3. Diskretizavimo mtodai

3.2. Diskrečiojo modelio samprata.

Kaip jau žinoma iš anksčiau tamprumo teorijos ždavinių matematiniai modeliai yra apraš omi diferencialinėmis lygtimis ir formuluojami kaip kraštiniai uždaviniai. Analizinis tokių užd avinių sprendimas yra sudėtingas, o tikslus sprendinys yra gaunamas tiesiogiai integruojant ly gtis. Tikslus sprendinys yra universalus, tačiau jis gaunamas, kaip taisyklė, tik taisyklingos for mos sritims ir esant paprastoms kraštinėms sąlygoms.

Šiuolaikiniai skaitiniai matematikos metodai ir kompiuterinės technologijos orientuotos į apytikslį mechanikos uždavinių sprendimą. Siekiant išsprèsti skaitiškai, funkcinis matematinis modelis turi būti transformuotas į algebrinį uždavinį.

Tradiciškai kontinuumo mechanikos yra kontinualiosios struktūros. Sąvoka kontinuuma s reiškia vientisą fizinè terpè (kūną ar fizinį lauką). Esminis kontinuumo bruožas, kad jis yra s udarytas iš begalinio materialiųjų taškų skaičiaus. Kontinuumo tolydumo prielaidos taikomos visoms jo savybėms ir išoriniams poveikiams. Būtent šios savybės apibrėžia tolydumo reikalav imus. Kraštinio uždavinio transformacija į algebrinį pavidalą yra tapatinama su kontinualaus modelio diskretizavimu.

Terminas <u>diskretusis</u> šiuo atveju apibūdina struktūras (objektus ar reiškinius), kurie apra šomi baigtiniu skaičiumi kintamųjų ar kitų rodiklių. Tokios struktūros yra sudarytos iš įvairių smulkesnių sudėtinių detalių – elementų. Tokoų elementų sudarymas, aprašymas ir panaudoji mas sudėtingesnėms struktūroms modeliuoti yra natūralus būdas, kuriuo ilgus metus naudojos i ir naudojasi daugelio sričių inžinieriai. Pradėjus taikyti kompiuterines skaičiavimo technologi jas diskretizacijos technika buvo standartizuota ir unifikuota. Išskiriant formaliąsias savybes ji tapo tam tikru šablonu, kuriame dominuoja formalūs euristiniai principai ir loginiai ryšiai, o m atematinės priklausomybės tik aprašo kiekybinius ryšius. Kontinuumo sutapatinimas su diskre tine struktūra yra matematinės abstrakcijos rezultatas.

Galima pastebėti, kad diskrečiojo modelio sudarymas nėra vienareikšmis procesas. Jis re miasi matematikos žiniomis apie uždavinio diferencijalinius operatorius, funkcijų tolydumą, kr aštines sąlygas ir t. t., o taip pat informacija apie fizinius reiškinius – stebėjimus, eksperimento rezultatus, inžinierių praktiką ir t. t. Tik nagrinėjamo objekto supratimas įgalina pasirinkti tin kamą diskreditacijos būdą ir gauti patikimus modeliavimo rezultatus.

Paprastumo dėlei apsiribosime tiesiniu statikos uždaviniu. Tokio uždavinio matelatinis m odelis yra jums gerai žinomas ktraštinis ždavinys.

Taigi diskretusis modelis aprašo diskrečiąją struktūrą, kurios būvis appibūdinamas baigti niu skaičiumi nežinomų rodiklių. Šie rodikliai sudaro vektorių *U.* Išoriniai poveikiai, įskaitant kraštines sąlygas, aprašomi žinomu vektoriumi *F.* Jeigu struktūros savybes aprašytume koefici entų matrica [A], tai diskretinės sistemos elgesį galima būtų aprašyti tiesinių algebrinių lygčių sistema.

Matricine forma:

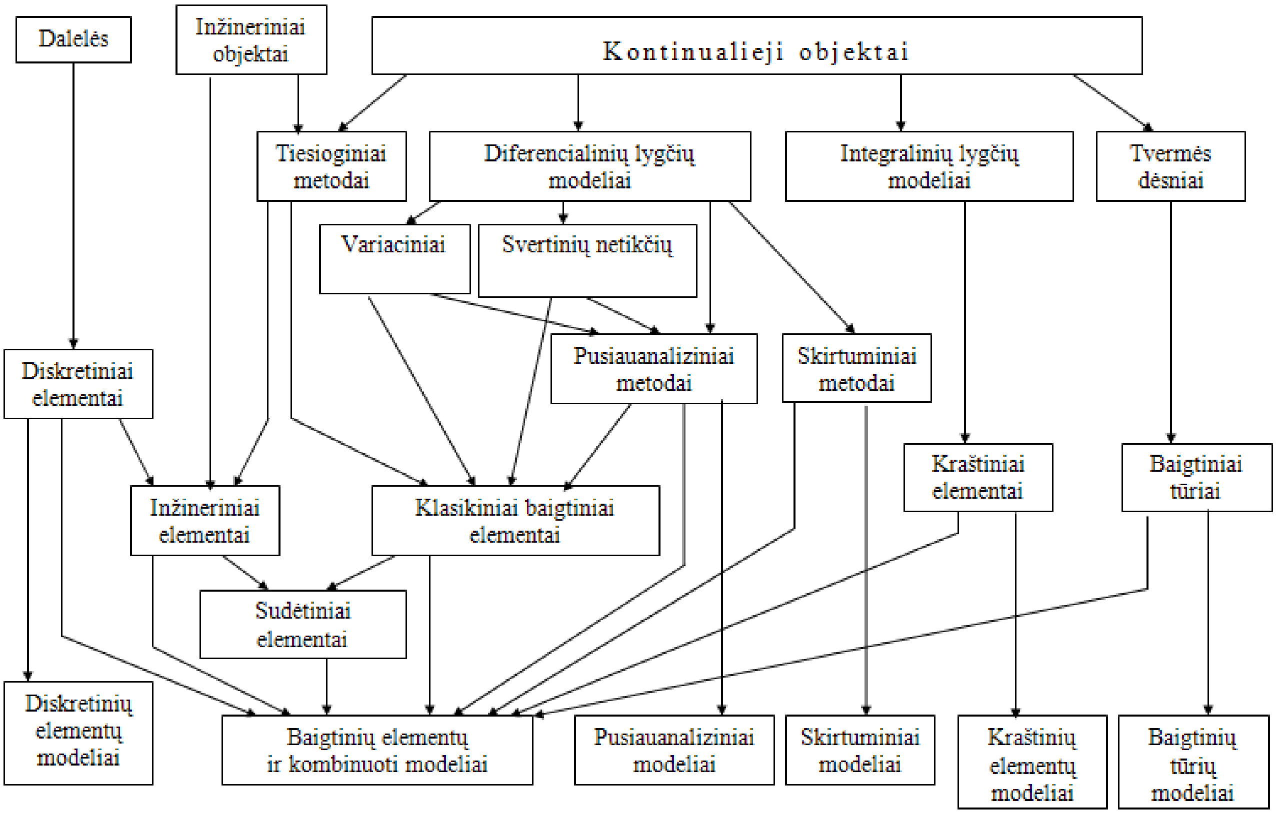
$$[A]\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} \qquad (3.5)$$

Apsiribosime tik šiuo jo aprašymu.

