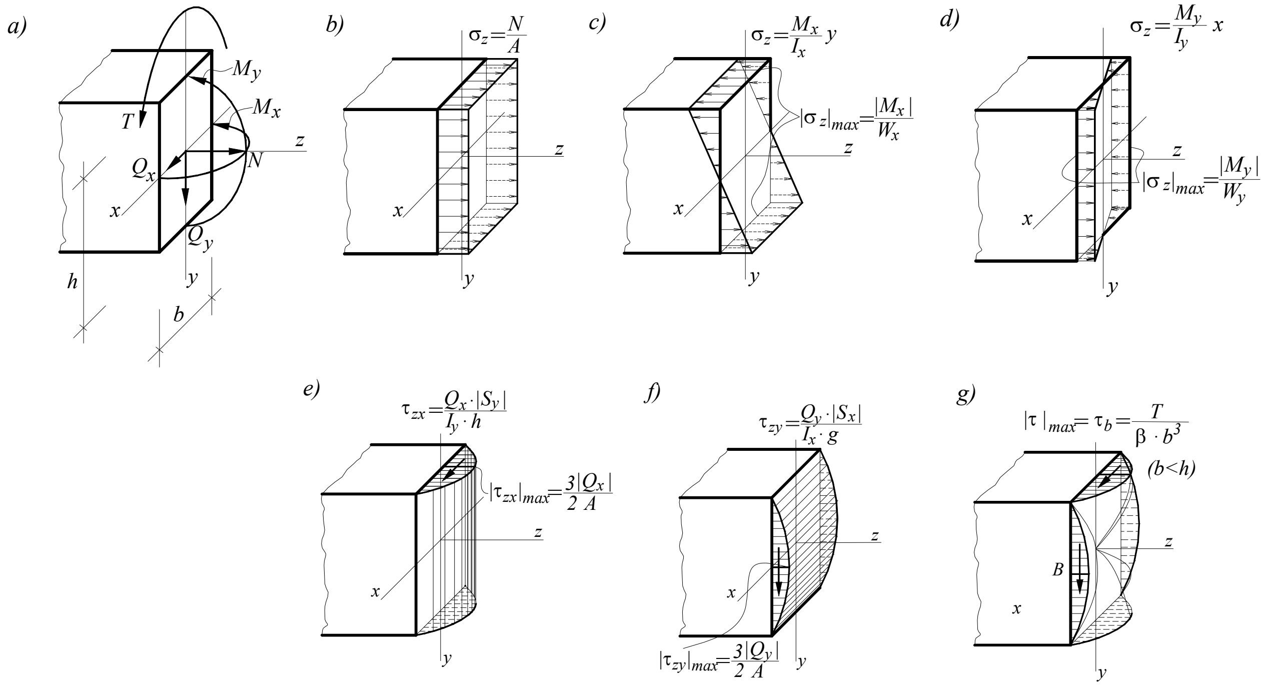
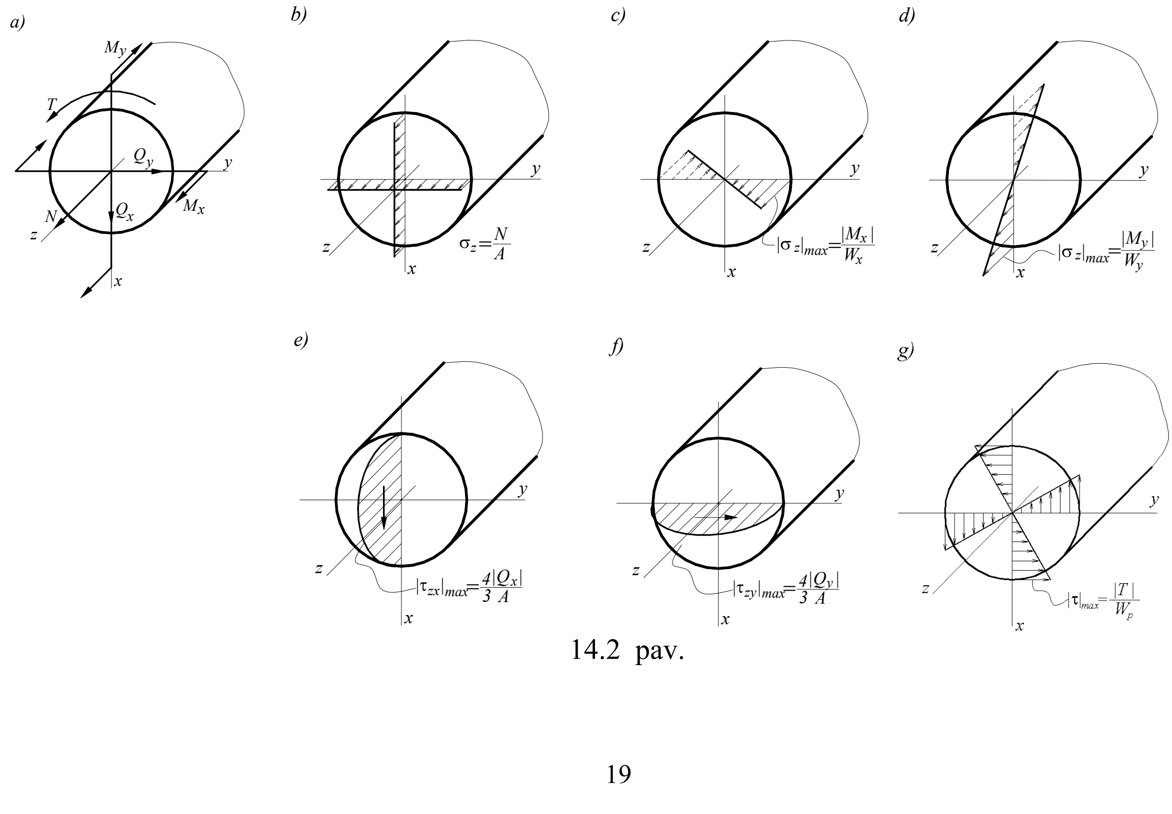
14. Sudėtingas strypų deformavimas

14.1. Bendriausias sudėtingo strypų deformavimo atvejis

■ Bendriausias sudėtingo strypų deformavimo atvejis yra tas, kai elemento skerspjūvyje veikia visos šešios įrąžos: N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, T. Šiuo atveju strypas yra ir tempiamas (gniuždomas), ir šliejamas (nuo skersinės jėgos ir sukimo momento), ir lenkiamas. Kaip pasiskirsto įtempimai strypo skerspjūvyje nuo kiekvienos iš šių įrąžų, jau žinome. Dažniausiai pasitaikantiems stačiakampiam ir skrituliniam skerspjūviui jų diagramos pateiktos atitinkamai 14.1 ir 14.2 pav. Visuose paveiksluose įrąžos – teigiamos.



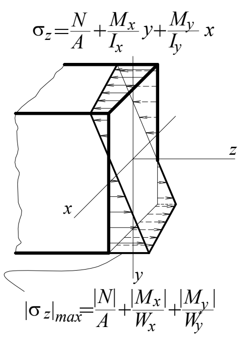
14.1 pav.



14.2 pav.

■ Nuo ašinės jėgos ir lenkimo momentų atsiranda tik normaliniai įtempimai. Jie bet kuriame skerspjūvio taške skaičiuojami atliekant algebrinį sumavimą:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \,. \tag{14.1}$$



14.3 pav.

