27 apibrėžimas. Metrinės erdvės $(\mathbb{X}, d)$ Koši sekos $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ vadinamos ekvivalenčiomis, jei

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0, \text{ kai } n \rightarrow \infty.$$

1.16 teorema. Kiekvienai metrinei erdvei $(\mathbb{X}, d)$ egzistuoja izometrinis bijekcijos atvaizdis su kita metriniu erdve $\hat{\mathbb{X}}$, kuri yra tirštas pilnos metrinės erdvės $(\hat{\mathbb{X}}, \hat{d})$ poerdvis. Metrinė erdvė $\hat{\mathbb{X}}$ yra vadinama erdvės $\mathbb{X}$ papildiniu.

Irodymas. Kiekvieną metrinės erdvės $\mathbb{X}$ Koši seką $\{f_n\}$ susiejame su visų jai ekvivalentių Koši sekų klase F . Visų ekvivalentumo klasių aibę pažymėkime $\hat{\mathbb{X}}$ (mūsų tikslas ir bus parodyti, kad tai yra ieškomasis metrinės erdvės $\mathbb{X}$ papildymas iki pilnos erdvės).

Kiekvieną elementą $f \in \hat{\mathbb{X}}$ susiesime su stacionaria Koši seka $\{f, f, \dots\}$. Ekvivalentumo klasę F , kuriai priklauso ši seka (tokia klasė yra vienintelė), vadinsime stacionaria ekvivalentumo klase. Visų stacionarių klasių aibę pažymėsime $\tilde{\mathbb{X}} \subset \hat{\mathbb{X}}$.

Apibrėžkime metriką aibėje $\tilde{\mathbb{X}}$:

$$\hat{d}(F, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n), \quad \forall F, G \in \tilde{\mathbb{X}},$$

čia $\{f_n\} \in F$, $\{g_n\} \in G$ yra atitinkamų ekvivalentumo klasių atstovai. Įsitikinsime, kad riba egzistuoja, nepriklauso nuo atstovų parinkimo, o funkcija $\hat{d}(F, G)$ tenkina visas atstumo funkcijos aksiomas.

Tirkime ribos egzistavimą. Parodysime, kad $\{d(f_n, g_n)\}$ yra Koši seka. Iš trikampio nelygybės metrikai $d(x, y)$ gauname:

$$d(f_n, g_n) \leq d(f_n, f_m) + d(f_m, g_m) + d(g_m, g_n),$$

todėl

$$d(f_n, g_n) - d(f_m, g_m) \leq d(f_n, f_m) + d(g_m, g_n).$$

Panašiai įrodome ir nelygybę

$$d(f_m, g_m) - d(f_n, g_n) \leq d(f_m, f_n) + d(g_n, g_m).$$

Iš šių nelygybių ir simetriškumo aksiomos, gauname įvertį

$$|d(f_n, g_n) - d(f_m, g_m)| \leq d(f_n, f_m) + d(g_m, g_n).$$

Kadangi $\{f_n\}$ ir $\{g_n\}$ yra Koši sekos, tai $d(f_n, f_m) \rightarrow 0$, $d(g_n, g_m) \rightarrow 0$, kai $n, m \rightarrow \infty$, todėl

$$|d(f_n, g_n) - d(f_m, g_m)| \rightarrow 0, \quad \text{kai } n, m \rightarrow \infty.$$

Vadinasi $\{d(f_n, g_n)\}$ yra Koši seka ir jos riba egzistuoja, nes realiųjų skaičių metrinė erdvė $\mathbb{R}$ yra pilna.

Įrodysime, kad ši riba nepriklauso nuo ekvivalentumo klasių atstovų $\{f_n\} \in F$, $\{g_n\} \in G$ parinkimo. Tarkime, kad pasirinkome kitus atstovus $\{f'_n\} \in F$, $\{g'_n\} \in G$. Tada iš trikampio nelygybės gauname

$$d(f_n, g_n) \leq d(f_n, f'_n) + d(f'_n, g'_n) + d(g'_n, g_n).$$

Iš ekvivalentumo klasių apibrėžimo seka, kad

$$d(f_n, f'_n) \rightarrow 0, \quad d(g'_n, g_n) \rightarrow 0, \quad \text{kai } n \rightarrow \infty,$$

todėl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(f'_n, g'_n).$$

Analogiškai įrodome, kad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f'_n, g'_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n),$$

vadinasi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f'_n, g'_n)$.

