

9. Sukimas

9.1. Bendrosios žinios

■ Sukimas yra deformavimo tipas, apibūdinamas skerspjūvių pasisukimu strypo ašies atžvilgiu nuo sukimo momento (9.1 pav.). Jis susijęs su kampinėmis deformacijomis (žr. 8.1 poskyrį). Taip deformuojasi variklių ir staklių ašys, erdvinių konstrukcijų elementai, cilindrinės mažo žingsnio spyruoklės, spygnos raktai ir t.t. Eksperimentiškai nustatyta, kad sukamo elemento įtemptoji ir deformuotoji būseną priklauso nuo skerspjūvio formos. Nagrinėsime tik tokius sukamus elementus, kuriems galioja plokščių pjūvių hipotezė. Tai plačiausiai technikoje vartojami skritulinio ir žiedinio skerspjūvio strypai.

■ Sukami elementai vadinami velenais. Juos veikianti apkrova paprastai išreiškiama perduodama veleno galia. Tarkime, kad prie veleno yra pridėta jėgų pora $M_f = F \cdot d$ (9.2 pav.). Šiai jėgų porai veikiant, veleno sluoksniai susišlies, o pjūvis, kuriame ji yra pridėta, pasisuks kampu φ . Pjūviui sukantis, kiekviena jėga atliks darbą, lygų jėgos F ir kelio sandaugai. Abiejų jėgų atliktas darbas bus lygus: $W = 2F \cdot s = 2F \cdot \varphi \cdot r = F \cdot d \cdot \varphi = M_f \cdot \varphi$. Prisiminkime, kad galia yra lygi darbui, atliktam per laiko vienetą: $P = \frac{W}{t} = \frac{M_f \cdot \varphi}{t} = M_f \cdot \omega$. Taigi, kai žinoma veleno perduodama galia ir veleno sukimosi greitis, veleną sukanti jėgų pora:

$$M_f = \frac{P}{\omega}, \quad (9.1)$$

čia ω – kampinis greitis.

Jeigu veleno sukimosi greitis yra duotas apsisukimais per minutę n , tai

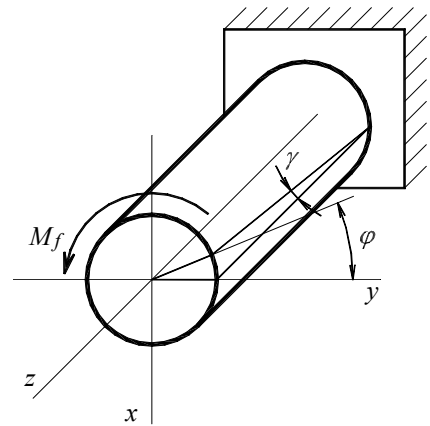
$$M_f = \frac{30P}{\pi \cdot n}, \quad (9.2)$$

nes $\omega = \frac{\pi}{30} n$.

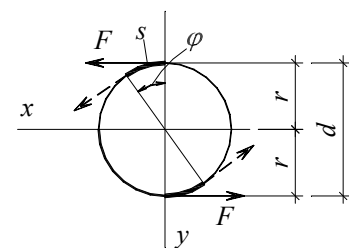
9.1 tekstas

9.2. Sukimo momentas

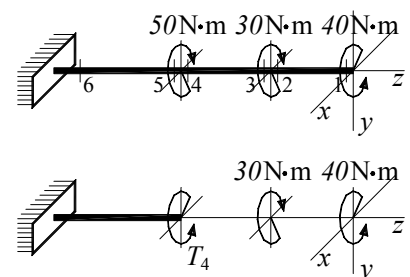
■ Sukimo momentas savo skaitine reikšme lygus visų išorinių jėgų, veikiančių tą strypo dalį, kuriai nepriklauso nagrinėjamas strypo skerspjūvis, momentų strypo ašies atžvilgiu sumai: jei išorinė jėga sukulia momentą, sukantį nagrinėjamą skerspjūvį prieš laikrodžio rodyklės sukimosi kryptį, tai jos momentas sumuojamas su pliuso ženklu, jei pagal – su minuso ženklu (9.3 pav.; $T_4 = 40 - 30 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$).



9.1 pav.



9.2 pav.



9.3 pav.