Pavyzdžiui, jeigu norėtume gauti normalinių įtempimų diagramą nuo ašinės jėgos ir abiejų lenkimo momentų veikimo (14.1*a* pav.), tereikėtų algebriškai sudėti diagramas, pateiktas 14.1*b*, 14.1*c* ir 14.1*d* pav. Gauta normalinių įtempimų diagrama pateikta 14.3 pav.

■ Nuo skersinių jėgų ir sukimo momento atsiranda tik tangentiniai įtempimai. Juos nustatant, be algebrinio sumavimo, dažnai tenka atlikti ir geometrinį sumavimą.

14.1 tekstas, 14.4, 14.5 pav. ⌘⌘⌘

■ Skaičiuojant sudėtingai deformuojamus strypus paprastai užrašoma ne viena, o kelios stiprumo sąlygos. Bendriausia jų išraiška yra tokia:

$$|\sigma|_{\max} \le R \;(\sigma_{\text{adm}}), \tag{14.2}$$

$$|\tau|_{\max} \le R_s \;(\tau_{\text{adm}}), \tag{14.3}$$

$$\sigma_{\text{det}} \le R \;(\sigma_{\text{adm}}). \tag{14.4}$$

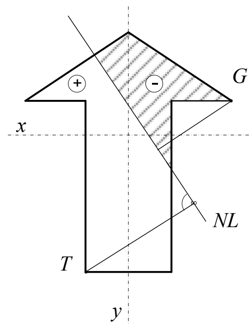
Stiprumo sąlygų kairiųjų pusių išraiška priklauso nuo apkrovimo pobūdžio ir skerspjūvio formos; trečiosios stiprumo sąlygos (14.4) atveju – ir nuo pasirinktos stiprumo hipotezės.

Pastaba. Skersinių jėgų įtaka elemento stiprumui yra nedidelė, todėl dažniausiai stiprumo sąlygose jos neįvertinamos.

■ Užrašysime dažniausiai pasitaikančių sudėtingo strypų deformavimo atvejų stiprumo sąlygas. Pavojinguosius taškus parodysime paveiksluose, laikydami, kad visos skerspjūviuose veikiančios įrąžos yra teigiamos.

♦ ♦ ♦ *Įtempimų būvis vienaašis, skerspjūvio forma – bet kokia, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui* (14.6 pav.):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_k| = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_k + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_k \right| \le R \,. \tag{14.5}$$



14.6 pav.

Čia K – taškas, labiausiai nutolęs nuo neutraliosios linijos. Bendruoju atveju tai gali būti taškas T, t. y. taškas, kuriame veikia didžiausi tempimo įtempimai, arba taškas G, t. y. taškas, kuriame veikia didžiausi gniuždymo įtempimai; pavyzdžiui, 14.6 pav. taškas K sutampa su tašku T.

Kai medžiaga nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui, užrašomos dvi stiprumo sąlygos (žr. 14.6 pav.):

$$\sigma_{\max} = \sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_t + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_t \le R_t \,, \tag{14.6}$$

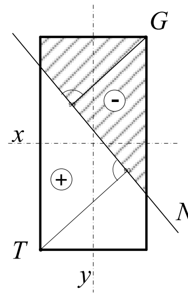
$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_g| = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_g + \frac{M_y}{I_y} \cdot x_g \right| \le R_c \,, \tag{14.7}$$

R_t – tempiamasis projektinis stipris; R_c – gniuždomasis projektinis stipris.

14.1 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

♦ ♦ ♦ *Įtempimų būvis vienaašis, skerspjūvio forma – stačiakampis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui* (14.7 pav.):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_t| = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le R. \qquad (14.8)$$



14.7 pav.

Kai medžiaga nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui:

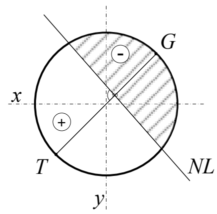
$$\sigma_{\max} = \sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le R_t\,, \qquad (14.9)$$

$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_g| = \left|\frac{N}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y}\right| \le R_c\,. \qquad (14.10)$$

14.2 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

♦ ♦ ♦ *Įtempimų būvis vienaašis, skerspjūvio forma – skritulys, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui* (14.8 pav.):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_t| = \frac{|N|}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \le R\,. \qquad (14.11)$$



Kai medžiaga nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui:

$$\sigma_{\max} = \sigma_t = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \le R_t\,, \qquad (14.12)$$

$$|\sigma_{\min}| = |\sigma_g| = \left|\frac{N}{A} - \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}\right| \le R_c\,. \qquad (14.13)$$

Pastaba. Bendruoju atveju skritulio taškų T ir G padėtis nežinoma. Ji nustatoma atlikus papildomus skaičiavimus (taškai T ir G yra atstojamojo lenkimo momento veikimo krypties linijos sankirtoje su perimetru).

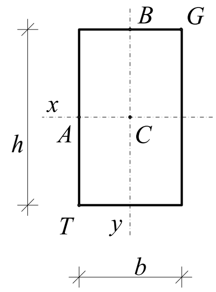
14.3 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

♦ ♦ ♦ *Įtempimų būvis dviašis, skerspjūvio forma – stačiakampis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui* (14.9 pav., $b<h$):

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_t| = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le R\,, \qquad (14.14)$$

$$|\tau|_{\max} = |\tau_a| = \frac{|T|}{\beta \cdot b^3} + \frac{3}{2}\frac{|Q_y|}{A} \le R_s\,, \qquad (14.15)$$

$$|\tau|_{\max} = |\tau_b| = \gamma\frac{|T|}{\beta \cdot b^3} + \frac{3}{2}\frac{|Q_x|}{A} \le R_s\,, \qquad (14.16)$$



14.9 pav.

$$\sigma_{\mathrm{det},a} \le R, \quad \left(\sigma = f(N, M_y),\ \ \tau = \psi(T, Q_y)\right), \tag{14.17}$$

$$\sigma_{\mathrm{det},b} \le R, \quad \left(\sigma = f(N, M_x),\ \tau = \psi(T, Q_x)\right). \tag{14.18}$$

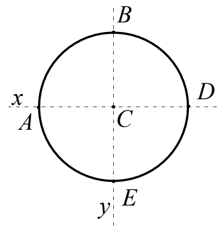
14.4 pvz. ⌘⌘⌘

♦♦♦ *Įtempimų būvis dviašis, skerspjūvio forma – skritulys, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui* (14.10 pav.):

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \le R\,, \tag{14.19}$$

$$|\tau|_{\max} = \frac{|T|}{W_p} + \frac{4}{3}\frac{|Q|_{\max}}{A} \le R_s\,, \tag{14.20}$$

$$\sigma_{\mathrm{det}} \le R, \quad \left(\sigma = f(N, M_x, M_y),\ \tau = \psi(T)\right). \tag{14.21}$$



14.10 pav.

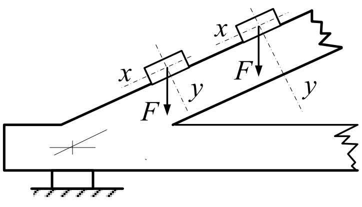
Į lygtį (14.20) vietoj $|Q|_{\max}$ įrašoma didesnė iš skersinių jėgų; jei $|Q_x| \ge |Q_y|$, tai $|\tau|_{\max} = |\tau_b|$; jei $|Q_y| \ge |Q_x|$, tai $|\tau|_{\max} = |\tau_a|$.

