

# SKAIČIUOJAMOJI MECHANIKA

*(paskaitų konspektas TECHNOMATEMATIKOS programos)*

## *IVADAS*

Mokslų klasifikacijoje skaičiuojamoji mechanika priskiriama skaičiuojamiesiems dalykams, kurių vaidmuo lyginant kitais teoriniais ir taikomaisiais mokslais vis didėja. Skaičiuojamoji mechanika gali būti vertinama dvejopai. Teoriniu požiūriu tai savarankiška skaičiuojamosios fizikos dalis. Praktiniu požiūriu ji gali būti vertinama ir kaip skaičiuojamosios inžinerijos sudėtinė dalis

Dalyko pradmenys buvo padėti dar penktajame dešimtmetyje. Jie susiformavo tobulinant klasikinės statybinės mechanikos metodus, pritaikius čia matricinį skaičiavimą bei kompiuterinę techniką. Skaitiniai skaičiavimo metodai greitai buvo perkelti į skysčių ir dujų mechaniką, šilumos mainus, elektromagnetizmą ir kitas fizikos sritis. Pažangą skatino ir spartus jo taikymas inžinerijoje. Pradžioje taikymai dominavo tokiose tradicinėse su deformuojamo kūno mechanika susijusiose technikos srityse, kaip statyba, mašinų gamyba bei aviacija ir aeronautika, dabar metodai jau naudojami daug sudėtingesnėse srityse, tokiose kaip branduolinė energetika, elektronika ar cheminės technologijos. Mechanikos poveikis paspartino klasikinių fizikos ir matematikos disciplinų vystimąsi, padėjo kurti modernias kompiuterinio skaičiavimo technologijas ir diegti jas inžinerinėje praktikoje. Šiuo metu jau egzistuoja ir skaičiuojamoji chemija ir skaičiuojamoji biologija. Klasikinės skaičiuojamosios mechanikos pasiekimai padėjo atsirasti moderniajai medžiagų mechanikai.

Šiame kurse bus trumpai pateikta skaičiuojamosios mechanikos idėja, jos struktūra bei praktiniai metodo aspektai. Kurse iš esmės apsiribosime statikos uždaviniu. Pradėsime nuo inžinerinio požiūrio ir inžinerinių metodų. Po to per statikos uždavinį pateiksime diskretizavimo metodų apžvalgą, didžiausią dėmesį skirdami baigtinių elementų metodui. Baigsime pažintimi su dinamikos uždaviniu ir diskrečių elementų metodu.

## **1. SM samprata ir ryšys su kitomis disciplinomis**

### **1.1. Modeliavimo idėja**

**SCHEMA** Šiuolaikinio mokslo požiūriu skaičiuojamosios disciplinos yra kompleksinės disciplinos, kur klasikinių matematikos ir fizikos mokslų žinios yra integruojamos su technikos mokslais ir kompiuterinėmis skaičiavimo technologijomis. Tai galingas skaičiavimo instrumentas, naudojamas sudėtingų inžinerinių sistemų ir fizikinių procesų modeliavimui. Juo naudojamosi vis dažniau ir dažniau, kai sudėtingi natūriniai eksperimentai keičiami skaitiniais. Skaitiniai eksperimentai dažnai pigesni ir vaizdesni, jie leidžia nagrinėti didesnę uždavinių kiekį su mažesnėmis materialinėmis sąnaudomis.

**SCHEMOS komentaras**

Klasikinėje fizikoje visa mechanika ir kontinuumo mechanika yra fizikos dalis nepriklausoma nuo šilumos fizikos, elektros, optikos, fizikinės medžiagotyros ir kitų jos skyrių. Fizikos mokslo kontekste sąvoka klasikinė mechanika dažnai vadinama Niutono mechanika. Tai yra mokslas nagrinėjantis makroskopinių materialiujų objektų ir jų sistemų judėjimą (šio mokslo esminius teiginius apibendrino Niutonas). Dar kitos su mechanika susijusios fizikos šakos yra reliatyvioji mechanika, nagrinėjanti labai dideliais greičiais judančias sistemas, ir kvantų mechanika, nagrinėjanti mikroskopinių objektų judėjimą.