Sudarant sukimo momentų diagramas, galima vadovautis tomis pačiomis taisyklėmis, kaip ir sudarant ašinių jėgų diagramas, nes ryšys tarp veleno įrašų ir apkrovos ir ryšys tarp tempiamo-gniuždomo strypo įrašų ir apkrovos išreiškiamas tomis pačiomis matematinėmis priklausomybėmis (9.4, 9.5 pav.):

$$\frac{dT}{dz} = -m_f, \quad (9.3)$$

$$M_f = T_i - T_j. \quad (9.4)$$

9.2 tekstas, 9.6 pav., 9.1 pvz. ✖ ✖ ✖

9.3. Tangentiniai įtempimai

■ Išvesdami skritulinio skerspjūvio veleno tangenčių įtempimų formulę, naudosisimės 3.8 poskyryje aprašyta metodika. Prisiminkime, kad ji remiasi statikos, geometrinių deformavimo ir fizinių lygčių sudarymu.

■ Statikos integralinė lygtis (9.7 pav.).

$$T = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA. \quad (9.5)$$

■ Geometrinė lygtis. Sukant veleną, ant kurio paviršiaus buvo nubraižytas stačiakampis tinklas, pastebėta, kad: a) tinklo langeliai susišlieja, bet atstumas tarp skerspjūvių nesikeičia; b) skerspjūvių kontūrai pasilieka apskriti ir plokšti; c) veleno ašis išlieka tiesi. Šie reiškiniai apibūdina tik veleno paviršinių sluoksnių deformavimąsi. Norėdami išspręsti uždavinį, turime priimti papildomą prielaidą: spinduliai, mintyse išvesti bet kuriame skerspjūvyje, sukant veleną, nesusikreivina (tai reiškia, kad visi reiškiniai, kurie vyksta veleno paviršiuje, vyksta ir kituose veleno sluoksniuose).

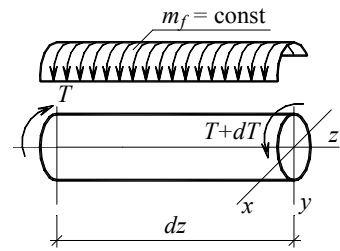
Nagrinėsime elementarųjį veleno elementą (9.8 pav.). Nustatysime ryšį tarp šlyties kampo γ ir skerspjūvio kampinio poslinkio φ .

Veikiant sukimo momentams, veleno ruožas dz susišlies, galiniai jo skerspjūviai vienas kito atžvilgiu pasisuks kampu $d\varphi$. Ruožui taip deformuojantis, taškas B užims naują padėtį B_f . Lanko BB_f ilgį galima išreikšti dvejopai: $BB_f = dz \cdot \operatorname{tg}(\gamma)$ ir $BB_f = r \cdot \operatorname{tg}(d\varphi)$. Sulyginę gautas išraiškas ir įvertinę poslinkių mažumo principą ($\operatorname{tg}(\gamma) = \gamma$, $\operatorname{tg}(d\varphi) = d\varphi$), gauname paviršinių veleno sluoksnių geometrinę lygtį: $\gamma = \frac{d\varphi}{dz} r$. Apibendrinę (žr. 9.8 pav.) gauname geometrinę lygtį bet kokiam veleno sluoksniui:

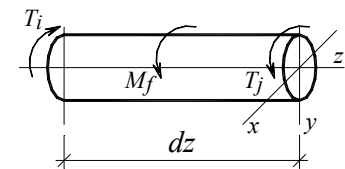
$$\gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho. \quad (9.6)$$

■ Fizinė lygtis.

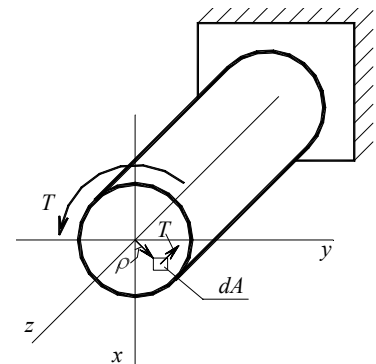
$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (9.7)$$



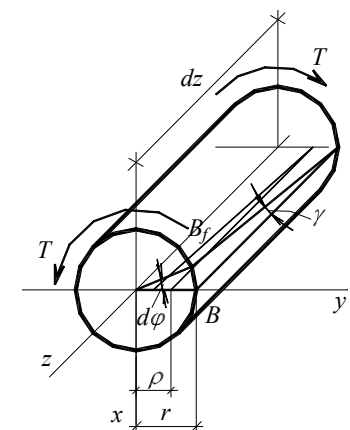
9.4 pav.