14.5 pvz. ⌘⌘⌘

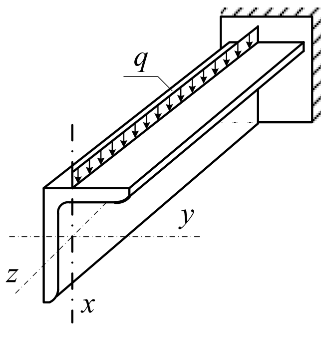
■ Toliau aptarsime kelis sudėtingo strypų deformavimo atvejus, kurie dėl plataus paplitimo inžinerinėse konstrukcijose gavo tam tikrus pavadinimus ir daugelyje vadovėlių nagrinėjami atskiruose poskyriuose.

14.2. Įstrižasis lenkimas

■ Lenkimas vadinamas įstrižuoju, kai sijos ašis išlinksta plokštumoje, nesutampančioje nė su viena iš svarbiausiųjų plokštumų. Taip deformuojasi šlaitinio stogo grebėstai, valcuotojo plieno kampuočiai, kai apkrova pridedama statmenai jų šonams, ir kiti konstrukciniai elementai, kai apkrovos veikimo plokštuma nesutampa nė su viena iš jų svarbiausiųjų plokštumų (14.11, 14.12 pav.).



14.11 pav.

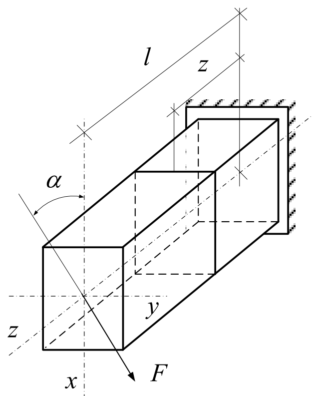


14.12 pav.

■ Išsiaiškinsime įstrižojo lenkimo ypatumus. Nagrinėsime gembinį stačiakampio skerspjūvio strypą, veikiamą gale pridėta jėga F (14.13 pav.). Jėga veikia skerspjūvio plokštumoje ir sudaro kampą α su jo ašimi x.

Taip apkrauto strypo bet kuriame skerspjūvyje veiks šios įrąžos (14.14 pav.):

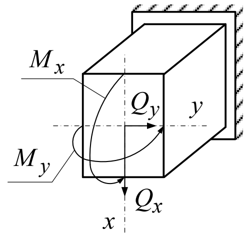
$$\left.\begin{aligned}
&N = 0,\\
&Q_x = F_x = F\cdot\cos\alpha,\\
&Q_y = F_y = F\cdot\sin\alpha,\\
&M_x = -F_y(l-z),\\
&M_y = -F_x(l-z),\\
&T = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.22)$$



14.13 pav.

Toliau strypo deformavimąsi nagrinėsime, atsižvelgdami tik į lenkimo momentus. Jiems veikiant strypo skerspjūviuose atsiranda tik normaliniai įtempimai (14.15 pav.):

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x\,. \qquad (14.23)$$

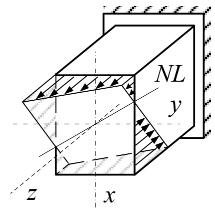


14.14 pav.

Vienoje skerspjūvio dalyje jie yra teigiami, kitoje – neigiami. Šias dvi sritis skiria neutralioji linija. Jos lygtį gausime prilyginę nuliui normalinių įtempimų išraišką (14.23) (prisiminkime, kad neutralioji linija yra geometrinė vieta taškų, kuriuose normaliniai įtempimai yra lygūs nuliui):

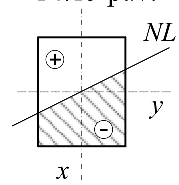
$$\sigma = \frac{M_x}{I_x}y + \frac{M_y}{I_y}x = 0\,, \qquad (14.24)$$

$$y = -\frac{M_y\cdot I_x}{M_x\cdot I_y}x\,. \qquad (14.25)$$



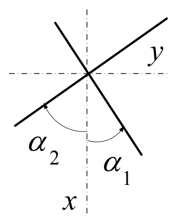
14.15 pav.

Taigi neutralioji linija yra tiesė, kertanti koordinačių pradžios tašką (14.16 pav.).



14.16 pav.

■ Nustatysime geometrinį ryšį tarp jėgos veikimo linijos ir neutraliosios linijos. Prisiminkime, kad dvi tiesės yra statmenos, jei $\mathrm{tg}\alpha_1 = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha_2} = -\mathrm{ctg}\alpha_2$ (14.17 pav.). Mūsų atveju jėgų veikimo linijos krypties koeficientas $\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{F_y}{F_x}$, neutraliosios linijos krypties koeficientas $\mathrm{tg}\alpha_2 = -\frac{M_y\cdot I_x}{M_x\cdot I_y}$. Išreikškime jėgos komponentus F_y ir F_x per jėgą F ir kampą α, lenkimo momentus M_x ir M_y per jėgos komponentus F_y ir F_x, pastaruosius per jėgą F ir kampą α: $\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{F\cdot\sin\alpha}{F\cdot\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha_2 = -\frac{F_x\cdot(l-z)\cdot I_x}{F_y\cdot(l-z)\cdot I_y} = -\frac{F\cdot\cos\alpha\cdot I_x}{F\cdot\sin\alpha\cdot I_y} = -\mathrm{ctg}\alpha\frac{I_x}{I_y}$. Taigi neutralioji linija bus statmena jėgų veikimo linijai tik tuo atveju, jei $\frac{I_x}{I_y} = 1$, pavyzdžiui, tuomet, kai skerspjūvis bus kvadratinis, skritulinis, žiedinis ir t. t.



14.17 pav.

■ Įstrižojo lenkimo atveju didžiausi įtempimai atsiranda taškuose, labiausiai nutolusiuose nuo neutraliosios linijos. Kadangi ašinė jėga lygi nuliui, visais atvejais, nesvarbu, ar medžiaga vienodai, ar nevienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui, stiprumo sąlyga turės tą pačią išraišką:

a) skerspjūvio forma – stačiakampis:

$$|\sigma|_{\max}\ (\sigma_{\max},\ |\sigma_{\min}|) = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \le R\ (R_t,\ R_c)\,; \tag{14.26}$$

b) skerspjūvio forma – skritulys:

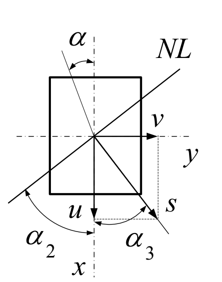
$$|\sigma|_{\max}\ (\sigma_{\max},\ |\sigma_{\min}|) = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W} \le R\ (R_t,\ R_c)\,. \tag{14.27}$$

■ Nustatant įlinkius, pirmiausia jie apskaičiuojami kiekvienos skerspjūvio ašies kryptimi, vėliau – geometriškai sumuojami. Strypo bet kurio skerspjūvio įlinkio komponentai u ir v gali būti nustatomi bet kokiu žinomu metodu. Pavyzdžiui, iš lentelių gauname, kad $u = \dfrac{F_x \cdot z^2(3l - z)}{6E \cdot I_y}$, $v = \dfrac{F_y \cdot z^2(3l - z)}{6E \cdot I_x}$. Tuomet

$$s = \sqrt{u^2 + v^2}\ . \tag{14.28}$$

Nustatysime sijos laisvojo galo atstojamojo įlinkio kryptį: $\mathrm{tg}\alpha_3 = \dfrac{v}{u} = \dfrac{F \cdot \sin\alpha \cdot z^2(3l - z) \cdot 6E \cdot I_y}{6E \cdot I_y \cdot F \cdot \sin\alpha \cdot z^2(3l - z)} = \mathrm{tg}\alpha \dfrac{I_y}{I_x}$. Taigi įlinkio kryptis nesutampa su jėgos veikimo kryptimi, nes $\mathrm{tg}\alpha_3 \ne \mathrm{tg}\alpha$ (14.18 pav.) (išskyrus kvadratą, skritulį ir žiedą).