Diskretizavimo metodas yra būdas, kurio pagalba pradinė struktūra paverčiama diskreci aja struktūra. Jis apima rodiklių identifikavimą ir matematinio modelio (1) sudarymą. Tai sudė tingas procesas. Kalbėdami apie diskretizaciją s, tiesinį modelio (1) sudarymo principus, gali ma panaudoti ir sudėtingesnėms išraiškoms, aprašančioms pačius sudėtingiausius reiškinius.

Kaip jau minėta, atsižvelgiant į kontinuumo savybes, galimi įvairūs diskretizavimo būdai . Diskretizavimo būdai naudojo įvairias prielaidas ir hipotezes, kurių pagalba identifikuojami k ontinualiiosios struktūros būvį aprašantys kintamieji ir kiti rodikliai. Vieni iš metodų remiasi ž mogaus intuicija, kiti pagrįsti griežtais matematiniais teiginiais. Dažnai matematinės operacijo s reikalingos uždavinio pertvarkymui į tam tikrą standartinį pavidalą.

Diskretizavimo metodus aptarsime pagal brėžinyje pateiktą klasifikaciją. Ji atspindi pagri ndines šiuo metu paplitusių metodų idėjas.



Diskretizavimo metodųklasifikavimas

3.3. Pusiauanaliziniai sprendimo metodai

Pats paprasčiausias apytikslis kraštinio uždavinio sprendimas pasirinkti ieškomosios funkcijos $f(\boldsymbol{x})$ išraišką panaudojant vieną iš matematikoje jau žinomų funkcijų, dažniausią daugianarš , turinčią baigtinį narių skaičių:

$$f(\boldsymbol{x}) \approx \alpha_0 + \alpha_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \alpha_2 f_2(\boldsymbol{x}) + \ldots + \alpha_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \ldots + \alpha_n f_n(\boldsymbol{x}). \tag{3.6}$$

Ši išraiška pasirenkama taip, kad visada tapatingai tenkintų kraštines sąlygas (3.6). Taigi funkcijos $f(\boldsymbol{x})$ radimas pakeičiamas į koeficientų α_0, α_1, α_2, .., α_i, ..., α_n nustatymų, kuriems apskaičiuoti visada gali būti sudaryta $n + 1$ skaičius algebrinių lygčių. Taigi diferencialinės lygties sprendimas pakeičiamas tiesinių algebrinių lygčių sistemos sprendimu. Toks sprendimas iš pirmo žvilgsnio atrodo paprastas. Deja, jis turi keletą principinių trūkumų. Pirmiausia, sunku parinkti tokią ieškomosios funkcijos $f(\boldsymbol{x})$ išraišką, kuri tenkintų visas sąlygas. Ją praktiškai parinkti galima tik tada, kai sritis V yra taisyklingos formos. Plokštminiame uždavinyje, tai gali būti pavyzdžiui, apskritimas, elipsė, stačiakampis. Be to, funkcijos $f(\boldsymbol{x})$ išraiška (2) yra tolydinė ir negali įvertinti nagrinėjamų dydžių staigių pokyčių, o tai ypač būdinga konstrukcijų skaičiavimui (pvz., išorinės apkrovos staigus pokytis ties koncentruotomis jėgomis, skerspjūvio pasikeitimas ir kt.).

Metodai nagrinėjantys kraštinio uždavinio sprendimą, apytiksliai užsiduodant sprendinį (3) yra vadinami *pusiauanaliziniais* metodais.

3.4. Kiti funkciniai modeliai

3.4.1 Integralinė kraštinio uždavinio forma.

Priklausomybės (3.1–3.2) išreiškia kraštinių uždavinių diferencialinę arba standartinę formą. Be diferencialinės, dar esti ir integralinė kraštinio uždavinio forma, o tiksliau dvi jos atmainos – stiprioji ir silpnoji integralinės formos. Stiprioji forma užrašoma:

$$\int_V \mathbf{W}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{A}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}V + \int_S \mathbf{W}_S^T(\mathbf{x}_S)\,\mathbf{A}_S(\mathbf{u}(\mathbf{x}_S))\,\mathrm{d}S = 0, \qquad (3.7)$$

čia $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ ir $\mathbf{W}_S(\mathbf{x}_S)$ yra sverto funkcijų, apibrėžtų tūryje V ir paviršiuje S, vektoriai. Vektorių dedamųjų skaičiai sutampa su diferencialinių lygčių ir kraštinių sąlygų skaičiais.

Sąsaja tarp modelių (3.1–3.2) ir (3.7) nusakomas teiginiu: jei integralinė lygybė (3.7) tenkinama esant bet kokioms laisvai pasirinktoms sverto funkcijoms $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ ir $\mathbf{W}_S(\mathbf{x}_S)$, tai ši lygybė yra ekvivalentiška kraštinio uždavinio (3.1–3.2) sąlygoms.

Kitais žodžiais, tikroji funkcija $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ yra abiejų uždavinių – (3.1–3.2) ir (3.7) sprendinys. Esant poreikiui, lygybė (3.5) gali būti papildyta nariais, nusakančiais kraštines sąlygas paviršiaus kontūre L arba taškų aibėje P.

Integruojant dalimis, stiprioji forma (3.5) gali būti transformuota į silpnąją:

$$\int_V \left[\mathbf{B}(\mathbf{W}(\mathbf{x}))\right]^T \mathbf{C}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))\,\mathrm{d}V + \int_S \left[\mathbf{B}_S(\mathbf{W}_S(\mathbf{x}_S))\right]^T \mathbf{C}_S(\mathbf{u}(\mathbf{x}_S))\,\mathrm{d}S = 0. \qquad (3.8)$$

Silpnojoje formoje pradiniai operatoriai $\mathbf{A}$ ir $\mathbf{A}_S$ keičiami žemesnės eilės operatoriais $\mathbf{C}$ ir $\mathbf{C}_S$. Vis tik atliekant tokį keitimą, būtinas didesnis sverto funkcijų $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ ir $\mathbf{W}_S(\mathbf{x}_S)$ tolydumas. Jis nusakomas naujais diferencialiniais operatoriais – $\mathbf{B}$ ir $\mathbf{B}_S$. Būtent silpnoji integralinė forma yra gana paplitusi, formuluojant kontinuumo baigtinius elementus.