Kontinuumu plačiąja prasme yra vadinama materiali sistema, nepertraukiamai pasiskirsčiusi erdvėje. Kontinuumas apima ne tik materialius kūnus, bet ir fizinius laukus. Kontinuumo mechanika yra mokslas apie medžiaginių terpių ir jų dalelių pusiausvyrą, judėjimą ir deformavimąsi. Čia pagrindinis dėmesys sutelkiamas bendriesiems dėsningumams aprašyti nepriklausomai nuo konkretaus medžiagos būvio.

Dėl šios priežasties kontinuumo mechanika, bene labiausiai siejasi ir su kitomis klasikinės fizikos šakomis – šilumos fizika, kuri nagrinėja temperatūros laukus ir elektromagnetizmu, kuris nagrinėja elektrinius ir magnetinius laukus, ir panašiai.

Šių mokslų sandūroje atsiranda įvairios mišrios, taip vadinamos susietosios, mokslų šakos. Siauresniąja prasme tai būtų termomechanika ar magnetomechanika ir kt., ar platesniąja prasme termohidromechanika ir t.t.

Kontinuumo mechaniką sudaro trys šakos aeromechanika (dujų mechanika), hidromechanika (skysčių mechanika) ir deformuojamojo kietojo kūno mechanika. Kiekviena iš jų nagrinėja skirtingas kontinuumo formas. Visgi ši klasifikacija neapima visų galimų medžiaginio kontinuumo formų, pavyzdžiui, biriujų medžiagų, kurios pasižymi dujų, skysčio ar kietojo kūno savybėmis.

Deformuojamojo kūno mechanika nagrinėja visų pirma kietuosius kūnus. Priklausomai nuo kūno formos išskiriamos kontinualiosios ir diskrečiosios teorijos. Kontinualiosios teorijos nagrinėja visų pirma erdvinius kūnus su triašiu įtempių ir deformacijų būviu. Priklausomai nuo kūno mechaninių savybių nagrinėja visų pirma kietus kūnus išskiriamos savarankiškos deformuojamojo kūno mechanikos šakos. Tampriuosius erdvinius kūnus nagrinėja *tamprumo teorija*, plastinių savybių įtaką – plastiškumo teorija, irimą – irimo mechanika, ir t.t. Priklausomai nuo kūno ar konstrukcijos elementų formos išskiriamos diskrečiosios ir teorijos – strypinių sistemų (klasikinė statybinė mechanika), lenkiamų plokščių ar kevalų ir pan., arba taikomosios teorijos – laivų, lėktuvų ir pan. Priminsime, kad klasikinė medžiagų mechanika išskiriama kaip savarankiška deformuojamojo kūno mechanikos dalis.

Per pastaruosius penkis dešimtmečius susikūrė *skaičiuojamosios* mokslų šakos, jungiančios technologijų mokslų, skaičiuojamosios matematikos, informatikos ir kompiuterinių technologijų žinias praktinėms problemoms spręsti. Joms priskiriama ir *skaičiuojamoji mechanika*, kuri plačiąja prasme yra *skaičiuojamosios fizikos* dalis. Schemoje parodyta dar šiuolaikiškesnis ir dar labiau su kitais mokslais susietas dalykas – modernioji medžiagų mechanika.

Skaičiuojamoji mechanika suprantama kaip mokslas nagrinėjantis diskrečiųjų mechaninių struktūrų ir juose vykstančių procesų skaitinio modeliavimo metodus ir kompiuterines technologijas. Vyraujantis skaičiuojamosios mechanikos metodas yra BEM. Šios sąvokos yra gana artimos ir identiškos logikos ir skaičiavimo sekos prasme, nors SM sąvoka yra platesnė ir apima daugiau metodų.

SM samprata, kildinama iš dviejų skirtingų – inžinerinio (mechaninio) ir matematinio – požiūrių. Šie požiūriai turi kaip istorinį, taip ir dalykinį kontekstą. Inžineriniu požiūriu diskrečioji mechaninė struktūra yra realus objektas, sudaryta iš apibrėžtos formos ir baigtinių matmenų elementas

elementų. (geometrinė figūra arba idealizuotos realios konstrukcijos elementas). Matematinio požiūriu ta pati diskrečioji mechaninė struktūra yra suvokiama kaip matematinės abstrakcijos rezultatas. Nepriklausomai nuo požiūrio, didesnioji dalis modeliavimo etapų standartinės modeliavimo procedūros, o konkrečių objektų ar reiškinių savybės išreiškiamos per konkrečius elementus.