Sudauginkime įlinkio ir neutraliosios linijos krypties koeficientus: $\mathrm{tg}\alpha \dfrac{I_y}{I_x} \cdot (-\mathrm{ctg}\alpha \dfrac{I_x}{I_y}) = -1$. Gavome, kad įlinkio kryptis yra statmena neutraliajai ašiai.

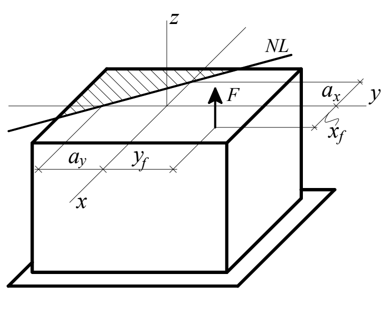


14.18 pav.

14.6 pvz. ⌘⌘⌘

14.3. Ekscentrinis tempimas

■ Ekscentriniu tempimu (gniuždymu) vadinamas toks strypo apkrovimo atvejis, kai pridėtosios jėgų sistemos atstojamoji veikia statmenai skerspjūviui, bet nesutampa su strypo ašimi (14.19 pav.). Taigi iš šešių įrąžų, kurios bendruoju atveju gali veikti strypo skerspjūvyje, net trys yra lygios nuliui:



14.19 pav.

$$\left.\begin{aligned} &N = F, \\ &Q_x = 0, \\ &Q_y = 0, \\ &M_x = F \cdot y_f, \\ &M_y = F \cdot x_f, \\ &T = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.29}$$

■ Kadangi skersinės jėgos ir sukimo momentas yra lygūs nuliui, ekscentriškai tempiamo strypo skerspjūvyje veiks tik normaliniai įtempimai. Į bendrąją normalinių įtempimų išraišką (14.1) įrašykime ašinę jėgą ir lenkimo momentus, išreikštus per jėgą F, ir iškelkime narį F/A prieš skliaustus:

$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \; = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_f}{I_x} y + \frac{F \cdot x_f}{I_y} x = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{A \cdot y_f}{I_x} y + \frac{A \cdot x_f}{I_y} x\right)$. Naudokime žymėjimus: $i_x^2 = \frac{I_x}{A}$, $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$. Galiausiai gauname, kad

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_f}{i_x^2} y + \frac{x_f}{i_y^2} x\right). \qquad (14.30)$$

Ši formulė vaizdžiai parodo, kiek kartų padidėja normaliniai įtempimai strypo skerspjūvyje, palyginti su įtempimais, kurie būtų jėgai veikiant skerspjūvio centre.

■ Prilyginę gautą įtempimų išraiką nuliui, gausime neutraliosios linijos lygtį: $\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_f}{i_x^2} y + \frac{x_f}{i_y^2} x\right) = 0$. Pirmasis sandaugos narys negali būti lygus nuliui, nes priešingu atveju lygtis neturės fizikinės prasmės, taigi $1 + \frac{y_f}{i_x^2} y + \frac{x_f}{i_y^2} x = 0$ arba

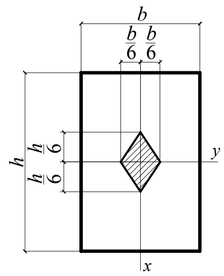
$$\frac{y}{a_y} + \frac{x}{a_x} = 1. \qquad (14.31)$$

Lygtis (14.31) yra ašinė tiesės lygtis. Čia $a_y = -\frac{i_x^2}{y_f}$ ir $a_x = -\frac{i_y^2}{x_f}$ yra atkarpos, kurias tiesė atkerta *y* ir *x* ašyse (žr. 14.19 pav.).

14.32, 14.33 formulės, 14.20 pav., 14.7 pvz. ⌘⌘⌘

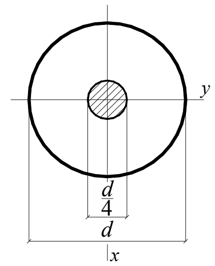
■ Praktikoje dažnai labai svarbu, kad kai kuriuose gniuždomuose elementuose (pavyzdžiui, mūro sienose) neatsirastų tempimo įtempimų. Todėl reikia žinoti skerspjūvio sritį, kurioje pridėjus lygiagrečią su strypo ašimi jėgą, visame skerspjūvyje veiks vieno ženklo normaliniai įtempimai. Tokia sritis vadinama skerspjūvio branduoliu.

Skaičiuojant branduolį, skerspjūvis apibrėžiamas neutraliosiomis linijomis, liečiančiomis jo kontūrą ne mažiau kaip dviejuose taškuose ir sudarančiomis iškilųjį daugiakampį. Kiekvienai neutraliajai linijai apskaičiuojamos ją atitinkančios jėgos koordinatės:



14.21 pav.

$$\left.\begin{aligned} x_f &= -\frac{i_y^2}{a_x}, \\ y_f &= -\frac{i_x^2}{a_y}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.34)$$



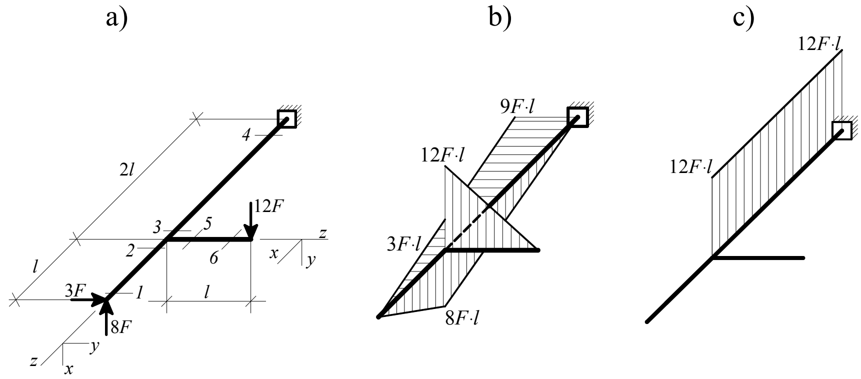
14.22 pav.

Gauti taškai sujungiami tiesėmis. Jeigu branduolys nubrėžtas taisyklingai, jis sudaro iškilųjį daugiakampį, kurio centras sutampa su skerspjūvio svorio centru (14.21, 14.22 pav.).

14.8 pvz. ⌘⌘⌘

14.4. Lenkiami ir sukami strypai

■ Erdvinių konstrukcijų elementai, diržinių pavarų velenai, įvairios mechanizmų detalės dažniausiai yra lenkiamos bei sukamos. Tokių elementų stiprumas priklauso tiek nuo normalinių įtempimų, atsirandančių nuo lenkimo momento (kartais ir dėl ašinės jėgos), tiek nuo tangentinių įtempimų, atsirandančių nuo sukimo momentų (skersinės jėgos įtaka paprastai neįvertinama). Skaičiuojant tokius elementus reikia tikrinti visus skerspjūvius, kuriuose tiek lenkimo momentai, tiek sukimo momentai yra pakankamai dideli. Pavyzdžiui, 14.23*a* pav. pateiktame vienodo skritulinio skerspjūvio erdviniame rėme pavojingi yra trys skerspjūviai: trečiasis, ketvirtasis ir penktasis. Tai paaiškėja išanalizavus lenkimo momentų (14.23*b* pav.) ir sukimo momentų (14.23*c* pav.) diagramas.