Integralinių formų (3.7–3.7) savybės daugiausia priklauso nuo į jas įeinančių operatorių savybių bei nuo sverto funkcijų parinkimo. Įvairiai parinkus šias funkcijas, galima sudaryti kelis skirtingus matematinius diferencialinių lygčių sprendimo metodus. Jie žinomi bendru vardu – kaip *svertinių netikčių* metodai. BEM taip pat priskirtinas šių metodų šeimai. Kontinuumo baigtinių elementų sudarymas svertinių netikčių metodu bus aptariamas vėliau.

3.4.2.Variacinis uždavinys. Deformuojamo kūno mechanikoje ir kitose fizikos srityse kai kurie uždaviniai formuluojami kaip ekstremumo (minimizavimo ar maksimizavimo) uždaviniai. Prie pastarųjų priskiriami ekstremumo uždaviniai, formuluojami remiantis mechanikos ekstreminiais energiniais principais.

Vienas iš ekstremumo uždavinių yra variacinis uždavinys. Trumpai aptarsime formaliąsias šio uždavinio savybes, išryškindami tik jo sąsają su kraštiniu uždaviniu.

Variacinis uždavinys be apribojimų formuluojamas taip: reikia nustatyti nežinomą funkciją $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, suteikiančią funkcionalui $\Pi(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ ekstremaliąją reikšmę. Šiuo atveju funkcionalas suprantamas kaip skaliarinė funkcija. Funkcionalas, apibrėžtas trimatėje srityje, užrašomas tokia integraline išraiška:

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \int_V \mathbf{H}\left(\mathbf{u}(\mathbf{x}), \left\{\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\partial z}\right\}, \ldots, \mathbf{p}(\mathbf{x})\right) \mathrm{d}V + \\ &+ \int_S \mathbf{H}_S\left(\mathbf{u}(\mathbf{x}_S), \left\{\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}_S)}{\partial x}\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}_S)}{\partial y}\right\}, \left\{\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}_S)}{\partial z}\right\}, \ldots, \mathbf{p}_S(\mathbf{x}_S)\right) \mathrm{d}S = 0,\end{aligned} \qquad (3.9)$$

čia $\mathbf{H}$ **ir** $\mathbf{H}_S$ yra operatoriai, apibrėžti tūryje V ir paviršiuje S. Bendruoju atveju prie funkcionalo (3.7) gali būti pridedami nariai, atspindintys kontūro linijose L ir taškų aibėje P veikiančių išorinių poveikių įtaką. Praktiniuose deformuojamo kūno mechanikos uždaviniuose funkcionalas Π išreiškiamas kvadratine ar bikvadratine forma.

Ekstremaliąją funkcionalo reikšmę užtikrinanti nežinoma funkcija $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ nustatoma pagal sąlygą, kad funkcionalas turi išlikti stacionarus, esant net nežymiems funkcijos pokyčiams, arba variacijoms, $\delta\mathbf{u}$. Tada prilyginta nuliui funkcionalo variacija

$$\delta\Pi = 0 \qquad (3.10)$$

garantuoja variacinio uždavinio sprendinį. Taikant variacinio skaičiavimo taisykles, sąlygą (3.10) galima nustatyti analiziškai ir išreikšti ją lygčių sistema:

$$\left\{\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial u}\right\} = \{0\}. \qquad (3.11)$$

Skaliarinės funkcijos diferencijavimas vektorinio argumento atžvilgiu išsamiau aptariamas matematikoje.

Lygtys (3.11) yra vadinamos Oilerio lygtimis. Galima įrodyti, kad Oilerio lygtis sutampa su kraštiniu uždaviniu (3.1–3.2). Remiantis šiais teiginiais, akivaizdi kraštinio uždavinio (3.1–3.2) ir variacinio uždavinio (3.7) sąsaja. Kiekvienas variacinis uždavinys (3.9) gali būti užrašytas Oilerio lygtimis (3.9) ir performuluotas į kraštinį uždavinį. Šios savybės būdingos variaciniams uždaviniams, sudaromiems pagal žinomus mechanikos variacinius principus. Tokie principai dar vadinami natūraliaisiais variaciniais principais. Vis tik atvirkštinis teiginys, kai kraštinis uždavinys performuluojamas į variacinį uždavinį, yra teisingas tik esant tam tikroms sąlygoms.

Variacinis uždavinys ir įvairios jo modifikacijos taikomi, kuriant skaitinius kraštinio uždavinio sprendimo metodus, kurie yra žinomi kaip *variaciniai* metodai. BEM arba jo griežtai matematiškai suformuluota versija gali būti traktuojama kaip viena iš variacinių metodų atmainų. Variacinio uždavinio bendrosios priklausomybės (3.9–3.11) bus taikomos, sudarant kontinualiųjų struktūrų baigtinius elementus.

3.5. Baigtinių elementų metodas

3.5.1. Metodo idėja

Tarp šiuo metu naudojamu skaitinių metodų ryškiai dominuoja baigtinių elementų metodas (BEM). Šis metodas apjungia daugelį savybių, būdingų matematiškai pagrįstiems skaitiniams, diferencialinių lygčių sprendimo metodams, taip ir žmogaus intuicija grindžiamiems inžineriniams metodams. BEM atsirado kaip deformuojamų mechaninių sistemų analizės metodas, tačiau palaipsniui jis buvo panaudotas šilumos sklidimo, skysčių mechanikos, elektromagnetinių ir kitų fizinių (ir ne tik fizinių) reiškinių modeliavimui. Baigtinių elementų metodas yra suvokiamas kaip metodas, skirtas fizikinių reiškinių, vykstančių iš baigtinių elementų sudarytuose objektuose nagrinėjimui. Baigtinio elemento, kaip ir BEM samprata, kildinama iš dviejų skirtingų – inžinerinio (mechaninio) ir matematinio – požiūrių. Šie požiūriai turi kaip istorinį, taip ir dalykinį kontekstą. Inžineriniu požiūriu baigtinis elementas suprantamas kaip realiai egzistuojantis tam tikros formos ir baigtinių matmenų elementas (geometrinė figūra arba idealizuotos realios konstrukcijos elementas). Matematiniu požiūriu tas pats elementas suvokiamas kaip matematinės abstrakcijos rezultatas. Nepriklausomai nuo požiūrio, o tuo pačiu nuo konkretaus elemento sudarymo būdo, baigtiniai elementai sudaro vieningą tarpusavyje sujungtų baigtinių elementų rinkinį, kuris dar yra vadinamas standartine diskretine sistema. Elementai tarpusavyje jungiami tam tikruose taškuose, vadinamuose mazgais. Visi nagrinėjami dydžiai elemento viduje aprašomi nesudėtingomis funkcijomis, kurių sudėtingumas susiejamas su mazgų skaičiumi.