Nors šie požiūriai ir susiliejo, tačiau priklausomai nuo modeliavimo tikslų ir uždavinių vienas iš požiūrių gali būti pranašesnis už kitą.

Siekiant atsiriboti nuo konkrečių dalykų galima pritaikyti ir informacinį požiūrį. Bendruoju atveju skaičiuojamoji mechanika gal būti suprantama kaip mokslas nagrinėjantis skaičiuojamųjų modelių ar skaičiavimo algoritmų ir procedūrų sudarymą. Išskiriant formaliąsias savybes, SM metodu visuma traktuojama kaip tam tikras *šablona*, arba standartizuota ir unifikuota metodologija, skirta diskrečiųjų mechaninių struktūrų modeliavimui.

Trumpai aptarsime pagrindines modeliavimo stadijas ir modeliavimo proceso sudėtines dalis. Modeliavimo procesą galima pavaizduoti žinoma schema. **SCHEMA**

Iš anksto susitariama, kad objektas bus nagrinėjamas kokioje nors kompiuterizuotoje terpėje. Visa objektą apibūdinanti informacija bus saugoma informacijos bazėje, o visos objektą valdančios operacijos atliekamos kompiuterio pagalba. Siekiant realų objektą įtraukti į kompiuterizuotos sistemos aplinką, pirmiausia objektas *formalizuojamas*. Formalizavimas reiškia jo reikalingų savybių identifikavimą. Jis apima tiek simbolių, tiek idėjų pasaulio kategorijas. Fizinio objekto (pastato, mašinos ar technologinio proceso) savybės išreiškiamos jo geometrijos ar fizinių savybių rodikliais, išoriniais poveikiais, kokybės kriterijais ir kitais panašiais rodikliais, kurie identifikuojami simboliais. Kokybinės objekto savybės (grožis, patogumas ar kita), susijusios su stebėjimo interpretacija, gali būti apibūdinamos idėjų pasaulio kategorijomis.

Formalizavus objektą, sudaromas jo *fizinis modelis*, kuris nusako esminius objekto rodiklius ir nustato tarp jų egzistuojančius *kokybinius* ryšius. Tiek rodiklio parinkimas, tiek objektą, apibūdinančio fizinio dėsningumo nustatymas, yra intelektualus kūrybinis procesas. Tai yra fizikos ar technologinių mokslų objektas. Vis tik ne mažesnę vaidmenį čia vaidina ir inžinerinė patirtis, kai reikia išskirti būtent inžinerinei praktikai svarbias objekto savybes. Fizinio modelio adekvatumas gali būti tikslinamas ir fizinio (natūrinio) eksperimento pagalba.

Nagrinėjamo objekto arba, tiksliau sakant, jo idealizuoto fizinio modelio elgesys yra aprašomas *matematiniais modeliais*. Nepretenduojant į tikslų matematinio modelio apibrėžimą, galima teigti, kad tai yra fizinio modelio abstraktus pavidalas. Jis išreiškia fizikinius dėsnius matematinėmis išraiškomis. Matematinis modelis nustato *kiekybinius ryšius* tarp modelio rodiklių, naudojant griežtas matematinės formuluotes bei metodus.

Fizinio reiškinio gilus žinojimas padeda sudaryti veiksmingus realius matematinis modelius, nustatyti jų galiojimo ribas. Tik abipusis fizinio ir matematinio modelio atitikimas padeda kokybiškai aprašyti realiai egzistuojančius objektus. Tą patį objektą galima aprašyti skirtingo sudėtingumo matematiniais modeliais. Priklausomybės tarp skaliarų, vektorių ir tenzorių ar jų laukų gali būti aprašytos elementariomis formulėmis, diferencialinėmis ir integralinėmis lygtimis ar kitokiais matematikoje žinomais modeliais.

