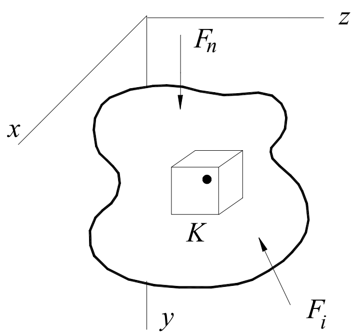
12. Konstrukcinio elemento įtemptoji ir deformuotoji būsena

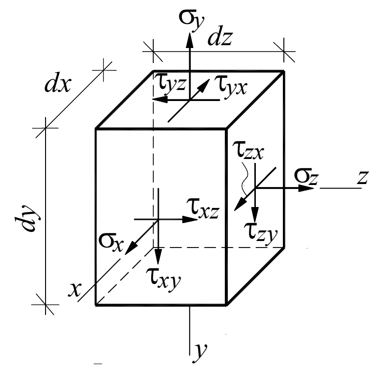
12.1. Bendrosios žinios

■ Šiame skyriuje iš pradžių nagrinėsime bet kaip deformuojamo konstrukcinio elemento taške veikiančius įtempimus ir deformacijas, išsiaiškinsime, kaip nustatyti šių dydžių kitimo dėsningumus, jų ekstremaliąsias reikšmes ir veikimo kryptį, vėliau šias žinias pritaikysime nagrinėdami tempiamo arba gniuždomo, kerpamo, sukamo ar lenkiamo elemento įtemptąją ir deformuotąją būsenas.

■ Bet kaip apkrauto konstrukcinio elemento taško K aplinkoje išskirkime elementarų stačiakampį gretasienį (12.1 pav.). Kadangi gretasienis nykstamai mažas, laikysime, kad įtemptoji būsena (visuma įtempimų, veikiančių bet kaip tašką kertančių plokštumų daugybėje) visuose jo taškuose yra vienoda ir sutampa su taško K įtemptąja būsena. Kiekvienas įtempimas, veikiantis elementaraus gretasienio sienelėje, paprastai išskaidomas į tris komponentus: normalinį ir du tangentinius įtempimus (12.2 pav.). Tiek normalinio, tiek tangentinių įtempimų pirmasis indeksas sutampa su sienelės normalės indeksu, antrasis – su ašies, su kuria lygiagrečiai veikia įtempimas, indeksu (dėl trumpumo $\sigma_{zz} \equiv \sigma_z$, $\sigma_{yy} \equiv \sigma_y$, $\sigma_{xx} \equiv \sigma_x$). Normalinis įtempimas laikomas teigiamu, kai veikia nuo sienelės, tangentinis – kai jo veikiama sienelė, matoma iš jos normalės teigiamo galo, pasislenka kurios nors kitos savo ašies teigiama kryptimi. Pasirodo, kad taško K aplinkoje visada galima išskirti taip orientuotą gretasienį, kad jo sienelėse tangentiniai įtempimai būtų lygūs nuliui. Atsižvelgiant į tai, ar gretasienis yra tempiamas arba gniuždomas viena, dviem ar trimis tarpusavyje statmenomis kryptimis, skiriami linijinis (vienaašis), plokštuminis (dviašis) ir erdvinis (triašis) įtempimų būviai (12.3 pav.).



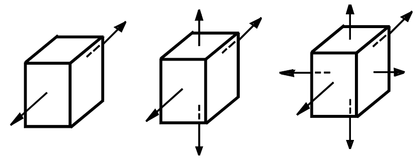
12.1 pav.



12.2 pav.

■ Terminas *įtemptoji būsena* apibūdina reiškinį, terminas *įtempimų būvis* – šio reiškinio rodiklį. Išnagrinėsime, kokiais ir keliais parametrais aprašomas bendriausias (triašis) įtempimų būvis (apie tai buvo užsiminta 3.5 poskyryje).

Išskirtasis elementarus stačiakampis gretasienis (12.2 pav.) yra pusiausviras. Užrašykime jam, pavyzdžiui, pusiausvyros lygtį $\sum M_{fx} = 0$: $\tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} \cdot 2 - \tau_{zy} \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dz}{2} 2 = 0$. Sutvarkę lygtį gauname, kad $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Užrašę kitas dvi momentų lygtis: $\sum M_{fy} = 0$ ir $\sum M_{fz} = 0$, analogiškai gautume, kad $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$,. Apibendrinkime: tangentiniai įtempimai, statmeni bendrai briaunai ir veikiantys tarpusavyje statmenose plokštumose, yra lygūs, o jų veikimo kryptys eina arba briaunos link, arba tolyn nuo jos. Tai yra bendrasis tangentinių įtempimų dualumo dėsnis.