14.23 pav.

Dažniausiai pasitaikantiems stačiakampiam ir skrituliniam skerspjūviams pavojingieji taškai ir stiprumo sąlygos buvo aptartos anksčiau (žr. 14.9, 14.10 pav. ir (14.14)–(14.21) formules). Patikrinti tokių skerspjūvių stiprumą nėra labai sudėtinga. Tačiau sprendžiant analogišką projektinį uždavinį kyla daug keblumų.

■ Aptarsime sukamo ir lenkiamo skritulinio skerspjūvio strypo projektinį uždavinį. Taikysime didžiausių tangentinių įtempimų stiprumo hipotezę: $\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le R$.

Geometriškai sudėkime abu lenkimo momentus: $M = \sqrt{M_x{}^2 + M_y{}^2}$. Įtempimus išreikškime per įrąžas:

$$\sigma_{\text{det}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + \left(\frac{T}{W}\right)^2} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + T^2} \le R .$$

Įtraukime naują kintamąjį – skaičiuojamąjį momentą:

$$M_{\text{det}} = \sqrt{M^2 + T^2} . \qquad (14.35)$$

Gauname, kad

$$W = \ge \frac{M_{\text{det}}}{R} . \qquad (14.36)$$

Tačiau skrituliniam skerspjūviui atsparumo momentas $W = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32}$, taigi $d \ge \sqrt[3]{\dfrac{M_{\text{det}} \cdot 32}{R \cdot \pi}}$.

Iš sortimento pasirinkus skersmenį *d*, tikrinama stiprumo sąlyga įvertinant ir ašinę jėgą (jeigu tokia yra):

$$\sigma_{\mathrm{det}} = \sqrt{\left(\frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} \le R\,.$$

14.9 pvz.

⌘ ⌘ ⌘

14.5. Bet kaip apkrautų strypų įrąžų diagramos

■ Visomis šiame skyriuje pateiktomis formulėmis galima pasinaudoti tik tuomet, kai žinomos pavojinguose skerspjūviuose veikiančios įrąžos. Todėl labai svarbu mokėti sudaryti įrąžų diagramas. Įrąžų ženklų taisyklės ir jų diagramų sudarymo ypatumai buvo aptarti 3 skyriuje.

14.10 pvz.

⌘ ⌘ ⌘

14.6. Bet kaip apkrautų strypų skerspjūvių poslinkiai

■ Iki šiol nagrinėjome tik sudėtingai deformuojamų strypų stiprumą. Tačiau inžinerinėje praktikoje dažnai pasitaiko uždavinių, kai reikia papildomai apriboti ir deformacijas (linijines ar kampines) ties ypatingaisiais konstrukcijos taškais arba (ir) tam tikrų konstrukcijos skerspjūvių poslinkius (linijinius ar kampinius), t. y. užrašyti standumo sąlygas. Pirmojo tipo standumo sąlygos (kai ribojamos ekstreminės deformacijos) nėra sudėtingos, nes žinant įtempimus visada galima gauti deformacijas (pagal Huko dėsnį). Tačiau antrojo tipo standumo sąlygos (kai ribojami poslinkiai) yra gerokai sudėtingesnės, nes reikia įvertinti konstrukcijos deformavimąsi nuo nagrinėjamo skerspjūvio iki atramų. Paprastai ribojami tik tam tikrų konstrukcijos skerspjūvių poslinkiai (nereikia turėti poslinkių diagramų), todėl inžinerinėje praktikoje poslinkiams skaičiuoti dažniausiai taikomas energetinis Moro metodas. Tiesiogiai jis leidžia nustatyti tik vieną poslinkio komponentą (arba viena kryptimi, arba vienoje plokštumoje), todėl paprastai reikia atlikti kelis skaičiavimas, o galutinį rezultatą nustatyti vektorine (geometrine) sudėtimi.

Bendroji energetinio Moro metodo formulė turi tokį pavidalą:

$$s_k = \sum_{j=1}^{n}\left(\int_l \frac{N\cdot\overline{N}_k}{E\cdot A}dz + \int_l \frac{M_x\cdot\overline{M}_{x,k}}{E\cdot I_x}dz + \int_l \frac{M_y\cdot\overline{M}_{y,k}}{E\cdot I_y}dz + \int_l \mu_x \frac{Q_x\cdot\overline{Q}_{x,k}}{G\cdot A}dz + \int_l \mu_y \frac{Q_y\cdot\overline{Q}_{y,k}}{G\cdot A}dz + \int_l \frac{T\cdot\overline{T}_k}{G\cdot I_p}dz\right), \quad (14.37)$$

s_k – apibendrintas k-ojo skerspjūvio poslinkio komponentas; n – konstrukcijos ruožų, kuriuose visos įrąžos (ir nuo žinomos apkrovos, ir nuo vienetinio apibendrintosios apkrovos komponento), medžiagos savybės ir skerspjūvio forma bei matmenys kinta tolygiai, skaičius; N, M_x, M_y, Q_x, Q_y, T – įrąžos nuo žinomos apkrovos; $\overline{N_k}$, $\overline{M}_{x,k}$, $\overline{M}_{y,k}$, $\overline{T_k}$, $\overline{Q}_{x,k}$, $\overline{Q}_{y,k}$ – įrąžos nuo vienetinio apibendrintosios apkrovos komponento, pridėto skerspjūvyje K ieškomo poslinkio komponento kryptimi; $A\cdot E$, $E\cdot I_x$, $E\cdot I_y$, $G\cdot A$, $G\cdot I_p$ – tempiamo, lenkiamo, šliejamo, sukamo ruožų standžiai; μ_x, μ_y – koeficientai, priklausantys nuo skerspjūvio formos (žr. 11 skyrių); l – ruožo ilgis.

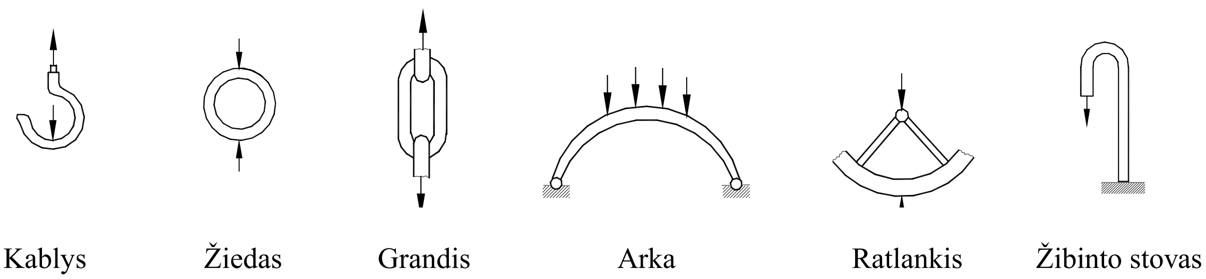
Daugeliu atvejų skersinių jėgų įtaka sudėtingai deformuojamų strypų poslinkiams yra nedidelė, todėl formulė (14.37) gerokai supaprastėja.

14.11 pvz.