Seką tarpinių matematinio modelio būsenų (seką matematinų operacijų), kurias jis įgyja kelyje tarp teorinio matematinio modelio ir kompiuteriu gautų objektą aprašančių skaičių, įprasta vadinti *skaičiuojamuoju modeliu*. Bet koks matematinio uždavinio sprendimo algoritmas gali būti vertinamas kaip šio uždavinio skaičiuojamasis modelis. Tiesiniai algebros uždavinių sprendimo algoritmai yra skaičiuojamoje mechanikoje labiausiai paplitę skaičiuojamieji modeliai. Skaičiuojamojo modelio rezultato interpretacija leidžia susidaryti vaizdą apie modeliuojamą objektą, jo elgesį ar tinkamumą norimai paskirčiai.

Fizinio objekto modeliavimo kompiuterinėje aplinkoje procesas gali būti pavaizduotas daugiacikle schema (1 pav.). Projektuojant objektus, modeliuojant nestacionarius ar netiesinius procesus, objekto būvis įvairiose daugiamatės erdvės taškuose nustatomas priartėjimo būdu, kartojant visą modeliavimo ciklą ar atskirus jo etapus. Tokios modeliavimo schemas įgyvendinimas susijęs su daugeliu veiksmu. Išskirsime tris iš jų.

Ryšys tarp objekto ir atskiro jo modelio palaikomas *informacijos srautais*. Informacijai kaupti sudaromos *žinių (duomenų) bazės*. Jose kaupiami techniniai objekto duomenys, intelektualinė informacija (žinios), eksperimentinio tyrimo rezultatai ir visa kita reikalinga informacija. Informacinės bazės yra neatskiriami šiuolaikinių kompiuterinių sistemų dalis.

Antras svarbus veiksnys yra *kompiuterinė įranga*. Procesoriai, atminties įrenginiai, informacijos perdavimo įrenginiai lemia skaičiavimo kainą, greitį, apimtį ir kitus skaičiavimo procesą nusakančius rodiklius. Naujausios įrangos, tarkime, modernios grafikos ar lygiagrečiai dirbančių procesorių panaudojimas turi lemiamą įtaką ne tik skaičiavimo technologijoms, bet ir skatina iš principo naujų matematinių ar skaičiuojamųjų modelių atsiradimą.

Trečias modeliavimo procese veiksnys yra aktyvus jo *subjektas-žmogus*. Žmogaus elgesio modeliavimo procese formalizavimas, jo intelekto panaudojimas pastaruosiu metu įgauna vis didesnę svarbą. Būtent žmogaus žinios lemia blogai sąlygotų uždavinių sprendimą. *Dirbtinis intelektas, ekspertinės sistemos* ir panašios euristicos žiniomis paremtos informatikos mokslo kryptys turi vis didesnę įtaką tikslųjų mokslų raidai.

## 1.2. Modelio struktūra

SM uždavinio klasifikavimas pagal mechaninį, matematinį ir skaičiuojamąjį modelius būtų pernelyg grubus. Tikrovėje SM uždavinys susideda iš didesnio skaičiaus sudedamųjų dalių. Realūs uždaviniai ir detalūs sprendimo algoritmai gali būti pavaizduoti įvairiomis tam tikrų sudedamųjų dalių kombinacijomis.

Aptarsime formalų modelio sudarymo ir pavaizdavimo būdą. **Pav. 3.** Jeigu mes gerai žinome visas uždavinio ir jo sprendimo algoritmo elementus, ar atskirus etapus, juos galima suklasifikuoti pagal požymius. Formaliai pavadinkime juos požymiais A, B, C ir t.t. Galima teigti, kad visi vienu požymiu apibūdinami elementai yra alternatyvūs, jie atspindi tam tikras savybes. Savo ruožtu juos galima irgi suklasifikuoti tam tikra tvarka, pavyzdžiui, hierarchiškai, pagal sudėtingumą. Elementus priklausančius tam požymiui priskirsime indeksus 1, 2, 3, 4 ir t.t. Tokią klasifikaciją galima pavaizduoti matricos arba grafo pavidalu. Konkretaus uždavinio konkretus modelis gali būti pavaizduotas kaip elementų kombinacija.