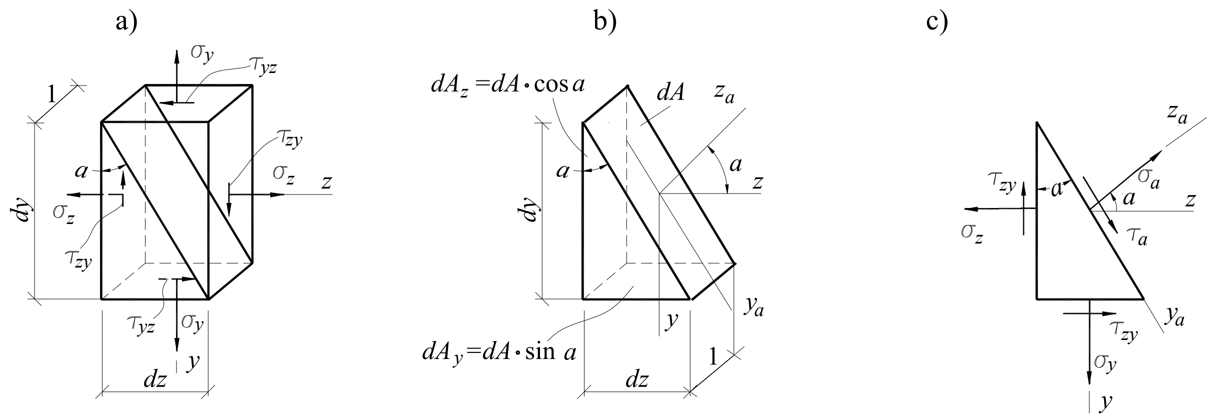

12.3 pav.

Taigi įtempimų būvis apibūdinamas šešiais parametrais: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

■ Erdvinis įtempimų būvis detaliai nagrinėjamas tamprumo teorijos kurse. Toliau nagrinėsime dažniausiai medžiagų mechanikos kurse pasitaikantį plokštuminį įtempimų būvį.

12.2. Dviašio įtempimų būvio įtempimai įstrižuosiuose pjūviuose

■ Tarkime, elementaraus stačiakampio gretasienio įtemptoji būsena apibūdinama dviašiu įtempimų būviu ($\sigma_x = 0,\ \sigma_y \neq 0,\ \sigma_z \neq 0,\ \tau_{xy} = 0,\ \tau_{zy} \neq 0,\ \tau_{zx} = 0$). Iš šio elementaraus stačiakampio gretasienio (12.4*a* pav.) išpjaukime stačiąją trikampę prizmę (12.4*b* pav.) ir nagrinėkime tik tas jos sieneles (plokštumas), kurios yra statmenos neapkrautoms sienelėms (12.4*c* pav.).



12.4 pav.

Įtempimus, veikiančius nagrinėjamoje prizmės plokštumoje (σ_α, τ_α), rasime iš pusiausvyros sąlygų. Suprojektuokime visas stačiąją prizmę veikiančias jėgas į ašį z_α:

$$\sum F_{z\alpha} = 0;$$

$$\sigma_\alpha \cdot dA - \sigma_z \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sigma_y \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_{zy} \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_{yz} \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 .$$

Prisiminkime, kad $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$, tuomet

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot \cos^2\alpha + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha . \qquad (12.1)$$

Suprojektuokime visas stačiąją prizmę veikiančias jėgas į ašį y_α:

$$\sum F_{y\alpha} = 0;$$

$$\tau_\alpha \cdot dA - \sigma_z \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sigma_y \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{zy} \cdot dA \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \tau_{yz} \cdot dA \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha = 0 .$$

Prisiminkime, kad $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$, $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$, tuomet

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha . \qquad (12.2)$$

Normaliniai įtempimai, veikiantys plokštumoje, statmenoje nagrinėjamai, gaunami į (12.1) lygtį įrašius kampo β reikšmę ($\beta = \alpha + 90^\circ$):

$$\sigma_\beta = \sigma_z \cdot \sin^2\alpha + \sigma_y \cdot \cos^2\alpha + \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha . \qquad (12.3)$$

Tangentiniai įtempimai statmenose plokštumose pagal dualumo dėsnį yra tarp savęs lygūs: $\tau_\beta = \tau_\alpha$.