9.5 pav.



9.7 pav.



9.8 pav.

■ Sudarykime gautų lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \tau = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA, & (a) \\ \gamma = \frac{d\varphi}{dz} \rho, & (b) \\ \tau = G \cdot \gamma. & (c) \end{cases} \quad (9.8)$$

Dabar belieka išspręsti šių lygčių sistemą tangentiųjų įtempimų atžvilgiu. Į lygtį (a) įrašykime τ išraišką iš lygties (c) ir γ išraišką iš lygties (b): $T = \int_A \tau \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \cdot \gamma \cdot \rho \cdot dA = \int_A G \frac{d\varphi}{dz} \rho \cdot \rho \cdot dA$.

Iškelkime prieš integralą dydžius, nepriklausančius nuo dA : $T = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA$. Bet $\int_A \rho^2 \cdot dA$ yra polinis inercijos momentas, taigi $T = G \cdot I_p \frac{d\varphi}{dz}$ arba

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{G \cdot I_p}. \quad (9.9)$$

Galiausiai, pasinaudoję ką tik nustatytu ryšiu tarp kampinio poslinkio ir sukimo momento, gauname tangentiųjų įtempimų pasiskirstymo veleno skrituliniame skerspjūvyje formulę:

$$\begin{aligned} \tau &= G \cdot \gamma = G \frac{d\varphi}{dz} \rho = G \frac{T}{G \cdot I_p} \rho, \\ \tau &= \frac{T}{I_p} \rho. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Formulė (9.10) rodo, kad tangentiniai įtempimai veleno skrituliniame skerspjūvyje kinta tiesiškai (9.9 pav.): jie yra lygūs nuliui ties veleno ašimi, o ekstreminę reikšmę įgyja paviršiniuose sluoksniuose. Prisiminkime, kad $\frac{I_p}{\rho_{\max}} = W_p$, taigi

$$\tau_{\text{extr}} = \frac{T}{W_p}. \quad (9.11)$$

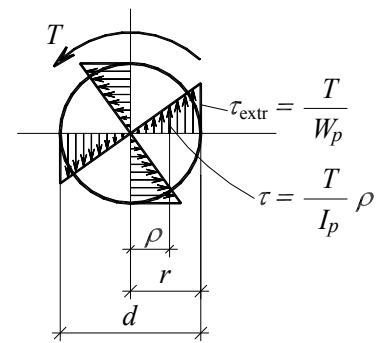
9.2 pvz. ***

Skritulio skerspjūvio veleno stiprumo sąlyga turi tokį pavidalą:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|T|}{W_p} \leq \tau_{\text{adm}}(R_s), \quad (9.12)$$

čia τ_{adm} – leistinieji tangentiniai įtempimai, R_s – kirpimo projektinis stipris.

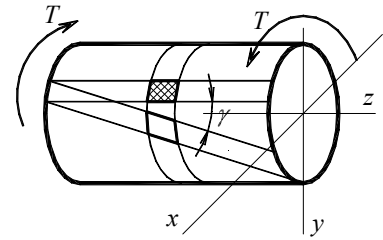
9.3 pvz. ***



9.9 pav.

9.4. Kampinės deformacijos ir kampiniai poslinkiai

■ Kai velenas yra sukamas, jo geometriniai matmenys nesikeičia. Taigi linijinės deformacijos veleno ašies kryptimi ir linijinės deformacijos skerspjūvio spindulio kryptimi yra lygios nuliui. Veleno deformuotoji būseną apibūdinama tik kampinėmis deformacijomis (9.10 pav.), kurios priklauso nuo tangentinių įtempimų. Kai apkrovos nedidelės, šis ryšys yra tiesinis (prisiminkime Huko dėsnį): $\tau = G \cdot \gamma$. Pasinaudojus lygtimis (9.6) ir (9.9), bet kurio sluoksnio deformaciją galima išreikšti per sukimo momentą:



9.10 pav.

$$\gamma = \frac{T}{G \cdot I_p} \rho. \quad (9.13)$$

Medžiagos šlyties modulio ir skerspjūvio polinio inercijos momento sandauga vadinama veleno standžiu. Jis kiekybiškai įvertina veleno sugebėjimą priešintis deformuojamam apkrovų poveikiui.