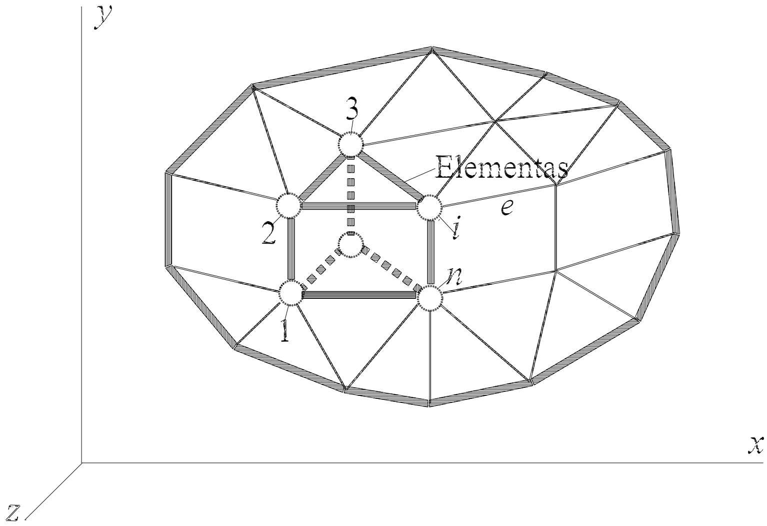
BEM populiarumas ir visi jo privalumai pasireiškia tuo, kad iš esmės nagrinėjamos tik standartinės diskusinės sistemos sudarymo ir modeliavimo procedūros, o konkrečių objektų ar reiškinių savybės išreiškiamos per konkrečius baigtinius elementus.

Įprasta prisilaikyti tokių diskretizacijos taisyklių. Kontinuali struktūra sudalijama į baigtinį skaičių elementarių geometrinių figūrų, vadinamų baigtiniais elementais. Dvimatėse struktūrose baigtiniais elementais parenkami trikampiai ir keturkampiai, o trimatėse struktūrose – įvairios prizmės, apribotos trikampiais ir keturkampiais paviršiais (4.2 pav.). Paprastai elementų geometrija ribojama tiesiomis linijomis, tačiau sudėtingesni elementai formuojami ir iš kreivų linijų ir paviršių.

Elemente, kaip taisyklė elemento paviršiuje, pažymimi tam tikri taškai, vadinami mazgais. Mazgai yra skirti elemento geometrijai, būvio kintamiesiems ar kitiems rodikliams apibrėžti. Daroma prielaida, kad elementai tarpusavyje jungiami tik per elemento išorėje esančius mazgus. Skirtingai nuo inžinerinių konstrukcijų kontinualiose struktūrose mazgų vieta daugeliu atvejų neturi fizinės prasmės. Elementų forma ir mazgų išsidėstymas turi garantuoti vienareikšmiškus elemento formos ir būvio kintamųjų atvaizdus bei reikiamą tolydumą elementų tarpusavio sujungimuose. Šioms sąlygoms įvykdyti yra suformuluoti griežti kriterijai, tačiau patys paprasčiausi reikalavimai rekomenduoja vengti mažų atstumų tarp mazgų ir smailių kampų tarp elemento briaunų.

Panagrinėsime diskretinį elementą, priskirdami jam indeksą *e (e* = 1, 2, ..., *r),* kur *r* – bendras struktūros elementų skaičius (2.2 pav.). Paprastumo dėlei nagrinėsime struktūrą, sudarytą iš vienodų elementų, o visi elementai bus aprašyti vienoje globaliojoje Dekarto koordinačių sistemoje *Oxyz*. Elemente pažymime *n* mazgų, kiekvienam mazgui priskirdami indeksą *i (i* = 1, 2, …, *n).* Indeksai atitinka lokaliųjų mazgų numeraciją, galiojančią pavieniam elementui, tuo tarpu visas BE ansamblis turi vieningą globaliąją mazgų numeraciją.

Elemento modelį susiesime su būvio kintamųjų, deformuojamo kūno atveju poslinkiu vektorine funkcija $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \{u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), \ldots, u_j(\boldsymbol{x}), \ldots, u_m(\boldsymbol{x})\}^T$. Čia indeksas *j (j* = 1, 2, …, *m) ž*ymi vektoriaus komponentes. Kiekviena funkcija $\boldsymbol{u}_j$ elemento *e* mazge *i* gali būti apibūdinta pačios funkcijos ir jos išvestinių tame mazge reikšmėms, kurias patogu aprašyti vektorium $\boldsymbol{U}_{ij}^e = \{u_j, (\partial u_j/\partial x)_i, (\partial u_j/\partial y)_i, \ldots\}$. Paprasčiausiu atveju, neįvertinus išvestinių, šis vektorius virsta skaliaru $\boldsymbol{U}_{ij}^e = \{u_j\}$. Visos viename mazge *i* identifikuotos reikšmės sudaro vektorių $\boldsymbol{U}_i^e = \{\boldsymbol{U}_{i1}^e, \boldsymbol{U}_{i2}^e, \ldots, \boldsymbol{U}_{ij}^e, \ldots, \boldsymbol{U}_{im}^e\}^T$.



4.2 pav. Dvimatė (a) ir trimatė baigtinių elementų struktūra.

Analogiškai visos elemento *e* mazginiuose taškuose apibrėžtos kintamųjų reikšmės
Tolimesnis kontinuumo elementų sudarymo žingsnis yra nežinomų funkcijų (būvio kintamųjų, šiuo atveju poslinkių) formavimas

BEM taip remiasi ta pačia pusiauanalizinių metodų idėja. Esminis skirtumas glūdi funkcijos apibrėžimo srityje – išraiška (4.8) keičiama analogiška išraiška, galiojančia tik vieno elemento ribose:

$$u^e(x) = \alpha_1^e f_1^e(x) + \alpha_2^e f_2^e(x) + \ldots + \alpha_i^e f_i^e(x) + \ldots + \alpha_n^e f_n^e(x). \tag{4.9}$$

Funkcijų f_i^e vaidmenį atlieka matematiškai gerai išnagrinėtos funkcijos su žinomomis tolydumo savybėmis. Konstruojant sprendinius, dažnai naudojami įprasti laipsniniai polinomai:

$$u^e(x) = \alpha_1^e + \alpha_2^e x + \alpha_3^e y + \alpha_4^e z + \alpha_5^e xyz + \ldots \tag{4.10}$$

Tuo būdu, taikant BEM, kraštinio uždavinio sprendinys užsiduodamas (aproksimuojamas) diskretiškai tolydžioms funkcijoms. Tolydumas elemente apsprendžiamas funkcijų $f_i^e(x)$ savybėmis, o tolydumą, tiksliau trūkius, tarp elementų tenka nagrinėti papildomai, prisilaikant tam tikrų reikalavimų. Apie tai bus kalbama kituose skyriuose.