■ *Pastaba*. Sudėjus (12.1) ir (12.3) lygtis, gaunama svarbi priklausomybė:

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_z + \sigma_y = \text{const}\,. \qquad (12.4)$$

12.1 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

12.3. Dviašio įtempimų būvio svarbiausieji įtempimai

■ Sukant elementarų stačiakampį gretasienį, galima rasti tokią jo padėtį (kampą α_0), kuriai esant normalinis įtempimas σ_α pasieks didžiausią reikšmę. Remiantis (12.4) lygtimi, statmenoje plokštumoje normalinis įtempimas bus minimalus. Šias plokštumas ir jas atitinkančius ekstreminius normalinius įtempimus nustatysime normalinio įtempimo įstrižajame pjūvyje išvestinę prilyginę nuliui:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\sigma_z \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2\sigma_y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha =$$

$$-(\sigma_z - \sigma_y)\sin 2\alpha - 2\tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha = -2\left[\frac{(\sigma_z - \sigma_y)}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha\right] = -2\tau_\alpha = 0,$$

$$\tau_\alpha = 0\,. \qquad (12.5)$$

Taigi plokštumose, kuriose veikia ekstreminiai normaliniai įtempimai, tangentiniai įtempimai lygūs nuliui. Tokios plokštumos vadinamos svarbiausiosiomis plokštumomis, o jose veikiantys įtempimai – svarbiausiaisiais nagrinėjamo taško įtempimais. Jie žymimi simboliais σ_1, σ_2 ir σ_3; visada $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$. Pavyzdžiui, yra tokie įtempimai: -42 MPa, 0, 63 MPa , tada $\sigma_1 = 63$ MPa , $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -42$ MPa .

Svarbiausiųjų plokštumų padėtis (kampas σ_α) gaunama iš (12.5) lygties:

$$\text{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{(\sigma_z - \sigma_y)}. \qquad (12.6)$$

Kai žinoma svarbiausiųjų plokštumų padėtis, svarbiausieji įtempimai skaičiuojami pagal (12.1), (12.3) formules:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_w &= \sigma_z \cdot \cos^2\alpha_0 + \sigma_y \cdot \sin^2\alpha_0 - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0,\\ \sigma_v &= \sigma_z \cdot \sin^2\alpha_0 + \sigma_y \cdot \cos^2\alpha_0 - \tau_{zy} \cdot \sin 2\alpha_0.\end{aligned}\right\} \qquad (12.7)$$

Pastaba. Ašis *z,* tapusi svarbiausiąja, paprastai žymima raide *w*, ašis *y,* tapusi svarbiausiąja, – raide *v*; kai svarbiausiąja ašimi tampa ašis *x*, paprastai ji žymima raide *u*.

Lygtis (12.2) naudojama skaičiavimams tikrinti:

$$\tau_{wv} = \frac{(\sigma_z - \sigma_y)}{2}\sin 2\alpha_0 + \tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha_0 = 0. \qquad (12.8)$$

Iš (12.1) ir (12.3) formulių išeliminavus kampą α_0, gaunama lygtis, leidžianti rasti svarbiausiuosius įtempimus, nežinant svarbiausiųjų plokštumų padėties:

$$\sigma_{\max(\min)} = \sigma_{1(3)} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_z + \sigma_y) + (-)\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^{\ 2}}\right]. \qquad (12.9)$$

12.1 tekstas, 12.5 pav., 12.2 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

■ Tarkime, yra žinomi svarbiausieji įtempimai σ_1 ir σ_3. Tuomet, remiantis (12.1) ir (12.2) formulėmis,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cdot \cos^2\alpha + \sigma_3 \cdot \sin^2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

čia α – kampas tarp svarbiausiosios plokštumos, kurioje veikia σ_1, ir plokštumos, kurioje skaičiuojami įtempimai.

Iš (12.10) antrosios formulės matyti, kad tangentiniai įtempimai yra didžiausi plokštumose, kurios sudaro $\frac{\pi}{4}$ kampą su svarbiausiosiomis plokštumomis ($\alpha = \frac{\pi}{4}$, $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin 2\alpha = 1$):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \tag{12.11}$$

arba panaudojant (12.9)

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \tag{12.12}$$

Plokštumose, kuriose veikia τ_{max}, normaliniai įtempimai bendruoju atveju nėra lygūs nuliui ($\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$):

$$\sigma_{\pm\frac{\pi}{4}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}. \tag{12.13}$$

Atvejis, kai plokštumose, kuriose veikia τ_{max}, normaliniai įtempimai yra lygūs nuliui, vadinamas grynąja šlytimi:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma = \tau_{max}. \tag{12.14}$$

12.3 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

12.4. Taško deformuotosios būsenos sąvoka

■ Elementarus stačiakampis gretasienis, veikiamas įtempimų, deformuojasi. Dėl normalinių įtempimų pasikeičia jo briaunų ilgiai, dėl tangentinių – kampai tarp jo sienelių. Prisiminkime, kad pirmosios deformacijos vadinamos linijinėmis ir žymimos simboliais ε_x, ε_y, ε_z, o antrosios – šlyties (kampinėmis) ir žymimos simboliais γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{xz}. Taigi konstrukcinio elemento taško deformuotąją būseną (visumą linijinių ir kampinių deformacijų, atsirandančių įvairiomis kryptimis ir įvairiose plokštumose taško aplinkoje) taip pat apibūdina vienas rodiklis – deformacijų būvis, turintis šešis parametrus, tik šį kartą, skirtingai nuo įtempimų būvio, tai yra ne įtempimai, o deformacijos.