■ Kartais patogiau deformuotąją veleno būseną aprašyti naudojant ne kampinę deformaciją, o apibendrintąją deformaciją – ruožo sąsūkį (prisiminkite tempiamo-gniuždomo strypo linijinę deformaciją ε ir ruožo ilgio pokytį Δl). Veleno ruožo sąsūkis – kampas, kuriuo susisuka ruožas (kampas, kuriuo pasisuka vienas kito atžvilgiu galiniai ruožo skerspjūviai), gaunamas iš (9.9) lygties (imamas veleno ruožo galinio ir pradinio skerspjūvių kampinių poslinkių skirtumas):

$$\Delta\varphi = \int_l \frac{T}{G \cdot I_p} dz, \quad (9.14)$$

čia l – ruožo ilgis.

Jei veleno ruože veikia pastovus sukimo momentas, jei velenas pagamintas iš vientisos vienalytės medžiagos ir jei jis yra pastovaus skerspjūvio, tai

$$\Delta\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}. \quad (9.15)$$

Velenui deformuojantis (jo ruožams susisukant), atskiri jo skerspjūviai pasisuka atskaitos sistemos pradžios taško atžvilgiu. Grafikas, vaizduojantis naujas veleno skerspjūvių padėtis, vadinamas veleno skerspjūvių kampinių poslinkių diagrama. Sudarant šią diagramą, pirmiausia skaičiuojami ruožo sąsūčiai, nes bet kurio skerspjūvio kampinio poslinkio didumas priklauso nuo to, kiek susisuko ruožai, esantys tarp jo ir koordinatinių sistemos pradžios taško, kuris bendroju atveju gali būti sutapdintas su bet kuriuo skaičiuojamuoju skerspjūviu. Suskaičiavus šių ruožų sąsūkius, gaunamas kampinis poslinkis:

$$\varphi = \pm \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i, \quad (9.16)$$

čia n – ruožų, esančių tarp nagrinėjamo skerspjūvio ir pradinio skerspjūvio skaičius.

9.3 tekstas, 9.11 pav. ✖ ✖ ✖

■ Standumo sąlygos. Dažniausiai yra apribojami veleno atitinkamų skerspjūvių kampiniai poslinkiai

$$|\varphi| \leq \varphi_u \quad (9.17)$$

arba didžiausias veleno santykinis sąsūkis:

$$|\Theta|_{\max} = \frac{T}{G \cdot I_p} \leq \Theta_u. \quad (9.18)$$

čia φ_u, Θ_u – normomis nustatytas ribinis kampinis poslinkis ir ribinis santykinis sąsūkis.

9.4 pvz. ✖ ✖ ✖

9.5. Išorinių jėgų darbas. Veleno potencinė deformavimo energija

■ Tarkime, kad prie veleno statišškai pridedama jėgų pora M_f (9.12 pav.). Jėgoms kintant nuo nulio iki galinės savo reikšmės, velenas deformuosis (sulisuks), o pjūvis, kuriame veikia momentas, pasisuks kampu φ . Jeigu velenas tamprus ir deformuojasi proporcingai, tai išorinių jėgų darbas

$$W = \frac{1}{2} M_f \cdot \varphi. \quad (9.19)$$

Šis darbas niekur nedingsta, jis susikaupia deformuotame veleno potencinės deformavimo energijos pavidalu.

Išskirsime nagrinėjamame veleno ilgio dz elementą (9.13 pav.). Jame sukaupta potencinė deformavimo energija bus lygi sukimo momento atliktam darbui, kurį jis atliks deformuodamas elementą ir pasisukdamas kampu $d\varphi$:

$$dE_p = dW_{\text{int}} = \frac{1}{2} T \cdot d\varphi. \quad \text{Bet } d\varphi = d(\Delta\varphi) = \frac{T}{G \cdot I_p} dz, \text{ taigi}$$

$$dE_p = \frac{T^2}{2G \cdot I_p} dz. \quad (9.20)$$

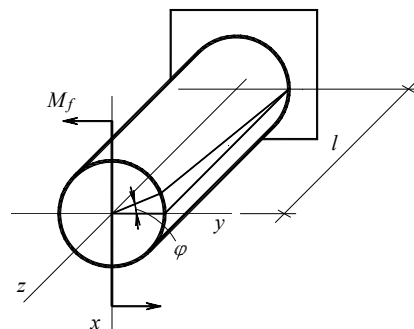
Visame veleno sukaupta potencinė deformavimo energija:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_l \frac{T^2}{G \cdot I_p} dz. \quad (9.21)$$