Dabar patikrinsime, kad funkcija $\hat{d}(F, G)$ tenkina visas metrikos aksiomas.

(M1) Kadangi $d(f_n, g_n) \geq 0$, tai pasinaudoję ribų savybėmis, gauname

$$\hat{d}(F, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n) \geq 0.$$

- (M2) Jei $F = G$, tai imkime tą pačią seką atstovais abiejų ekvivalentumo klasių, $\{f_n\} \in F$ ir $\{f_n\} \in G$. Tada

$$\hat{d}(F, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f_n) = 0.$$

Jei $\hat{d}(F, G) = 0$, tai visoms Koši sekoms $\{f_n\} \in F$ ir $\{g_n\} \in G$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n) = 0,$$

taigi $F = G$.

- (M3) Atstumo funkcijos simetriškumą įrodome pasinaudoję metrikos $d(x, y)$ simetriškumu:

$$\hat{d}(F, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_n, f_n) = \hat{d}(G, F).$$

- (M4) Pasirinkime ekvivalentumo klasių $F, G, H \in \tilde{\mathbb{X}}$ atstovus $\{f_n\} \in F$, $\{g_n\} \in G$, $\{h_n\} \in H$. Trikambio nelygybę įrodome pasinaudoję metrikos $d(x, y)$ savybėmis ir ribų skaičiavimo taisyklėmis:

$$\begin{aligned} \hat{d}(F, G) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(f_n, h_n) + d(h_n, g_n)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, h_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(h_n, g_n) = \hat{d}(F, H) + \hat{d}(H, G). \end{aligned}$$

Dabar įrodysime, kad tarp metrinių erdvių $\mathbb{X}$ ir $\tilde{\mathbb{X}}$ elementų egzistuoja izometrinis bijekcijos atvaizdis. Kiekvienos stacionarios ekvivalentumo klasės $F \in \tilde{\mathbb{X}}$ atstovu imkime jai priklausančią vienintelę stacionarią Koši seką $\{f, f, \dots\} \in F$. Tokiu būdu apibrėžiame bijekcijos atvaizdį $f \leftrightarrow F$. Kitai stacionariai ekvivalentumo klasei $G \in \tilde{\mathbb{X}}$ atstovu pasirinkime jos stacionarią Koši seką $\{g, g, \dots\} \in G$. Tada teisingos lygybės

$$\hat{d}(F, G) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, g_n) = d(f, g),$$

taigi atvaizdis tarp metrinių erdvių $\mathbb{X}$ ir $\tilde{\mathbb{X}}$ yra izometrinis.

Įsitikinsime, kad $\tilde{\mathbb{X}}$ yra tirštas erdvės $\tilde{\mathbb{X}}$ poerdvis. Imkime bet kokią erdvės $\tilde{\mathbb{X}}$ elementą $F \in \tilde{\mathbb{X}}$ ir pasirinkime jo atstovą Koši seką $\{f_n\} \in F$. Tada kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks skaičius N_ε , kad visiems $n, m \geq N_\varepsilon$ teisinga nelygybė $d(f_n, f_m) < \varepsilon/2$. Imkime $N \geq N_\varepsilon$ ir sudarykime stacionarią Koši seką $\{f_N, f_N, \dots\}$, kuri priklauso stacionariai ekvivalentumo klasei $F^N \in \tilde{\mathbb{X}}$. Įvertinsime atstumą tarp F ir F^N

$$\hat{d}(F, F^N) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f_N) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

taigi kiekvienam $F \in \hat{\mathbb{X}}$ galime rasti kiek norime arti esantį elementą $F^N \in \hat{\mathbb{X}}$, taigi $\hat{\mathbb{X}}$ yra tiršta erdvėje $\hat{\mathbb{X}}$.