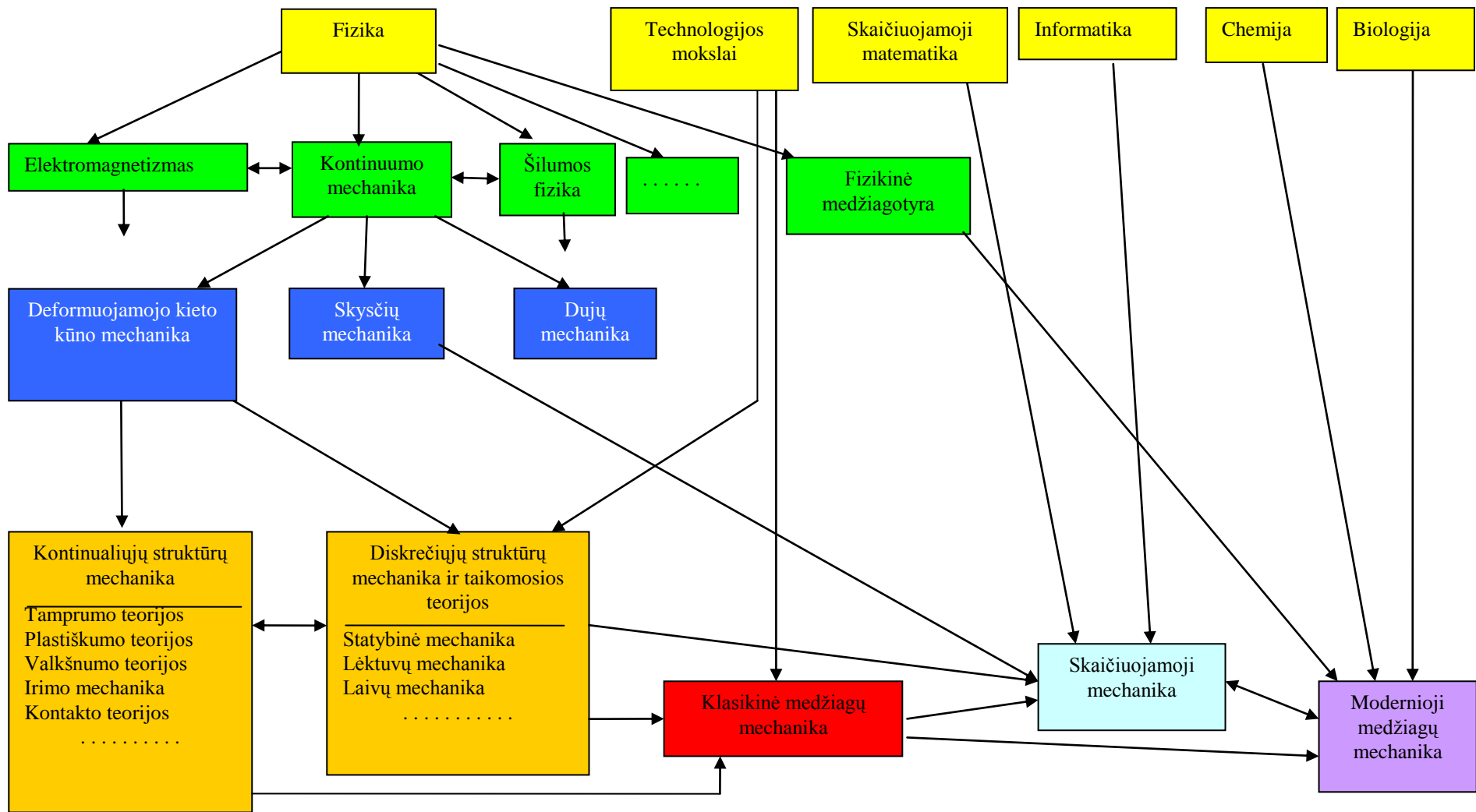
Tikrovėje, norint sudaryti tokią struktūrą reikia gerai išmanyti uždavinius ir jų modelius. Mes pasielgsime atvirkščiai. Susidarysime veikiančių SM modelių struktūrą, tam, kad juos suprastume.

Aptarsime SM modelio struktūrą. **Pav. 4.** Schema nėra detali. Ji skirta daugiau modelio idėjai pailiuoti.