■ Jei konstrukcinis elementas yra tamprus ir izotropinis, tai tarp formulių, išreiškiančių ryšį tarp įtempimų, ir tarp formulių, išreiškiančių ryšį tarp deformacijų, yra matematinė analogija. Ji pasireiškia tuo, kad linijines deformacijas ε_y, ε_z, ε_α atitinka normaliniai įtempimai σ_y, σ_z, σ_α, o šlyties deformacijas

$\frac{\gamma_{zy}}{2}, \frac{\gamma_\alpha}{2}$ – tangentiniai įtempimai τ_{zy}, τ_α. Pavyzdžiui, formulės svarbiausiosioms linijinėms deformacijoms skaičiuoti turi tokį pavidalą:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_w &= \varepsilon_z \cdot \cos^2\alpha_0 + \varepsilon_y \cdot \sin^2\alpha_0 - \frac{\gamma_{zy}}{2}\sin 2\alpha_0, \\ \varepsilon_v &= \varepsilon_z \cdot \sin^2\alpha_0 + \varepsilon_y \cdot \cos^2\alpha_0 + \frac{\gamma_{zy}}{2}\sin 2\alpha_0. \end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

12.5. Triašio įtempimo būvio fizikinės lygtys

■ Nagrinėsime tik normalinių įtempimų ir linijinių deformacijų ryšį. Tarsime, kad konstrukcinio elemento medžiaga yra tampri ir izotropinė. Remsimės Huko dėsniu ir skersinių bei išilginių deformacijų priklausomybe $\varepsilon_q = -\nu \cdot \varepsilon$.

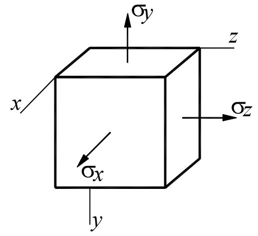
Tarkime, kad elementaraus stačiakampio gretasienio sienelėse (12.6 pav.) veikiantys įtempimai σ_y ir σ_z yra lygus nuliui, tuomet deformacija x ašies kryptimi ε_x priklausys tik nuo normalinio įtempimo σ_x: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$. Dabar tarkime, kad elementaraus stačiakampio gretasienio sienelėse veikia tik normalinis įtempimas σ_y (įtempimai σ_x ir σ_z lygūs nuliui). Linijinę deformaciją x ašies kryptimi ε_x gausime naudodami Puasono koeficientą (deformacija ε_x yra skersinė įtempimo σ_y veikimo krypties atžvilgiu): $\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$. Analogiškai samprotaudami gautume, kad kai įtempimai σ_x ir σ_y yra lygūs nuliui, $\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$. Galiausiai galime užrašyti, kad $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$.

Apibendrinę gauname:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E},$$



12.6 pav.

arba

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{12.16}$$

Gautos lygtys vadinamos bendruoju Huko dėsniu.

Pastaba. Sąlyga, kad įtempimas kuria nors kryptimi lygus nuliui, nereiškia, kad linijinė deformacija ta pačia kryptimi taip pat lygi nuliui: Pavyzdžiui, $\sigma_z = 0,\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$.

■ Prisiminkime, kad dėl normalinių įtempimų keičiasi elementaraus stačiakampio gretasienio briaunų ilgiai, taigi keičiasi ir jo tūris. Aptarkime *tūrinės deformacijos* sąvoką. Tūrine deformacija vadinamas deformuojamo kūno be galo mažo elemento tūrio pokyčio santykis su pradiniu elemento tūriu:

$$\varepsilon_v = \lim_{dV \to 0} \frac{\Delta dV}{dV}. \tag{12.17}$$

Pasinaudojus triašio įtempimų būvio fizikinėmis lygtimis tūrinė deformacija gali būti išreikšta linijinėmis deformacijomis:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{12.18}$$

arba normaliniais įtempimais:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right). \tag{12.19}$$

12.2 tekstas, 12.7 pav., 12.4 pvz.

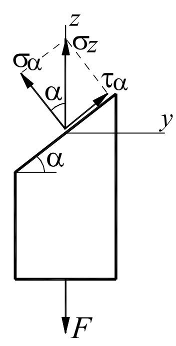
12.6. Tempiamų arba gniuždomų elementų įtempimų būvis

■ Nagrinėsime įtempimus, veikiančius tempiamo strypo įstrižame pjūvyje (12.8 pav.).