Išraiškos (4.9-4.10) nėra patogios baigtiniams elementams sudaryti. Baigtinių elementų metodo praktikoje įprasta naudoti interpoliacines išraiškas, kur figūruoja funkcijų ar jų išvestinių mazginės reikšmės. Apsiribojant vien funkcijų reikšmėmis, mazguose u_i^e (i = 1, n) nagrinėjama funkcija aprašoma tokia apytiksle išraiška:

$$u^e(x) = N_1^e(x)U_1^e + N_2(x)U_2^e + \ldots + N_i^e(x)U_i^e + \ldots + N_n^e(x)U_n^e. \tag{4.11}$$

Funkcijų $N_i^e(x)$ šeima yra vadinama elemento formos funkcijomis. Formos funkcijos užima išskirtinę vietą BEM teorijoje ir praktikoje. Šios funkcijos turi užtikrinti išraiškos (4.11) logiką elemento mazguose, t.y. $U^e(x_i) = U_i^e$ Tai reiškia, kad formos funkcijos pasižymi specialiomis savybėmis.

$$N_i^e(x_i) = 1 \tag{4.12 a}$$

ir

$$N_i^e(x_j) = 0 \tag{4.12 b}$$

Savybės (4.12) yra panaudojamos formos funkcijų $N_i^e(x)$ šeimai sudaryti, kai i = 1, 2, …, n.

Apibendrindami išraišką (4.13) baigtiniam elementui e užrašysime matricine forma:

$$\boldsymbol{u}^e(x) = [N^e(x)]\bar{\boldsymbol{U}}^e . \tag{4.13}$$

Čia $[N^e(x)]$ yra elemento formos funkcijų matrica,o u^e elemento mazginių nežinomųjų vektorius.

Užsidavus (4.13) analogiškai modeliui (4.1) sudaromas elemento e modelis

$$[K^e]\bar{\boldsymbol{U}}^e = \boldsymbol{F}^e \tag{4.14}$$

O standartinės surinkimo procedūros pagalba gaunamas modelis (4.1). Tokiu būdu kuriant baigtinio elemento modelį visas dimensijos sutelkiamos į vieną elementą, kurio geometrija, fizinės savybės ir išraiška (4.13) nulemia jo galutinį modelį.

3.5.2. BE sudarymas variaciniais metodais

Naudojant BEM variaciniams uždaviniams. Tolydinis funkcionalas yra pakeičiamas $\Pi(u(x))$ yra pakeičiamas jo išraiškomis, sudarytom pavieniams elementams

$$\Pi(u(x)) \approx \sum_{i=1}^{n} \Pi^e(u^e(x)) = \sum_{n=1}^{e} \Pi^e([N^e(x)]\bar{\boldsymbol{U}}^e) \tag{4.15}$$

Siekiant sudaryti baigtinį elementą variaciniais metodais, užtenka žinoti uždavinio prasmę atitinkantį funkcionalą (3.7) ir užrašyti šio uždavinio Oilerio lygtis (3.9) diskrečiaisiais kintamaisiais.

Variacinių metodų ypatumus paaiškinsime tampriosios struktūros statikos uždavinio pavyzdžiu. Siekdami analogijos su nagrinėtuoju virtualiųjų poslinkių metodu, apsiribosime variacine poslinkiais išreiškiama formuluote. Samprotaujant formaliai, pirmiausiai reikia apibrėžti nagrinėjamą objektą, t. y. fizinę prasmę turintį funkcionalą (3.7). Parinkti tokį funkcionalą yra deformuojamo kūno mechanikos, o šiuo atveju tamprumo teorijos uždavinys. Problema nėra triviali, o literatūroje gausu ne visai vienodų tokio uždavinio traktuočių. Visgi čia dėmesį sutelksime į diskretizavimą ir baigtinio elemento sudarymą. Tampriosios struktūros būvį aprašantis ekstreminis energinis principas yra žinomas. Jis vadinamas pilnutinės potencinės energijos stacionarumo (konkrečiau minimumo) principu, arba Lagranžo variaciniu principu. Funkcionalas susideda iš deformacijos potencinės energijos ir jėgų potencialo. Kai kontinualioji struktūra tampri, jo išraiška:

$$\Pi_L(\{\mathbf{u}\}) = \frac{1}{2}\int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}(\{\mathbf{u}\})\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}(\{\mathbf{u}\})\}\,\mathrm{d}V - \int_V \{\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{b}\}\,\mathrm{d}V - \int_{S_F} \{\mathbf{u}_S\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{t}_S\}\,\mathrm{d}S\,. \tag{3.32}$$

Įtempimus ir deformacijas išreiškus poslinkiais, taikant lygtis (P1. b, c), funkcionalas (3.32) įgyja kitą pavidalą:

$$\Pi_L(\{\mathbf{u}\}) = \frac{1}{2}\int_V \left([\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{u}\}\right)^{\mathrm{T}}[\mathbf{D}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}\{\mathbf{u}\}\,\mathrm{d}V - \int_V \{\mathbf{u}\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{b}\}\,\mathrm{d}V - \int_{S_F} \{\mathbf{u}_S\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{t}_S\}\,\mathrm{d}S\,. \tag{3.33}$$

Diskretizuodami funkcionalą, elemento *e* poslinkių funkciją $\{\mathbf{u}\}$ pakeisime pasirinktąja išraiška (3.15), o išorinių apkrovų poveikį sutelksime į mazgus ir pažymėsime mazgų vektoriumi $\{\mathbf{F}\}^e$. Taip pertvarkius, elemento *e* funkcionalas (3.33) keičiamas diskrečiąja išraiška:

$$\Pi_L^e(\{\mathbf{U}\}^e) = \frac{1}{2}\{\mathbf{U}\}^{e\,\mathrm{T}}\left(\int_{V^e}\left([\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{N}^e(\mathbf{x})]\right)^{\mathrm{T}}[\mathbf{D}][\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{N}^e(\mathbf{x})]\,\mathrm{d}V\right)\{\mathbf{U}\}^e - \{\mathbf{U}\}^{e\,\mathrm{T}}\{\mathbf{F}\}^e\,.$$