Aptarti požymius

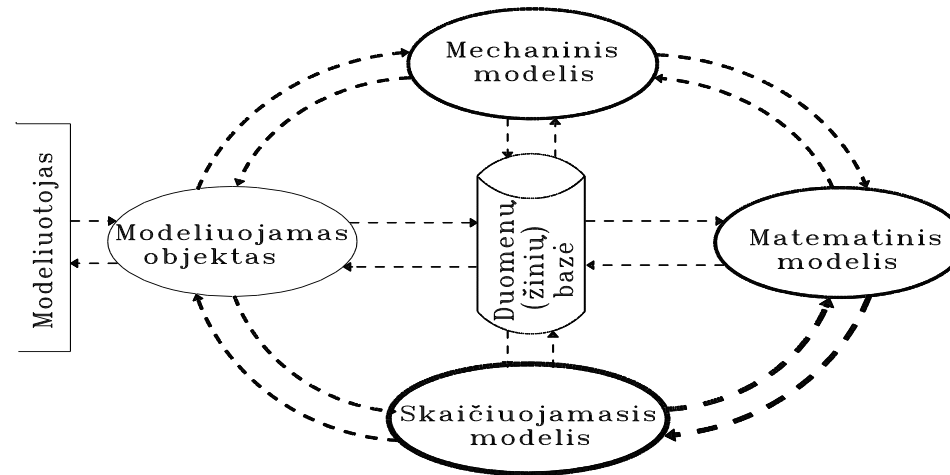
Uždavinių modelius

Statikos uždavinys

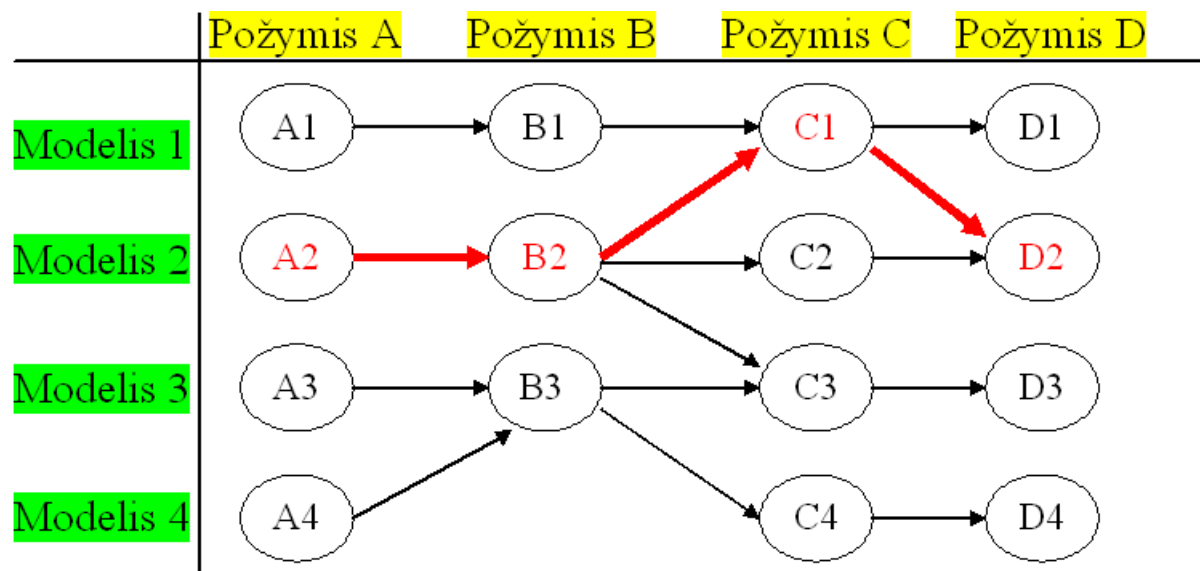


1 pav. Mechanikos sąsajos su kitais mokslais

Pav. 2. Modeliavimo schema



Pav. 3. Skaičiuojamojo modelio sudarymo schema



Atskiro uždavinio modelis

A2 --- B2 --- C1 --- D2

Pav. 4. Skaičiuojamosios mechanikos modelio struktūra (1)

Deformuojamas objektas	Uždavinys	Analizinis modelis	Aprašymo būdas
Trimatis kūnas	Statinės pusiausvyros	Kraštinis uždavinys	Diferencialinės lygtys
Dvimatis kūnas	Dinaminės pusiausvyros	Pradinių reikšmių uždavinys	Variacinis uždavinys
Kevalas	Virpesių	Tikrinių reikšmių uždavinys	Integralinė forma
Lenkiamų plokštė	Optimizavimo	Matematinio programavimo uždavinys	Integralinės lygtys
Lenkiamas strypas	Stabilumas	Kiti	Kiti
Lenkiamas strypas su šlytimi	Irimas		
Diskrečioji struktūra			