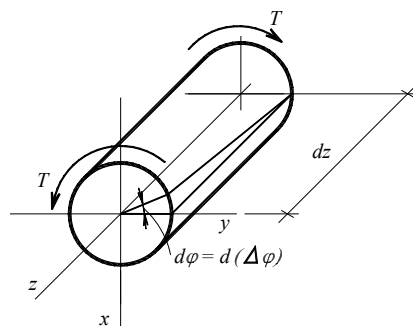
Jeigu veleno veikia pastovus sukimo momentas ($T = \text{const}$), jeigu strypas pagamintas iš vienodos medžiagos ($G = \text{const}$) ir jeigu veleno skerspjūvis visame jo ilgyje yra vienodas ($I_p = \text{const}$), tai:

$$E_p = \frac{T^2 \cdot l}{2G \cdot I_p}. \quad (9.22)$$

9.5 pvz. ✖ ✖ ✖



9.12 pav.



9.13 pav.

9.6. Sraigtinės cilindrinės mažo žingsnio spyruoklės

■ Nagrinėsime sraigtinės cilindrinės mažo žingsnio spyruokles, t.y. tokias spyruokles, kurių sraigtinės linijos posvyrio kampas su plokštuma, statmena spyruoklės ašiai, yra mažas ($\alpha < \frac{\pi}{36}$). Esant tokiam kampui laikoma, kad spyruoklės vijos guli šioje plokštumoje (9.14 pav.). Nustatysime spyruoklės vijos skerspjūvyje veikiančias įrašas. Tam tikslui perpjaukime spyruoklę į dvi dalis (9.15 pav.). Apatinės dalies poveikį viršutinei daliai bendruoju atveju reikėtų pakeisti šešiomis įrašomis, tačiau, užrašius visas (šešias) pusiausvyros lygtis, nesunku įsitikinti, kad tik dvi iš jų – skersinė jėga ir sukimo momentas – nelygios nuliui:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_v = 0; \quad Q = F, \\ \sum M_{fc} = 0; \quad T = F \frac{D}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

■ Tiek nuo skersinės jėgos, tiek nuo sukimo momento atsiranda tangentiniai įtempimai. Nuo skersinės jėgos atsiradę įtempimai visame vijos skerspjūvyje pasiskirsto vienodai (9.16 pav.):

$$\tau(Q) = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2}. \quad (9.24)$$

Nuo sukimo momento atsiradę tangentiniai įtempimai skerspjūvyje kinta tiesiškai: jie lygūs nuliui vijos ašyje, savo ekstreminę reikšmę pasiekia paviršiniuose jos sluoksniuose (9.17 pav.):

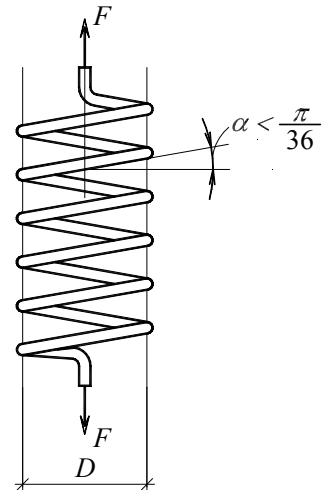
$$\tau_{\text{extr}} = \frac{T}{W_p} = \frac{F \frac{D}{2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{8F \cdot D}{\pi \cdot d^3}. \quad (9.25)$$

Įtempimai nuo abiejų įrašų sumuojasi vidiniuose vijos sluoksniuose (taške K , 9.18 pav.):

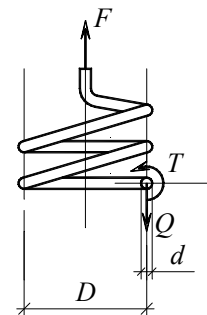
$$\tau_{\text{extr}} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2} + \frac{8F \cdot D}{\pi \cdot d^3}. \quad (9.26)$$