Normalinį ir tangentinį įtempimus, veikiančius pjūvyje, kurio normalė sudaro kampą α su z ašimi, apskaičiuosime naudodami (12.1) ir (12.2) formules, įvertindami tą faktą, kad tempiamo arba gniuždomo strypo skerspjūvyje veikia tik normaliniai įtempimai σ_z ($\sigma_y = 0,\ \tau_{zy} = 0$):

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha, \tag{12.20}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z}{2} \sin 2\alpha. \tag{12.21}$$



12.8 pav.

Pastaba. Prisiminkime, kaip įtempimai σ_α ir τ_α buvo gauti 4.7 poskyryje. Ten pat buvo aptartos ir trys ypatingos pjūvių padėtys.

12.5 pvz.

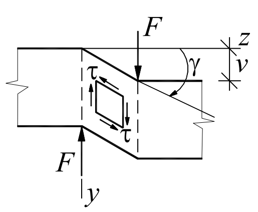
12.7. Šliejamų elementų įtempimų būvis

■ Jeigu plokštumomis, statmenomis kirpimo jėgos krypčiai ir lygiagrečiomis su ja, iš šliejamo elemento išskirsime stačiakampį gretasienį, tai jo sienelėse veiks tik tangentiniai įtempimai (12.9 pav.). Toks įtempimų būvio atvejis vadinamas grynąja šlytimi. Tyrinėtojus dažnai domina svarbiausiasis įtempimų būvis, t. y. toks įtempimų būvio atvejis, kai plokštumose veikia tik normaliniai ekstreminiai įtempimai σ_1 ir σ_3, o tangentiniai įtempimai lygūs nuliui. Pasinaudokime (12.9) lygtimi:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left[\left(\sigma_z + \sigma_y\right) \pm \sqrt{\left(\sigma_z - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{zy}^2}\,\right].$$

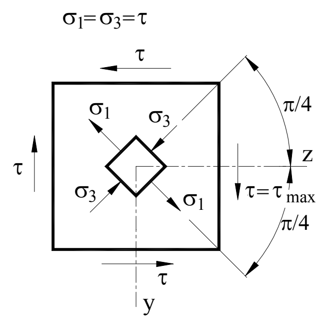
Grynosios šlyties atveju $\sigma_z = 0$, $\sigma_y = 0$, taigi

$$\sigma_{1,3} = \pm\tau_{zy}. \tag{12.22}$$



12.9 pav.

Šie svarbiausieji įtempimai veikia plokštumose, kurios sudaro kampą $\frac{\pi}{4}$ su grynosios šlyties plokštumomis (12.10 pav.): $tg2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} = -\infty$, $2\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$, $\alpha_0 = -\frac{\pi}{4}$. Analogiškai $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$.



12.10 pav.

Pastaba. Grynoji šlytis yra vienintelis plokštuminio įtempimų būvio atvejis, kuriam esant nesikeičia elemento tūris; keičiasi tik jo forma.

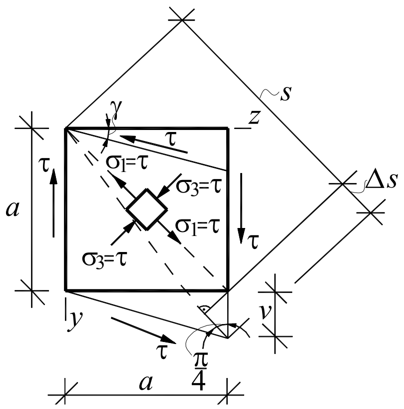
■ Nustatysime tamprumo modulio E, šlyties modulio G ir Puasono koeficiento ν ryšį.

Stačiakampiui gretasieniui susišliejus (12.11 pav.) pasikeis jo įstrižainės ilgis s. Įstrižainės ilgio pokytį nustatysime dvejopai:

a) laikysime, kad ji pailgėjo dėl šlyties deformacijų:

$$\Delta s = \nu \cdot \cos\frac{\pi}{4} = a \cdot \gamma \cdot \cos\frac{\pi}{4} = s \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \gamma \cdot \cos\frac{\pi}{4} =$$

$$s \cdot \frac{\tau}{G}\cos^2\frac{\pi}{4} = s \cdot \frac{\tau}{G}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = s \cdot \frac{\tau}{2G};$$



12.11 pav.

b) laikysime, kad ji pailgėjo dėl linijinių deformacijų:

$$\Delta s = \varepsilon_1 \cdot s = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_3) \cdot s =$$

$$s\frac{1}{E}(\tau - \nu(-\tau)) = s\frac{\tau}{E}(1+\nu).$$

Sulyginę šios įstrižainės ilgio pokyčius gauname:

$$s\frac{\tau}{2G} = s\frac{\tau}{E}(1+\nu),$$

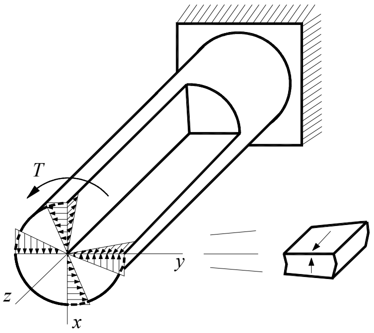
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \qquad (12.23)$$