Lieka įrodyti, kad $\hat{\mathbb{X}}$ yra pilna metrinė erdvė. Imkime Koši seką $\{F_n\} \subset \hat{\mathbb{X}}$, reikia parodyti, kad tokia seka būtinai turi ribą. Kiekvienam elementui F_n parinkime jo atstovą – Koši seką $\{f_m^{(n)}\} \in F_n$, čia visi $f_m^{(n)} \in \mathbb{X}$. Tada egzistuoja toks $N = N_n$, kad

$$d(f_m^{(n)}, f_k^{(n)}) < \frac{1}{n}, \quad \forall m, k \geq N = N_n.$$

Pažymėkime $f_n = f_{N_n}^{(n)}$ ir sudarykime stacionarią Koši seką $\{f_n, f_n, \dots\}$, kuri priklauso stacionariai ekvivalentumo klasei $F^n \in \hat{\mathbb{X}}$. Tada įvertiname atstumą tarp ekvivalentumo klasių F_n ir F^n :

$$\hat{d}(F^n, F_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_m, f_m^{(n)}) \leq \frac{1}{n}.$$

Parodysime, kad $\{f_n\}$ yra Koši seka. Po nesudėtingų pertvarkymų, gauname (pirmoji lygybė seka iš atvaizdavimo izometrijos):

$$\begin{aligned} d(f_n, f_m) &= \hat{d}(F^n, F^m) \leq \hat{d}(F^n, F_n) + \hat{d}(F_n, F_m) + \hat{d}(F_m, F^m) \\ &\leq \frac{1}{n} + \hat{d}(F_n, F_m) + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Kadangi $\{F_n\}$ yra Koši seka, todėl $\hat{d}(F_n, F_m) \rightarrow 0$, kai $n, m \rightarrow \infty$. Taigi įrodėme, kad

$$d(f_n, f_m) \rightarrow 0, \quad \text{kai } n, m \rightarrow \infty,$$

vadinasi $\{f_n\}$ yra Koši seka. Imkime ekvivalentumo klasę $F \in \hat{\mathbb{X}}$, kuriai priklauso seka $\{f_n\} \in F$, patikrinkime hipotezę, kad ši klasė ir yra sekos $\{F_n\}$ riba. Iš trikampio nelygybės gauname

$$\hat{d}(F, F_n) \leq \hat{d}(F, F^n) + \hat{d}(F^n, F_n) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_m, f_n) + \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \text{kai } n \rightarrow \infty,$$

nes $\{f_n\}$ yra Koši seka. Parodėme, kad Koši seka $\{F_n\}$ konverguoja į F metrinėje erdvėje $\hat{\mathbb{X}}$, vadinasi $\hat{\mathbb{X}}$ yra pilna erdvė. $\square$

Panagrinėkime klausimą, kokią metrinę erdvę gausime pritaikę papildymo schemą erdvei $\mathbb{X}$, kuri jau yra pilna. Tada kiekviena jos elementų Koši seka $\{f_n\} \subset \mathbb{X}$ konverguoja $f_n \Rightarrow f \in \mathbb{X}$, kai $n \rightarrow \infty$. Vadinasi galime apibrėžti izometrinę bijekcijos atvaizdį tarp metrinių erdvių $\mathbb{X}$ ir $\hat{\mathbb{X}}$: kiekvienai ekvivalentumo klasei $F \in \hat{\mathbb{X}}$ imkime jos atstovą – Koši seką $\{f_n\}$, kurios riba $f \in \mathbb{X}$, tada ieškomas atvaizdavimas yra $f \leftrightarrow F$.

11 pavyzdys. Nepilną tolydžių funkcijų metrinę erdvę $C_p(a, b)$ papildome iki pilnos metrinės erdvės $L_p(a, b)$. Ją sudaro integruojamos intervale (a, b) funkcijos

$$L_p(a, b) = \left\{ f : \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \right\}$$

su ta pačia metrika

$$d(f, g) = \begin{cases} \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right)^{1/p}, & \text{kai } p \geq 1, \\ \int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt, & \text{kai } 0 < p < 1. \end{cases}$$