Paprastai įtempimai nuo skersinės jėgos yra maži palyginus juos su įtempimais nuo sukimo momento, todėl skaičiuojant spyruokles jie dažniausiai neįvertinami. Tada spyruoklės stiprumo sąlyga turi tokį pavidalą:

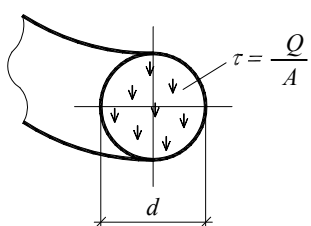
$$|\tau|_{\text{max}} = \frac{8|F| \cdot D}{\pi \cdot d^3} \leq \tau_{\text{adm}}. \quad (9.27)$$



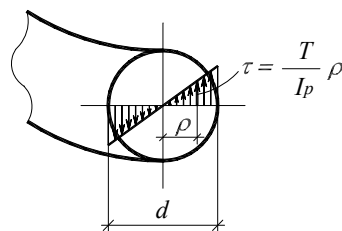
9.14 pav.



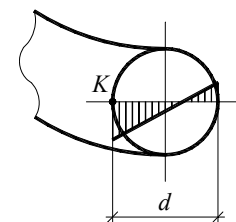
9.15 pav.



9.16 pav.



9.17 pav.



9.18 pav.

■ Nustatysime spyruoklės, kurios ilgis l , žingsnis t , vijų skaičius n , skersmuo D , vielos skersmuo d , šlyties modulis G , ilgio pokytį (9.19 pav.).

Veikiant išorinei jėgai F , spyruoklė deformuosis, ir ją deformuojanti jėga atliks darbą:

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l. \quad (9.28)$$

Įvertinus tik deformaciją nuo sukimo momento, galima užrašyti, kad spyruoklės deformacijos potencinė energija:

$$E_p = \frac{T^2 \cdot l_v}{2G \cdot I_p}. \quad (9.29)$$

Sulyginę išorinės jėgos atliktą darbą ir spyruoklėje sukauptą potencinę deformavimo energiją bei įvertinę, kad sukimo momentas $T = F \frac{D}{2}$, spyruoklės vielos ilgis $l_v = \pi \cdot D \cdot n$, vielos skerspjūvio polinis inercijos momentas $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$, gauname spyruoklės ilgio pokytį:

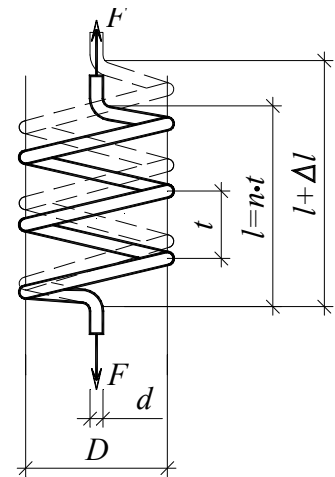
$$\frac{1}{2} F \cdot \Delta l = \frac{T^2 \cdot l_v}{2G \cdot I_p} = \frac{\left(\frac{F \cdot D}{2}\right)^2 \pi \cdot D \cdot n}{2G \frac{\pi \cdot d^4}{32}} = \frac{4F^2 \cdot D^3}{G \cdot d^4} n,$$

$$\Delta l = F \frac{8D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \quad (9.30)$$

arba

$$\Delta l = \frac{F}{C}. \quad (9.31)$$

Čia $C = \frac{G \cdot d^4}{8D \cdot n}$ – spyruoklės konstanta, apibūdinanti spyruoklės standumą; kuo ji didesnė, tuo spyruoklė standesnė.



9.19 pav.

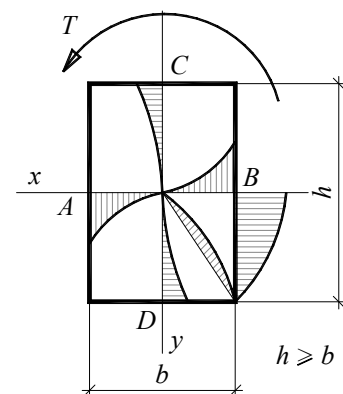
9.6 pvz. ■■■

9.7. Neapskritų velenų skaičiavimas

■ Neapskritų velenų skaičiavimas yra sudėtingas uždavinys, nes velenui deformuojantis jo skerspjūviai susimėto (negalioja plokščių pjūvių hipotezė). Tokių uždavinių tikslūs sprendiniai gaunami taikant tamprumo teorijos metodus.