Ši formulė išreiškia trijų medžiagos tamprumo rodiklių ryšį. Eksperimentiškai nustačius du iš jų, trečiąjį galima rasti iš (12.23) formulės. Pavyzdžiui, plienui, kurio $E = 200\,\text{GPa}$, $\nu = 0{,}25$: $G = \frac{200}{2(1+0.25)} = 80\,\text{GPa}.$

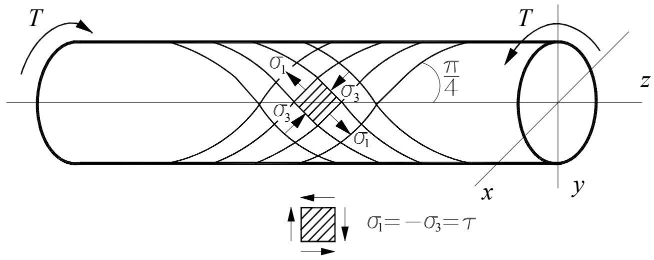
12.6 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

12.8. Apskritų velenų įtempimų būvis

■ Sukamo skritulinio skerspjūvio strypo skerspjūvyje veikia tik tangentiniai įtempimai, kurie kiekviename skerspjūvio taške yra statmeni spinduliui, jungiančiam šį tašką su strypo ašimi. Dėl tangentinių įtempimų dualumo tokie patys įtempimai atsiranda ir išilginėse strypo plokštumose, einančiose per strypo ašį (12.12 pav.). Taigi skersiniais ir išilginiais pjūviais išskirto sukamo strypo elemento įtemptąją būseną apibūdina grynosios šlyties įtempimų būvis.



12.12 pav.

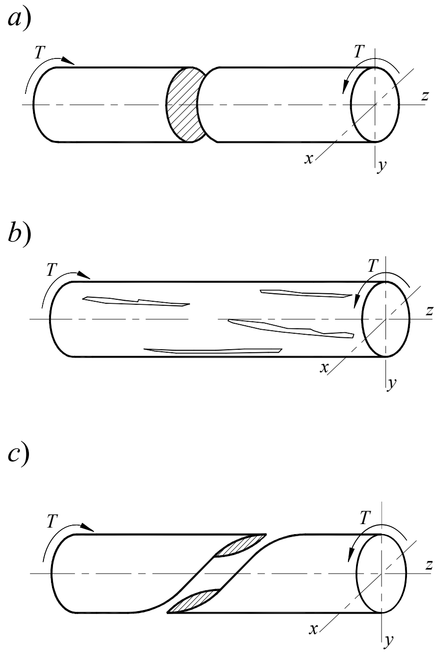


12.13 pav

■ Prisiminkime, kad grynosios šlyties atveju svarbiausieji įtempimai veikia plokštumose, sudarančiose $\frac{\pi}{4}$ kampą su grynosios šlyties plokštumomis; jie yra lygūs tangentiniams įtempimams, lygūs tarpusavyje, bet veikia priešingomis kryptimis. Kaip kinta svarbiausiųjų įtempimų kryptis sukamame strype, vaizdžiai parodo svarbiausiųjų įtempimų trajektorijos, t. y. linijos, kurių liestinė kiekviename strypo taške sutampa su tame taške veikiančio svarbiausiojo įtempimo kryptimi (12.13 pav.).

Pastaba. Svarbiausiųjų įtempimų trajektorija sudaro sraigtinę liniją, sudarančią $\frac{\pi}{4}$ kampą su strypo sudaromąja.

■ Taigi sukamas strypas gali suirti nuo tangentinių įtempimų, veikiančių skerspjūvyje, nuo tangentinių įtempimų, veikiančių išilginiuose pjūviuose, ir nuo svarbiausiųjų įtempimų, veikiančių įstrižuosiuose pjūviuose. Pirmojo tipo įtempimai pavojingi plastiškoms medžiagoms, todėl strypai, pagaminti, pavyzdžiui, iš plastiško plieno, suyra skerspjūvyje (12.14*a* pav.). Antrojo tipo įtempimai pavojingi mediniams strypams, nes mediena neatspari skėlimui išilgai sluoksnių. Tokie strypai suyra išilginiuose pjūviuose (12.14*b* pav.). Trečiojo tipo įtempimai pavojingi strypams, pagamintiems iš trapių medžiagų, nes jos mažiau atsparios tempimui. Tokie strypai (pavyzdžiui, ketiniai) suyra įstrižuosiuose pjūviuose (12.14*c* pav.).