Akivaizdu, kad pirmasis narys gali būti išreikštas standumo matrica $[\mathbf{K}^e]$, kaip pateikta (3.28). Dabar

$$\Pi_L^e(\{\mathbf{U}\}^e) = \frac{1}{2}\{\mathbf{U}\}^{e\,\mathrm{T}}[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{U}\}^e - \{\mathbf{U}\}^{e\,\mathrm{T}}\{\mathbf{F}\}^e\,. \tag{3.34}$$

Diskrečiojo funkcionalo stacionarumo sąlyga, analogiška tolydžiojo funkcionalo sąlygai (3.9), išreiškiama lygtimis:

$$\left\{\frac{\partial \Pi_L(\{\mathbf{U}\}^e)}{\partial \mathbf{U}^e}\right\} = \{\mathbf{0}\}\,. \tag{3.35}$$

Reikia prisiminti, kad $\{\mathbf{U}\}^e$ yra vektorius, todėl (3.35) – algebrinių lygčių sistema, kurios lygčių skaičius yra lygus vektoriaus $\{\mathbf{U}\}^e$ komponenčių skaičiui, t. y.:

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial \Pi_L}{\partial \mathbf{U}_{11}^e}\\ \dfrac{\partial \Pi_L}{\partial \mathbf{U}_{12}^e}\\ \cdots\\ \dfrac{\partial \Pi_L}{\partial \mathbf{U}_{1m}^e}\\ \cdots\\ \dfrac{\partial \Pi_L}{\partial \mathbf{U}_{nm}^e}\end{matrix}\right\} = \{0\}. \tag{3.36}$$

Diferencijuodami gauname, kad

$$\left\{\frac{\partial \Pi_L\left(\{\mathbf{U}^e\}\right)}{\partial \mathbf{U}^e}\right\} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}^e}\left(\frac{1}{2}\{\mathbf{U}^e\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{U}^e\} - \{\mathbf{U}^e\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{F}^e\}\right) = [\mathbf{K}^e]\{\mathbf{U}^e\} - \{\mathbf{F}^e\}.$$

Įrašome šį rezultatą į (3.35) ir, perkėlę laisvąjį narį į dešiniąją lygybės pusę, įsitikiname, kad ši stacionarumo sąlyga tapati išraiškai (3.31), gautai virtualiųjų poslinkių metodu, t. y.:

$$[\mathbf{K}^e]\{\mathbf{U}^e\} = \{\mathbf{F}^e\}.$$

Analogiškai elgiamasi ir svertinių netikčių metode.

Pritaikant apytikslią išraišką (4.13) BEM lygio sistemos suformavimui pasinaudojama tam tikrais šio metodo privalumais. Kadangi analitiškai funkcijos užduodamos tiktai BE ribose, sverto funkcijas galima irgi užsiduoti tik baigtinio elemento ribose,o integralai (4.6 ir 4.7) gali būti pakeisti atskiro integralo sumavimu 1 elemento ribose.

$$\int_{V_e} \left(w^e(x)\right)^{\mathrm{T}} A\left(N_i^e(x)\right) u_q^e \,\mathrm{d}V + \int_{S_e} \left(w_s^e(x_s)\right)^{\mathrm{T}} A_s\left(N_i^e(x)\right) U^e \,\mathrm{d}S = 0 \tag{4.16}$$

Priklausomai nuo to kaip parenkama sverto funkcija $w^e(x)$ išskiriami į diskretizacijos metodus.

1) Taškinė kolokacija kai sverto funkcija išreiškiama tiktai elemento mazginiams taškams j

$$w_j^e = \delta\left(x - x_j^e\right) \tag{4.17}$$

x_j^e - mazginio taško j koordinatė, δ - Dirako impulsinė funkcija

2) Elementinė kolokacija

$$w^e = E \tag{4.18}$$

čia sverto funkcija yra pastovi visam elementui

3) Bubnovo - Galerkino metodas

$$w^e(x) = \left[N_u^e(x)\right] \tag{4.19}$$

Čia sverto funkcija $\omega^e(x)$ sutapatinama su poslinkio formos funkcijomis $[N_u^e(x)]$. Tai matematiškai tiksliausias, o tuo pačiu pats sudėtingiausias būdas.

3.5.3. Mišrus baigtiniai elementai

Mišrus baigtiniai elementai išvedami naudojantis apriboto variacinio uždavinio modeliais. *Apribotu variaciniu* uždaviniu vadinamas variacinis uždavinys (42), kai reikia nustatyti nežinomas funkcijas $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ suteikiančią funkcionalui ekstreminę reikšmę, esant srities dalyje Ω duotai papildomų apribojimų sistemai:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) = 0 \in \Omega. \tag{4.20}$$

Naudojant Langranžo daugiklių metodą, toks uždavinys pertvarkomas ir sprendžiamas naujas variacinis uždavinys su funkcionalu:

$$\overline{\Pi} = \Pi - \int_{\Omega} \lambda^T(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\, \mathrm{d}\Omega. \tag{4.21}$$

Čia $\lambda(\boldsymbol{x})$ - naujos nežinomos funkcijos, taip vadinamos Langranžo daugiklių funkcijos. Sritis Ω gali nesutapti nei su tūriu V, nei su paviršiumi S. Jeigu abi nežinomos funkcijos aproksimuojamos panaudojant įprastinią BEM techniką, t.y. elemente e jos išreiškiamos per vietos koordinates

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{u}_e(\xi)\boldsymbol{a};\ \lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda_e(\xi)\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{u}_u^e(\boldsymbol{x}) = [N_u^e(\boldsymbol{x})]\,\boldsymbol{a}^e \lambda^e(\boldsymbol{x}) = [N_\lambda^e(\boldsymbol{x})]\,\boldsymbol{c}^e. \tag{4.22}$$

Funkcionalo (4.21) stacionarumo sąlyga, pažymėjus $\boldsymbol{b}^e = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}^T$

$$\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{b}^e}\right\} = \left\{\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{a}^e}, \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{c}^e}\right\}; \tag{4.23}$$

Algebrinėje formoje, ji išreiškiama lygtimis

$$[K_b^e]\,\boldsymbol{b}^e = \boldsymbol{F}_b^e, \tag{4.24}$$

kur

$$[K_b^e] = \begin{bmatrix} [K^e] & [K_{ac}^e] \\ [K_{ac}^e]^T & [0] \end{bmatrix};\ \boldsymbol{F}_b^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ 0 \end{Bmatrix}; \tag{4.25}$$

Čia $[\boldsymbol{K}^e]$ ir $\boldsymbol{F}^e$ išreiškia koeficientų matrica ir laisvųjų narių stulpelį, gautus naudojant Lagranžo variacinį principą. o

$$[K_{ac}] = \int_S [N_\lambda]^T [K][N_u]\, \mathrm{d}\Omega; \tag{4.26}$$

Antroji lygčių sistema turi tik vienos rūšies nežinomuosius, kurie gali būti išeliminuoti ir įstatyti į pirmąją. Iš šito modelio galima sudaryti daug įvairių uždavinių.