Pav. 5. Skaičiuojamosios mechanikos modelio struktūra (2)

Diskretizavimo metodas	Diskretizavimo būdas	Diskrečiojo elemento forma	Algebrinis modelis	Sprendimo algoritmas	Kompiuterinė programa
Baigtinių elementų	Tiesioginis	Erdvinis	Tiesinių algebr. lygčių sistema	Tiesioginiai	ALGOR
Baigtinių skirtumų	Variacinis	Plokštuminis	Algebrinių-diferencialinių lygčių sistema	Iteraciniai	ANSYS
Kraštinių elementų	Svertinių netikčių	Vienmatis	Tikrinių reikšmių uždavinys	Išreikštiniai	Kita
Diskrečiųjų elementų	Mišrūs	Taško	Matematinio programavimo uždavinys	Neišreikštiniai	
Mišrūs	Superelementų	Kita		Kita	



6 pav. Kontinualiųjų struktūrų statinės analizės uždavinio baigtinių elementų modelio schema

Deformuojamas objektas	Uždavinys	Analizinis modelis	Aprašymo būdas
Trimatis kūnas	Statinės pusiausvyros	<u>Kraštinis uždavinys</u>	Variacinis uždavinys
Dvimatis kūnas			Integralinė forma
Kevalas			

Diskretizavimo metodas	Diskretizavimo būdas	Diskrečiojo elemento forma	Algebrinis modelis	Sprendimo algoritmas	Kompiuterinė programa
Baigtinių elementų	Variacinis	Erdvinis	<u>Tiesinių lygčių sistema</u>	Tiesioginiai	ALGOR
Kiti	Svertinių netikčių	Plokštuminis		Iteraciniai	ANSYS

7 pav. Strypinių struktūrų statinės analizės uždavinio baigtinių elementų modelio schema

Deformuojamas objektas	Uždavinys	Diskretizavimo metodas	Diskretizavimo būdas	Diskrečiojo elemento forma	Algebrinis modelis	Sprendimo algoritmas	Kompiuterinė programa
Diskrečioji struktūra	Statinės pusiausvyros	Baigtinių elementų	Tiesioginis	Vienmatis	Tiesinių lygčių sistema	Tiesioginiai	ALGOR
						Iteraciniai	ANSYS

8 pav. Dinaminės pusiausvyros uždavinio baigtinių elementų modelis

Uždavinys	Analizinis modelis	Aprašymo būdas	Diskretizavimo metodas	Diskretizavimo būdas	Algebrinis modelis	Sprendimo algoritmas	Kompiuterinė programa
Dinaminės pusiausvyros	Pradinių reikšmių uždavinys	Diferencialinės lygtys	Baigtinių elementų	Svertinių netikčių	Algebrinių-diferencialinių lygčių sistema	Išreikštiniai	ANSYS
						Neišreikštiniai	

9 pav. Virpesių uždavinio modelis

Uždavinys	Analizinis modelis	Diskretizavimo metodas	Algebrinis modelis	Sprendimo algoritmas	Kompiuterinė programa
Virpesių	Tikrinių reikšmių uždavinys	Baigtinių elementų	Tikrinių reikšmių uždavinys	Poerdvio iteracijų	ALGOR
				Kiti	ANSYS

10 pav. Diskrečių elementų metodo matematinis modelis

Diskretizavimo metodas	Diskrečiojo elemento forma	Algebrinis modelis	Sprendimo algoritmas	Kompiuterinė programa
Diskrečiųjų elementų	Taškas (sfera, kitos)	Algebrinių-diferencialinių lygčių sistema	Išreikštiniai	DEMMAT
				TRUBALL

11 pav. Optimizavimo uždavinys

Uždavinys	Analizinis modelis	Diskretizavimo metodas	Algebrinis modelis	Sprendimo algoritmas	Kompiuterinė programa
Optimizavimo	Matematinio programavimo uždavinys	Baigtinių elementų	Matematinio programavimo uždavinys	Simpleks metodas	OPTIM