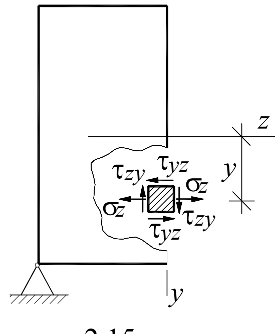


12.14 pav.

12.9. Sijos įtempimų būvis

■ Bendruoju atveju bet kuriame sijos taške (12.15 pav.) veikia tiek normaliniai, tiek tangentiniai įtempimai. Taigi išskirto taško aplinkoje elementaraus stačiakampio gretasienio įtemptoji būsena apibūdinama plokštuminiu įtempimų būviu. Jeigu elementaraus stačiakampio gretasienio viena iš plokštumų sutampa su skerspjūvio plokštuma, tai

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y |S_x|}{I_x \cdot b} \qquad (12.24)$$

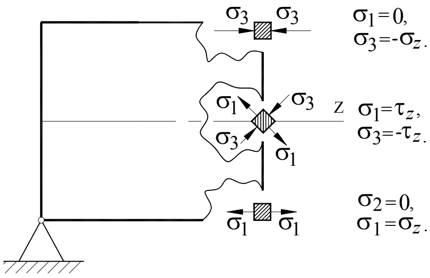


2.15 pav.

■ Nustatysime, kaip kinta įtempimų būvis vieno ir to paties sijos skerspjūvio aukštyje. Naudosime (12.9) ir (12.6) formules. Įrašę į jas $\sigma_y = 0$, gausime, kad

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{1}{2}\left(\sigma_z \pm \sqrt{\sigma_z^{\,2} + 4\tau_{zy}^2}\right),$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z}.$$



12.16 pav.

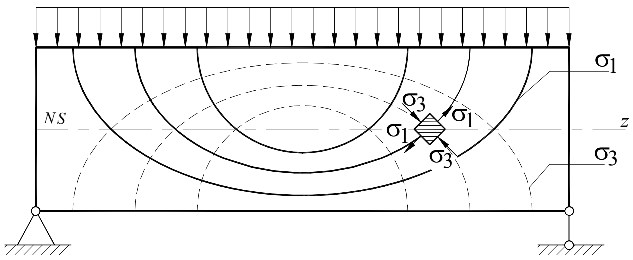
Nagrinėsime tris sijos skerspjūvio sluoksnius (12.16 pav., lentelė).

Viršutinis gniuždomas sluoksnis ($\sigma_z < 0,\ \tau_{zy} = 0$)	Neutralusis sluoksnis ($\sigma_z = 0,\ \tau_{zy} > 0$)	Apatinis tempiamas sluoksnis ($\sigma_z > 0,\ \tau_{zy} = 0$)
$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left((-\sigma_z) + \sqrt{\sigma_z^{\,2} + 0}\right) = 0,$ $\sigma_3 = \frac{1}{2}\left((-\sigma_z) - \sqrt{\sigma_z^{\,2} + 0}\right) = -\sigma_z,$ $\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{0}{(-\sigma_z)} = 0,$ $\alpha_0 = 0.$	$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(0 + \sqrt{0 + 4\tau_{zy}^2}\right) = \tau_{zy},$ $\sigma_3 = \frac{1}{2}\left(0 - \sqrt{0 + 4\tau_{zy}^2}\right) = -\tau_{zy},$ $\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{0} = -\infty,$ $\alpha_0 = -\frac{\pi}{4}.$	$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_z + \sqrt{\sigma_z^{\,2} + 0}\right) = \sigma_z,$ $\sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma_z - \sqrt{\sigma_z^{\,2} + 0}\right) = 0,$ $\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{0}{\sigma_z} = 0,$ $\alpha_0 = 0.$

Apibendrinus lentelėje pateiktą medžiagą galima teigti, kad viršutiniame ir apatiniame sijos sluoksniuose yra svarbiausiasis įtempimų būvis, neutraliajame sluoksnyje – grynoji šlytis.

12.3 tekstas, 12.17 pav. ⌘ ⌘ ⌘

■ Kaip kinta įtempimai visoje sijoje, iš dalies parodo svarbiausiųjų įtempimų trajektorijos. Iš σ_1 trajektorijos sprendžiama, kur ir kokia kryptimi gali atsirasti plyšių, jei sijos medžiaga blogai dirba tempimui. Todėl, armuojant gelžbetonines sijas, armatūrą stengiamasi išdėstyti svarbiausiųjų tempimo įtempimų kryptimi.



12.18 pav.

Bendruoju atveju svarbiausiųjų įtempimų trajektorijos priklauso nuo apkrovos pobūdžio ir atramų tipo (pavyzdžiui, 12.18 pav. yra parodytos svarbiausiųjų įtempimų trajektorijos dviatramės sijos, apkrautos tolygiai išskirstyta apkrova). Tačiau visais atvejais σ_1 ir σ_3 trajektorijos kertasi tarpusavyje stačiu kampu, o su neutraliuoju sluoksniu sudaro $\frac{\pi}{4}$ kampą.