⌘ ⌘ ⌘

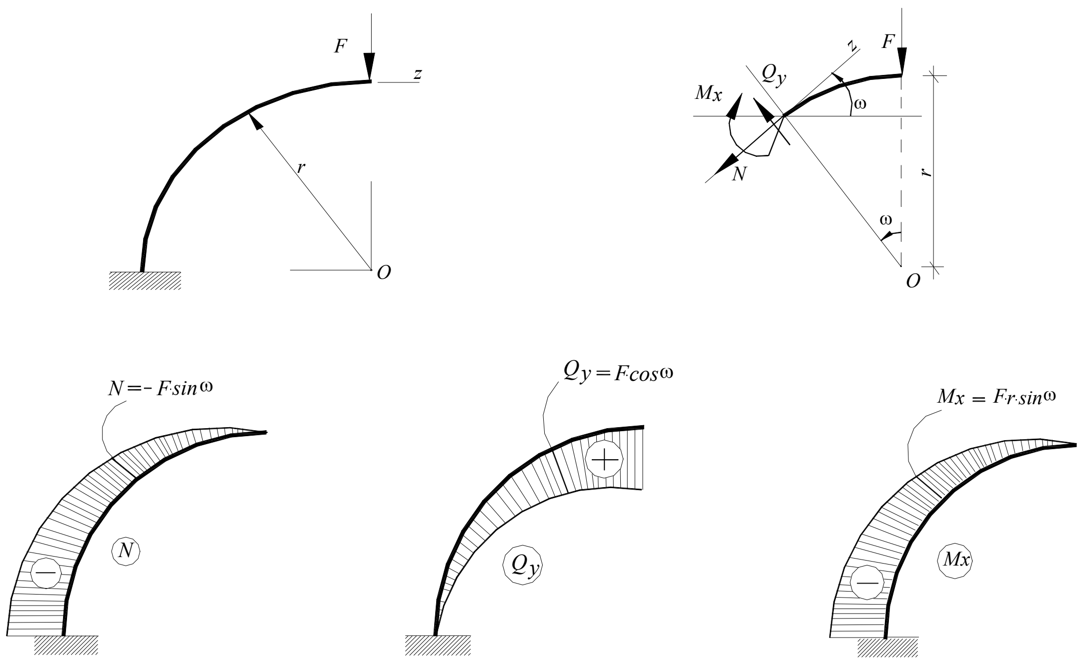
14.7. Kreivieji strypai

■ Mašinų konstrukcijoms kartais naudojami strypai, kurių geometrinė ašis yra išlenkta pagal kokią nors kreivę: kabliai, grandys, žiedai, ratlankiai, arkos, žibintų stovai ir kiti (14.24 pav.).



14.24 pav.

■ Nagrinėsime tiktai plokščius kreivuosius strypus (strypų, išlenktų pagal erdvinę kreivę pasitaiko retai). Jeigu tokių strypų skerspjūvių simetrijos ašis ir išorinės jėgos guli strypo ašies plokštumoje, tai strypo ašis ir po deformavimo lieka plokščia kreive, o visos vidinės jėgos bet kuriame skerspjūvyje suvedamas į tris komponentus: N, Q_y, M_x. Šios įrąžos nustatomos pjūvio metodu (14.25 pav.).



14.25 pav.

■ Kreivųjų strypų skaičiavimas nuo tiesiųjų strypų skaičiavimo skiriasi tuo, kad lenkiamų kreivųjų strypų skerspjūviuose įtempimai pasiskirsto ne tiesiškai, bet pagal tam tikrą kreivę. Eksperimentai rodo, kad ryški kreivė gaunama tik didelio kreivumo strypams ($\frac{h}{r} \geq \frac{1}{5}$, čia h – skerspjūvio aukštis, r – strypo ašies kreivio spindulys, 14.26 pav.). Mažo kreivumo strypams ($\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$) toji kreivė yra gana lėkšta ir gali būti pakeista pasvirusia tiese. Jiems apytiksliai skaičiuoti tinka tiesiojo strypo formulės. Pavyzdžiui, stačiakampio skerspjūvio strypui, kai:

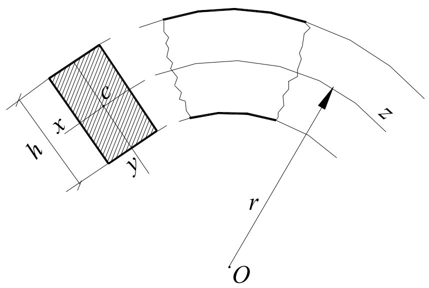
$\frac{r}{h} = 5$, tai $\Delta\sigma = 6{,}9\,\%$,

$\frac{r}{h} = 8$, tai $\Delta\sigma = 4{,}8\,\%$,

$\frac{r}{h} = 10$, tai $\Delta\sigma = 3{,}8\,\%$,

$\frac{r}{h} = \infty$, tai $\Delta\sigma = 0$,

$\Delta\sigma$ – normalinių įtempimų skaičiavimo paklaida.

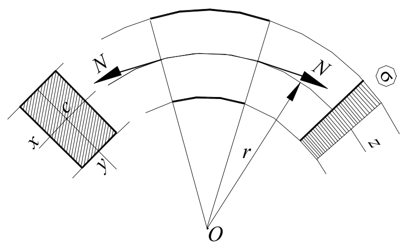


14.26 pav.

■ Įtempimai nuo ašinės (14.27 pav.) ir skersinės jėgos kreivuosiuose strypuose pasiskirsto panašiai kaip ir tiesiuosiuose strypuose, todėl jiems skaičiuoti naudojamos atitinkamos tiesiojo strypo formulės:

$$\sigma(N) = \frac{N}{A}, \tag{14.38}$$

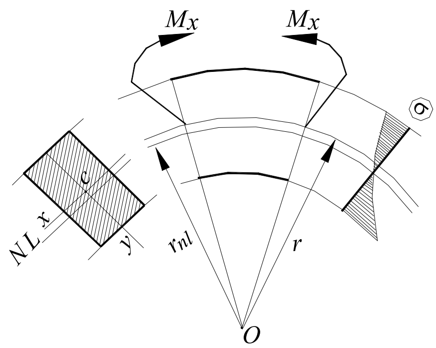
$$\tau(Q) = \frac{Q_y \cdot |S_x|}{I_x \cdot b}. \tag{14.39}$$



14.27 pav.

Normaliniai įtempimai nuo lenkimo momento skerspjūvyje kinta pagal hiperbolinį dėsnį (14.28 pav.):

$$\sigma(M) = \frac{M_x \cdot y_{nl}}{S_{nl} \cdot \rho}, \tag{14.40}$$



14.28 pav.

M_x – lenkimo momentas, veikiantis skerspjūvyje; S_x – skerspjūvio statinis momentas neutraliosios ašies atžvilgiu ($S_x = A \cdot y_{nl,c}$, čia $y_{nl,c}$ – skerspjūvio svorio centro nuotolis nuo neutraliosios linijos); y_{nl} – nagrinėjamo sluoksnio nuotolis nuo neutraliosios linijos; ρ – nagrinėjamo sluoksnio kreivio spindulys.

Pasinaudoti (14.40) formule galima tiktai žinant neutraliosios linijos padėtį. Tam reikia apskaičiuoti neutraliojo sluoksnio spindulį:

$$r_{nl} = \frac{A}{\int_A \frac{1}{\rho} dA}, \tag{14.41}$$

tuomet

$$y_{nl,c} = r - r_{nl}. \tag{14.42}$$

Dažniausiai pasitaikantiems skerspjūviams šių rodiklių reikšmės yra pateiktos lentelėse. Pavyzdžiui, stačiakampiui skerspjūviui tikslusis sprendinys yra $r_{nl} = \frac{h}{\ln \frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{int}}}}$, apytikslis sprendinys – $y_{nl,c} = \frac{h^2}{12r}$ (čia r_{ext} ir r_{int} – išorinio ir vidinio sluoksnių kreivio spinduliai).