Hibridiniai baigtiniai elementai nuo įprastų elementų skiriasi tuo, kad elemento kontūre papildomai apibrėžiamos tam tikros funkcijos. Kontūre papildomai gali būti tikslinami poslinkiai, deformacijos arba įtempimai. Modelis (4.24) leidžia tiksliau apskaičiuoti papildomus dydžius, tačiau yra sudėtingesnis sprendimo algoritmas, ilgiau užtrunka skaičiavimai sritis Ω čia suprantama kaip elementų kontūras ir integravimas atliekamas duotuose kontūruose.

<u>Mišrūs variaciniai principai</u>. Lagranžo daugiklių metodas gali būti panaudotas ir sudėtingesniems funkcionalams sudaryti. Skirtingai nuo hibridinių elementų, kur papildomos sąlygos buvo užduotos tik elemento kontūre, jas galima užduoti visoje srityje. Elemento lygyje tai reiškia, kad galima užsiduoti ne tik poslinkių, bet ir deformacijų ar įtempimų aproksimacinis funkcijos, bei pareikalauti, kad papildomai būtų tenkinamos kokios nors lygtys. Įvertinus šias sąlygas, sudaromi sudėtingesni funkcionalai, kurių pagalba gaunami sudėtingesni, tačiau tikslesni elementai. Mišrūs funkcionalai gali būti sudaryti ir tiesiogiai varijuojant atskiromis funkcijomis kaip nepriklausomais kintamaisiais. Panagrinėsime vieną tokį mišrų, taip vadinamą Hellingerio-Reisnerio funkcionalą, kur varijuojame dviem nepriklausomomis poslinkių ir įtempimų funkcijomis. $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ ir $\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned}\Pi_R(\sigma,\boldsymbol{u}) &= \int_V \left(\sigma^T [\boldsymbol{A}]^T \boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\sigma^T [\boldsymbol{K}]^{-1}\sigma\right) dV - \\ &- \int_V \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{p}\, dV - \int_{S_F} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{p}_s\, dS - \int_{S_u} (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_s)^T [\boldsymbol{A}_s]\, \sigma\, dS\end{aligned}; \tag{4.27}$$

Baigtinio elemento e ribose užsiduodamos poslinkių ir įtempimų aproksimacines išraiškos

$$\boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{N}_{ul}(\boldsymbol{x})]\,\bar{\boldsymbol{u}}^e \text{ ir } \sigma_e(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{N}_\sigma^e(\boldsymbol{x})]\,\bar{\sigma}^e \tag{4.28}$$

Funkcionalo (4.27) stacionarumo sąlyga elemente e išreiškiama pagal (4.23), o elementui e ji yra tokio pavidalo:

$$\begin{bmatrix} [\boldsymbol{K}_{11}^e] & [\boldsymbol{K}_{12}^e] \\ [\boldsymbol{K}_{12}^e]^T & -[\boldsymbol{D}_{22}^e] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^e \\ \sigma^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_u^e \\ \boldsymbol{u}_{\sigma e} \end{bmatrix}; \tag{4.29}$$

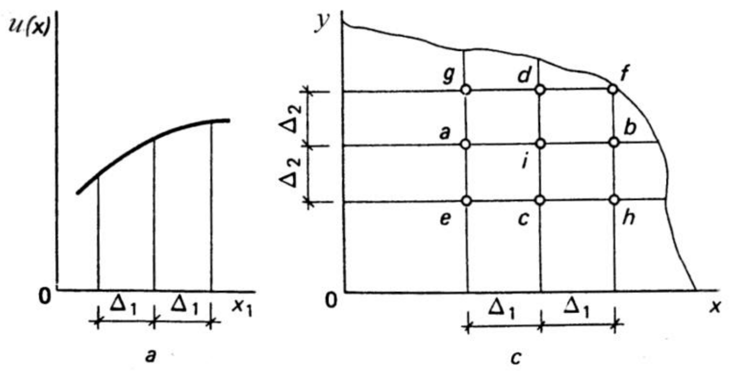
Kaip matote ji yra mišraus pobūdžio, o jos lygčių koeficientai turi skirtingą prigimtį.

3.6. Kiti metodai

3.6.1. Baigtinių skirtumų metodas

Baigtinių skirtumų metodas taikomas tiesiogiai sprendžiant diferencialines lygtis. Uždavinio apibrėžimo sritis sudaloma tinkleliu ir nežinomos funkcijos skaičiuojamos tinklelio taškuose.

Baigtinių skirtumų metodo esmė ta, kad tiek funkcijos diferencialas $\partial f(x)$, tiek ir argumentų diferencialai ∂x_i pakeičiami jų prieaugiais, ir tada pati diferencialinė lygtis tampa algebrinė. Be abejo, šis metodas taikytinas, kai ieškomos funkcijos tolydinės. Tokioms funkcijoms dvimatėje erdvėje galioja šios apytikslės priklausomybės (4.3 pav.)



4.3 pav. Baigtinių skirtumų iliustracija ir tinklelio fragmentas

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u_u}\right)_i \approx \frac{1}{2\Delta_1}\left(u_b - u_a\right),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_i \approx \frac{1}{2\Delta_2}\left(u_d - u_c\right),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)_i \approx \frac{1}{\Delta_1^2}\left(u_a - 2u_i + u_b\right) \tag{4.30}$$