12.19 pav. ⌘ ⌘ ⌘

Kontroliniai klausimai ir užduotys

12.1. Ką nagrinėja įtemptosios ir deformuotosios būsenos teorija?
12.2. Ką vadiname įtemptąja taško būsena?
12.3. Kas yra taško įtempimų būvis?
12.4. Nubraižykite elementarų stačiakampį gretasienį. Parodykite sienelėse (matomose) veikiančius įtempimus.
12.5. Ką teigia tangentinių įtempimų dualumo dėsnis?
12.6. Keliais ir kokiais parametrais apibūdinamas bendriausias taško įtempimų būvis?
12.7. Kokios plokštumos vadinamos svarbiausiosiomis?
12.8. Kokie įtempimai vadinami svarbiausiaisiais?
12.9. Kokius žinote įtempimų būvius? Brėžiniai.
12.10. Koks įtempimų būvis vadinamas dviašiu (plokštuminiu)?
12.11. Paaiškinkite formules, paaiškinimą iliustruokite brėžiniu:

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_{zy}\sin 2\alpha.$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zy}\cos 2\alpha.$$

$$\sigma_\beta = \sigma_z \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha + \tau_{zy}\sin 2\alpha.$$

$$\tau_\beta = \tau_\alpha.$$

12.12. Kaip kinta normalinių įtempimų suma sukant elementarų stačiakampį gretasienį, kurio įtemptąją būseną apibūdina dviašis įtempimų būvis?
12.13. Koks matematikos metodas taikomas svarbiausiųjų plokštumų padėčiai nustatyti?
12.14. Paaiškinkite formules, paaiškinimą iliustruokite brėžiniu:

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{(\sigma_z - \sigma_y)}.$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_w &= \sigma_z\cdot\cos^2\alpha_0 + \sigma_y\cdot\sin^2\alpha_0 - \tau_{zy}\cdot\sin 2\alpha_0,\\ \sigma_v &= \sigma_z\cdot\sin^2\alpha_0 + \sigma_y\cdot\cos^2\alpha_0 - \tau_{zy}\cdot\sin 2\alpha_0.\end{aligned}\right\}$$

12.15. Paaiškinkite formulę:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_z + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}\right].$$

12.16. Per kokį kvadrantą eina svarbiausiojo įtempimo σ_1 kryptis?
12.17. Kam lygus dviašio įtempimų būvio didžiausias tangentinis įtempimas? Formulė.
12.18. Kam lygus svarbiausiojo įtempimų būvio maksimalus tangentinis įtempimas? Kokioje plokštumoje jis veikia?
12.19. Ką vadiname deformuotąja taško būsena?
12.20. Kas yra taško deformacijų būvis?
12.21. Kuo pasireiškia matematinė analogija tarp deformacijų būvio ir įtempimų būvio formulių?
12.22. Užrašykite bendrąjį Huko dėsnį. Trys formulės.
12.23. Kam lygi tūrinė deformacija? Formulė.
12.24. Kaip tūrinė deformacija išreiškiama per linijines deformacijas? Formulė.
12.25. Paaiškinkite formulę:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right).$$

12.26. Kam lygūs įtempimai tempiamo strypo įstrižajame pjūvyje? Brėžinys. Formulė.
12.27. Kam lygūs įtempimai tempiamo strypo pjūvyje, kurio normalė sudaro $\frac{\pi}{4}$ kampą su z ašimi? Formulės.
12.28. Parodykite grynosios šlyties įtempimų būvį. Brėžinys.
12.29. Koks yra ryšys tarp tamprumo ir šlyties modulių bei Puasono koeficiento? Formulė.
12.30. Koks įtempimų būvis apibūdina skersiniais ir išilginiais pjūviais išskirto veleno elemento įtemptąją būseną?
12.31. Kas yra svarbiausiųjų įtempimų trajektorija?
12.32. Nubraižykite skritulinio skerspjūvio veleno svarbiausiųjų įtempimų trajektorijas.
12.33. Nuo kokių įtempimų suyra velenas, pagamintas iš plastiško plieno? Brėžinys.
12.34. Nuo kokių įtempimų suyra velenas, pagamintas iš trapios medžiagos? Brėžinys.
12.35. Nuo kokių įtempimų suyra velenas, pagamintas iš medienos? Brėžinys.
12.36. Nubraižykite sijos dalį. Parodykite viršutinio, vidurinio ir apatinio sluoksnių įtempimų būvius.
12.37. Nubraižykite dviatramės sijos, apkrautos tolygiai išskirstyta apkrova, svarbiausiųjų įtempimų trajektorijas.