Jeigu kreivojo strypo skerspjūvyje vienu metu veikia ir lenkimo momentas, ir ašinė jėga, tai įtempimai skaičiuojami kaip algebrinė suma nuo minėtų įrąžų:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y_{nl}}{S_x \cdot \rho}\,. \tag{14.43}$$

14.12 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

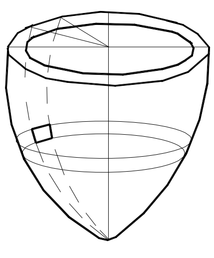
14.8. Plonasieniai indai

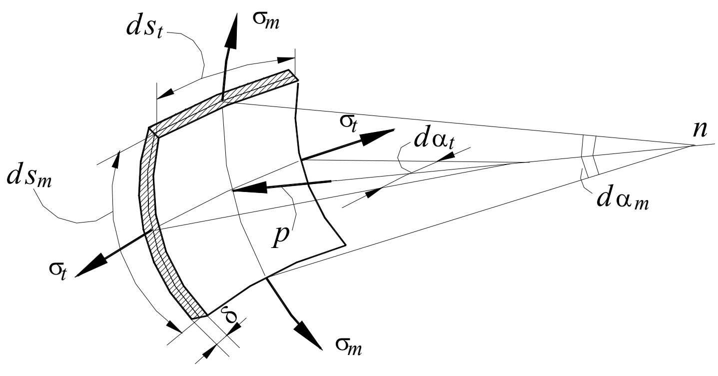
■ Iki šiol buvo nagrinėjamas tik strypų skaičiavimas. Prisiminkime (žr. 2 skyrių), kad strypas yra konstrukcinis elementas, kurio matmenys dviem erdvės kryptimis yra labai maži, palyginti su matmeniu trečiąja erdvės kryptimi. Masyvų (elementų su vienodos eilės matmenimis visomis erdvės kryptimis) skaičiavimas neįeina į klasikinį medžiagų mechanikos kursą. Tačiau elementų, kurių matmuo viena erdvės kryptimi (storio) labai mažas, palyginti su matmenimis kitomis dviem erdvės kryptimis ir apribotų plokščiais paviršiais (plokščių) arba kreivais paviršiais (kevalų), skaičiavimas dažnai įtraukiamas į vienokius ar kitokius medžiagų mechanikos modulius.

■ Nagrinėsime tiktai vieną kevalų rūšį – plonasienius indus. Be to, nagrinėsime ne bet kokius plonasienius indus, o simetriškus ir veikiamus simetrine apkrova. Tokių plonasienių indų pavyzdžiai gali būti talpyklos, katilai, vamzdžiai, veikiami skysčių ar dujų vidinio slėgio.

Simetriški ašies atžvilgiu indai vadinami sukiniais. Tai indai, gaunami sukant plokščią figūrą apie kokią nors ašį. Pavyzdžiui, sukant stačiakampį, gaunamas cilindras, sukant trikampį – kūgis, sukant parabolę – paraboloidas ir pan. Kai sukinio sienelėse nėra didelių paviršiaus pokyčių, koncentruojančių įtempimus, kai sienelės storis sudaro mažiau kaip dešimtadalį sukinio skersmens ir kai jį veikia simetrinė apkrova (dujų, skysčio slėgis), tokiems sukiniams galima taikyti bemomentę kevalų teoriją. Taikant šią kevalų skaičiavimo teoriją teigiama, kad įtempimai, veikiantys indo sienelėje, visame jos storyje yra vienodi ir kad indo sienelės nėra lenkiamos. Kuo plonesnis indas, tuo tikslesnius rezultatus duoda bemomentė teorija.

■ Aptarkime keletą sąvokų (14.29 pav.). Plokštumos, einančios per sukinio simetrijos ašį, vadinamos *meridianinėmis plokštumomis*. Įtempimai, veikiantys meridiano liestinės kryptimi, vadinami *meridianiniais įtempimais* (σ_m). Kūginiai paviršiai, statmeni sukinio išorinio paviršiaus meridianui, vadinami *žiediniais pjūviais*. Įtempimai, veikiantys žiedo liestinės kryptimi, vadinami *žiediniais įtempimais* (σ_t). Įtempimai, veikiantys radialine kryptimi, vadinami *radialiniais įtempimais*. Jie lygūs slėgiui prie sukinio sienelės vidinio paviršiaus ir nuliui prie išorinio paviršiaus (jų paprastai nepaisoma).

a) 

b) 

14.29 pav.

■ Iš plonasienio indo dviem meridianiniais ir dviem žiediniais kūginiais pjūviais išskirkime nykstamai mažo dydžio elementą (14.29 pav.). Meridianinė plokštuma dalija sukinį ir apkrovą (vidinį slėgį) į dvi simetriškas dalis, todėl meridianiniuose pjūviuose nėra šlyties jėgų, nėra ir tangentinių įtempimų. Kadangi žiediniai pjūviai yra statmeni meridianiniams, juose tangentinių įtempimų taip pat nėra (tangentinių įtempimų dualumo dėsnis). Radialiniai įtempimai neįvertinami. Taigi lieka tik meridianiniai ir žiediniai įtempimai; turime dviašį įtempimų būvį.

Išpjautąjį indo sienelės elementą veikia penkios atstojamosios jėgos. Tai statmenai sienelės paviršiui veikianti apkrovos jėga $p \cdot ds_m \cdot ds_t$ (čia p – slėgis, ds_m – elemento briaunos ilgis meridianine kryptimi, ds_t – elemento briaunos ilgis žiedine kryptimi), dvi meridianinėse plokštumose veikiančios atstojamosios $\sigma_t \cdot ds_m \cdot \delta$ (čia δ – indo sienelės storis) ir dvi žiedinėse plokštumose veikiančios atstojamosios $\sigma_m \cdot ds_t \cdot \delta$.

Suprojektuokime visas nykstamai mažą sienelės elementą veikiančias jėgas į ašį, statmeną sienelės paviršiui:

$$p \cdot ds_m \cdot ds_t - 2\sigma_t \cdot ds_m \cdot \delta \cdot \sin\frac{d\alpha_t}{2} - 2\sigma_m \cdot ds_t \cdot \delta \cdot \sin\frac{d\alpha_m}{2} = 0 . \qquad (14.44)$$

Kadangi kampai $d\alpha_m$ ir $d\alpha_t$ yra nykstamai maži, tai $\sin\frac{d\alpha_t}{2} \approx \frac{d\alpha_t}{2} = \frac{ds_t}{2\rho_t}$, $\sin\frac{d\alpha_m}{2} \approx \frac{d\alpha_m}{2} = \frac{ds_m}{2\rho_m}$.

Įrašykime šias reikšmes į pusiausvyros lygtį (14.44): $p \cdot ds_m \cdot ds_t - 2\sigma_t \cdot ds_m \cdot \delta \cdot \frac{ds_t}{2\rho_t} - 2\sigma_m \cdot ds_t \cdot \delta \cdot \frac{ds_m}{2\rho_m} = 0$.

Suprastinę lygtį gauname vadinamąją Laplaso lygtį:

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta} , \qquad (14.45)$$

σ_t – žiedinis įtempimas; ρ_t – žiedinio pjūvio lanko kreivio spindulys; σ_m – meridianinis įtempimas; ρ_m – meridianinio pjūvio lanko kreivio spindulys; p – vidinis slėgis; δ – sienelės storis.