Aptarsime stačiakampio skerspjūvio velenus. Nustatyta, kad juose maksimalūs tangentiniai įtempimai atsiranda ties ilgesniosios skerspjūvio kraštinės viduriu. Šiek tiek mažesni įtempimai atsiranda ties trumpesniosios kraštinės viduriu, o įtempimai stačiakampio kampuose lygūs nuliui (9.20 pav.). Skaitinėms tangentiųjų įtempimų reikšmėms gauti taip pat veleno sąsūkiui nustatyti naudojamos empirinės formulės:

$$\tau_{\max} = \tau_a = \tau_b = \frac{T}{W_t}, \quad (9.32)$$



9.20 pav.

$$\tau_c = \tau_d = \gamma \cdot \tau_{\max} = \gamma \frac{T}{W_t}, \quad (9.33)$$

$$\Delta\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_t}. \quad (9.34)$$

Čia W_t, I_t – sukimo atsparumo bei inercijos momentai: $W_t = \beta \cdot b^3$, $I_t = \alpha \cdot b^4$ (b – trumpesnioji stačiakampio kraštinė). Koefficientai α, β ir γ priklauso nuo stačiakampio ilgesniosios ir trumpesniosios kraštinės santykio ir pateikiami lentelėse. Pavyzdžiui, “Aiškinamojo medžiagų atsparumo uždavinyno” 5.1 lentelėje (73 puslapyje).

9.7 pvz. ✱ ✱ ✱

Kontroliniai klausimai

- 9.1. Užrašykite velenu perduodamos galios ir momento ryšį.
- 9.2. Užrašykite kampinio greičio, išreikšto radianais per sekundę, ir kampinio greičio, išreikšto apsisukimais per minutę, ryšį.
- 9.3. Kaip apskaičiuojamas momentas, kai žinoma galia ir kampinis greitis, išreikštas apsisukimais per minutę?
- 9.4. Kokia prielaida negalioja sukant neapskrito pjūvio strypus?
- 9.5. Kokia papildoma prielaida priimama, išvedant tangentinių įtempimų pasiskirstymo veleno skrituliniame skerspjūvyje formulę?
- 9.6. Užrašykite integralinę statikos lygtį, susiejančią sukimo momentą su tangentiniais įtempimais. Brėžinys.
- 9.7. Užrašykite geometrinę lygtį, susiejančią kampinį poslinkį su kampine deformacija. Brėžinys.
- 9.8. Užrašykite fizinę lygtį, naudojamą skaičiuojant velenus.
- 9.9. Kaip pasiskirsto įtempimai veleno skrituliniame skerspjūvyje?
- 9.10. Kaip jie apskaičiuojami?
- 9.11. Užrašykite skritulinio skerspjūvio veleno stiprumo sąlygą.
- 9.12. Kas yra santykinis sąsūkis? Apibrėžimas, formulė.
- 9.13. Kas yra veleno sąsūkis? Apibrėžimas, formulė.
- 9.14. Kas yra veleno skerspjūvio kampinis poslinkis? Apibrėžimas, formulė.
- 9.15. Užrašykite skritulinio skerspjūvio veleno standį.
- 9.16. Kam lygi velene sukaupta deformacijos potencinė energija?
- 9.17. Kaip pasiskirsto įtempimai veleno stačiakampiame skerspjūvyje? Kuriame taške jie didžiausi? Brėžinys.
- 9.18. Nuo ko priklauso stačiakampio skerspjūvio veleno įtempimai ir deformacijos?
- 9.19. Paaiškinkite formules:

$$W_t = \beta \cdot b^3, \quad I_t = \alpha \cdot b^4.$$
- 9.20. Paaiškinkite formulę:

$$\tau_1 = \gamma \cdot \tau_{\max}.$$
- 9.21. Kokios įrašos atsiranda mažo žingsnio sraigtinės cilindrinės spyruoklės vijos skerspjūvyje?
- 9.22. Kam lygūs didžiausi absoliutiniu didumu įtempimai mažo žingsnio sraigtinės cilindrinės spyruoklės vijos skerspjūvyje?
- 9.23. Paaiškinkite formulę:

$$|\Delta l| = \frac{8D^3 \cdot h}{G \cdot d^4} \cdot |F|.$$