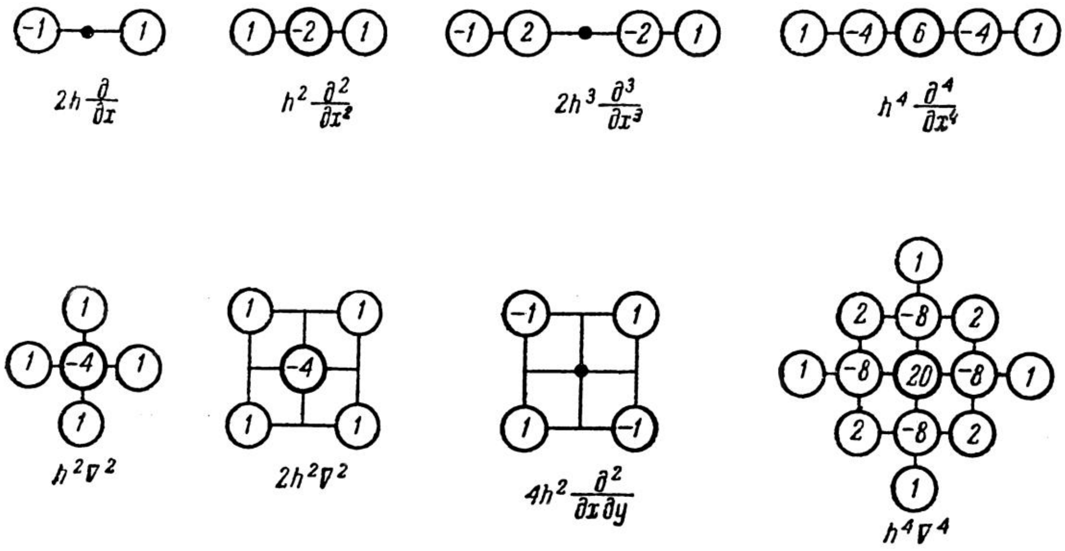
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)_i \approx \frac{1}{\Delta_2^2}\left(u_d - 2u_i + u_c\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_i \approx \frac{1}{4\Delta_1\Delta_2}\left(u_e - u_f - u_g - u_h\right)$$

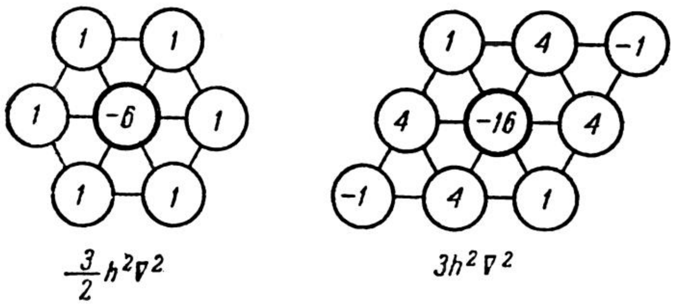
čia f – su atitinkamu indeksu yra funkcijos skaitinė reikšmė pasirinktame taške.

Aukštesnių laipsnių išvestinėms reikia imti ir tolesnes nuo nagrinėjamo taško funkcijų reikšmes. Reikia pažymėti, kad kūno vidiniuose taškuose apskaičiuoti baigtinius skirtumus paliginti paprasta. Šiek tiek sudėtingiau įvertinti kraštines sąlygas. Tam reikia imti tariamus taškus, esančius už kūno kontūro.

Skirtumines išraiškas patogu vaizduoti operatorių pagalba. Pav. 4.4 vaizduoja tokius operatorius stačiakampiam, o 4.5 trikampiam tinkleliui. Galimi ir sudėtingesni atvejai si įstrižu ar kreivalinijiniu tinkleliu.



Pav. 4.4. Stačiakampio tinklelio svarbiausieji operatoriai



Pav. 4.5. Trikampio tinklelio operatorių pavyzdžiai

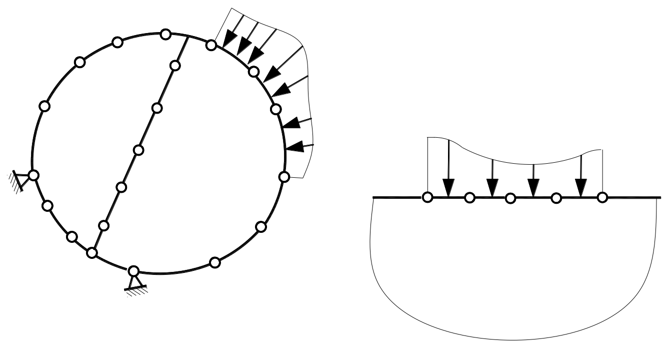
Metodo trūkumai pasireiškia esant trūkioms funkcijoms ir netaisyklingoms sritims.

3.6.2. Kraštinių elementų metodas

Funkcinės analizės pagalba kraštinį uždavinį (2.18-19) galima užrašyti kaip integralinę lygtį

$$u(x) = \sum \int_S G_S(x, y) f_S(y) dA(y) \tag{4.31}$$

Čia G_S žinoma funkcija, o f_S – žinomos funkcijos () kraštinės sąlygos. Sudalijant kontūrą į kraštinius elementus S $S \equiv \sum S^e$ ir aprašant funkcijų pasiskirstymą išilgai kontūro per formos funkcijos integralinę lygtį galima diskretizuoti ir užrašyti algebrinę lygtį sistemos pavidalu. Funkcijų reikšmės viduje srities randamos analogiškai. Metodas reikalauja gilių matematikos žinių. Gerai tinka sritims, kur nėra kontūrų.



Pav. 4.6. BE pavyzdžiai: plokščiojo kontūro dalijimas į kraštinius elementus (a) ir puserdvė (b)

3.6.3. Baigtinių tūrių metodas

Daugelis fizikos uždavinių gali būti tiesiogiai aprašomi tvermės dėsniais. Nestacionariuose uždaviniuose skaliarinė funkcija gali būti randama iš integralinės išraiškos

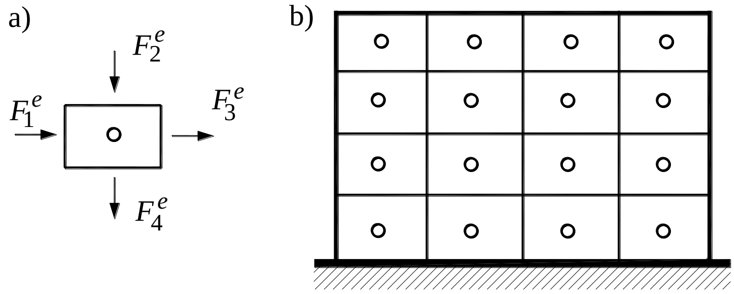
$$\frac{d}{dt}\int_V u(x,t) dV + \int_s F(x,t) ds = \int_V Q(x,t) dV \tag{4.32}$$

čia $F(x, y)$ srautas per paviršių, o $Q(x, t)$ šaltinio funkcija.

Padalijus sritį į baigtinius tūrius, tvermės dėsnis gali būti užrašytas kiekvienam tūriui V^e

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}^e(t)\cdot V^e\right)+\sum_s \boldsymbol{F}^{es}(t)\cdot s^e=\boldsymbol{Q}^e(t)\cdot V^e \tag{4.33}$$

Čia s – kraštinių skaičius, o s^{es} – tūrio kraštinės.



Pav. 4.7. Tūris *e* (a) ir baigtinių tūrių schema (b)