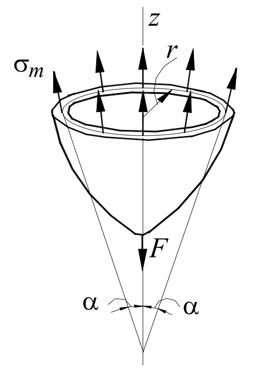
■ Laplaso lygtyje yra du nežinomieji (σ_t ir σ_m), todėl uždaviniui išspręsti reikia dar vienos lygties. Paprastai tai būna žiediniu pjūviu atpjautos indo dalies pusiausvyros lygtis (14.30 pav.):

$$-F + \sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos\alpha = 0 .$$

Iš jos gaunami meridianiniai įtempimai:

$$\sigma_m = \frac{F}{2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \cos\alpha} , \qquad (14.46)$$

σ_m – meridianinis įtempimas; F – vidaus slėgio, veikiančio atpjautąją indo dalį, atstojamoji; r – žiedinio pjūvio lanko kreivio spindulys; δ – indo sienelės storis; α – kampas, kurį sudaro nagrinėjamo žiedinio pjūvio meridianiniai įtempimai su indo ašimi.



14.30 pav.

14.2 tekstas, 14.30 pav., 14.13 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

Kontroliniai klausimai ir užduotys

14.1. Parodykite, kaip pasiskirsto σ *nuo* N *stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.*

14.2. Parodykite, kaip pasiskirsto σ *nuo* M_x *stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.*

14.3. Parodykite, kaip pasiskirsto σ *nuo* M_y *stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.*

14.4. Parodykite, kaip pasiskirsto τ_{zx} *nuo* Q_x *stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.*

14.5. Parodykite, kaip pasiskirsto τ_{zy} *nuo* Q_y *stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.*

14.6. Parodykite, kaip pasiskirsto τ *nuo* T *stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.*

14.7. Parodykite, kaip pasiskirsto τ *nuo* T *apskritame skerspjūvyje. Brėžinys, formulė.*

14.8. Užrašykite bendriausias sudėtingai deformuojamų strypų stiprumo sąlygas.

14.9. Kaip skaičiuojami normaliniai įtempimai sudėtingai deformuojamo elemento skerspjūvyje?

14.10. Kas yra neutralioji linija?

14.11. Kokie skerspjūvio taškai yra pavojingi, esant vienaašiam įtempimų būviui?

14.12. Užrašykite stiprumo sąlygą, remdamiesi didžiausių tangentinių įtempimų stiprumo hipoteze.

14.13. Užrašykite stiprumo sąlygą, remdamiesi energetine stiprumo hipoteze.

14.14. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvio forma yra sudėtinga, įtempimų būvis vienaašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).

14.15. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra stačiakampis, įtempimų būvis vienaašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).

14.16. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra skritulys, įtempimų būvis vienaašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).

14.17. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra stačiakampis, įtempimų būvis dviašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui ir gniuždymui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).

14.18. Užrašykite stiprumo sąlygą, kai strypo skerspjūvis yra skritulys, įtempimų būvis dviašis, medžiaga vienodai priešinasi tempimui. Brėžinys (visos įrąžos teigiamos).

14.19. Koks lenkimas vadinamas įstrižuoju?

14.20. Užrašykite įstrižai lenkiamo strypo stiprumo sąlygą.

14.21. Užrašykite įstrižai lenkiamo strypo neutraliosios linijos lygtį.

14.22. Kada įstrižojo lenkimo atveju neutralioji linija yra statmena jėgų veikimo linijai?

14.23. Kada įstrižojo lenkimo atveju įlinkio kryptis sutampa su jėgos veikimo kryptimi?

14.24. Kada įstrižo lenkimo atveju įlinkio kryptis yra statmena neutraliajai linijai?

14.25. Koks strypo apkrovimo atvejis vadinamas ekscentriniu tempimu (gniuždymu)?

14.26. Paaiškinkite formulę:

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_f}{i_x^2}y + \frac{x_f}{i_y^2}x\right).$$

14.27. Užrašykite ekscentriškai tempiamo arba gniuždomo strypo neutraliosios linijos lygtį.

14.28. Paaiškinkite formules:

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_f}, \; a_x = -\frac{i_y^2}{x_f}.$$

14.29. Kas yra skerspjūvio branduolys?

14.30. Paaiškinkite formules:

$$x_f = -\frac{i_y^2}{a_x}, \; y_f = -\frac{i_x^2}{a_y}.$$

14.31. Nubraižykite stačiakampio skerspjūvio branduolį.

14.32. Nubraižykite skritulinio skerspjūvio branduolį.

14.33. Paaiškinkite formulę:

$$\Delta_k = \int_l \frac{N\overline{N}_k}{EA}dz + \int_l \frac{M_x \overline{M}_{x,k}}{EI_x}dz + \int_l \frac{M_y \overline{M}_{y,k}}{EI_y}dz +$$
$$\mu_x \int_l \frac{Q_x \overline{Q}_{x,k}}{GA}dz + \mu_y \int_l \frac{Q_y \overline{Q}_{y,k}}{GA}dz + \int_l \frac{T\overline{T}_k}{GI_p}dz.$$

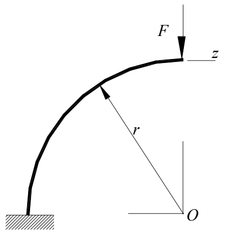
14.34. Kokie strypai vadinami kreivaisiais? Pateikite plokščių kreivųjų strypų pavyzdžių.

14.35. Kaip skirstomi plokšti kreivieji strypai pagal jų kreivį?

14.36. Kuo ypatingas mažo kreivio kreivųjų strypų skaičiavimas?

14.37. Kuo ypatingas didelio kreivio kreivųjų strypų skaičiavimas?

14.38. Pateiktam apskritiminiam strypui sudarykite įrąžų diagramas.



14.39. Kaip pasiskirsto normaliniai įtempimai kreivojo strypo skerspjūvyje nuo ašinės jėgos? Formulė. Brėžinys.

14.40. Kaip pasiskirsto normaliniai įtempimai kreivojo strypo skerspjūvyje nuo lenkimo momento? Brėžinys. Kuriame taške jie didžiausi?

14.41. Paaiškinkite formulę. Brėžinys.

$$r_{nl} = \frac{A}{\int_A \frac{1}{\rho}\, dA}.$$

14.42. Paaiškinkite formulę. Brėžinys.

$$\sigma = \frac{M}{S_{nl}} \cdot \frac{y_{nl}}{\rho}.$$

14.43. Kas yra plonasieniai indai?

14.44. Ką vadiname sukiniu?

14.45. Kada sukiniams galima taikyti bemomentę kevalų teoriją?

14.46. Kas yra meridianinės plokštumos, meridianiniai įtempimai?

14.47. Kas yra žiedinės plokštumos, žiediniai įtempimai?

14.48. Kas yra radialiniai įtempimai? Kam jie lygūs?

14.49. Kodėl plonasienio sukinio sienelių įtempimų būvis yra dviašis?

14.50. Užrašykite Laplaso lygtį.

14.51. Kokia lygtis naudojama meridianiniams įtempimams skaičiuoti?

14.52. *Paaiškinkite formulę. Brėžinys.*

$$\sigma_m = \frac{F}{2\pi r \cdot \delta \cdot \cos\alpha}.$$