7. Geometriniai plokščiųjų figūrų rodikliai

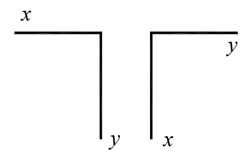
7.1. Bendrosios žinios

7.1 tekstas

7.2. Pagrindinės sąvokos

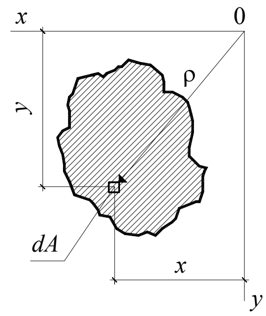
■ Geometriniais vadinami pjūvio (plokščiosios figūros) rodikliai, kurie priklauso nuo pjūvio matmenų, formos bei orientacijos ir kiekybiškai įvertina jo sugebėjimą priešintis mechaniniam poveikiui.

Didesnė dalis pjūvio geometrinių rodiklių yra susiejami su koordinatinių ašių sistema. Naudosime VGTU Medžiagų atsparumo katedroje priimtas koordinatinių ašių žymėjimo taisykles (žr. 3.1 poskyrį). Taigi nagrinėjamo elemento skerspjūvio koordinatinės ašys gali būti dvejopos (7.1 pav.).



7.1 pav.

■ Tarkime, turime pjūvį ir laisvai pasirinktą koordinatinių ašių sistemą $x0y$ (7.2 pav.). Išskirkime nykstamai mažą plotelį dA ir pažymėkime jo koordinates x ir y. Taip pat pažymėkime jo polinę koordinatę ρ, laikydami, kad polius sutampa su koordinatinių ašių x ir y susikirtimo tašku 0. Tada pagrindiniai pjūvio geometriniai rodikliai bus šie:



plotas – $$A = \int_A dA, \tag{7.1}$$

statiniai momentai – $$S_x = \int_A y \cdot dA, \quad S_y = \int_A x \cdot dA, \tag{7.2}$$

ašiniai inercijos momentai – $$I_x = \int_A y^2 \cdot dA, \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA \tag{7.3}$$

išcentrinis inercijos momentas – $$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA, \tag{7.4}$$

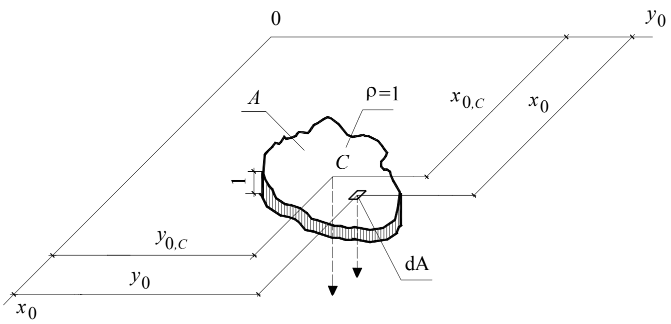
polinis inercijos momentas – $$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA. \tag{7.5}$$

Akivaizdu, kad $I_p = I_x + I_y$, nes $\rho^2 = x^2 + y^2$.

7.3. Pjūvio ploto svorio centras

■ Svorio centras (sunkio centras) yra nekintamai su kietuoju kūnu susijęs geometrinis taškas, per kurį eina visų kūno dalelių svorių atstojamosios veikimo linija. Tarkime, kad pjūvis (plokščioji figūra) yra kietasis kūnas, kurio storis lygus vienam, kurio medžiagos tankis lygus vienam ir kuris orientuotas taip, kad sunkio jėgos yra statmenos jo plokščiajam paviršiui (7.3 pav.). Pritaikykime jam atstojamosios momento (Varinjono) teoremą: jeigu jėgų sistema turi atstojamąją, tai šios atstojamosios momentas bet kurios ašies atžvilgiu lygus jėgų momentų tos pačios ašies atžvilgiu sumai:

$$\left.\begin{aligned} A \cdot x_{0,c} &= \int_A x_0 \cdot dA, \\ A \cdot y_{0,c} &= \int_A y_0 \cdot dA. \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$



7.3 pav.

Čia: A – pjūvio plotas (arba tariamojo kūno svorio atstojamoji), dA – elementarusis plotelis (arba tariamojo kūno elementariosios dalelės svorio jėga), $x_{0,c}$, $y_{0,c}$ – ploto centro koordinatės laisvai pasirinktų (pagalbinių) ašių x_0 ir y_0

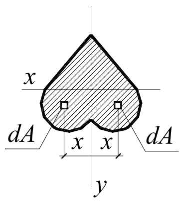
atžvilgiu, x_0, y_0 – elementariojo plotelio koordinatės.

Bet $\int_A x_0 \cdot dA = S_{y0}$, $\int_A y_0 \cdot dA = S_{x0}$, taigi

$$\left.\begin{aligned} x_{0,c} &= \frac{S_{y0}}{A}, \\ y_{0,c} &= \frac{S_{x0}}{A}, \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

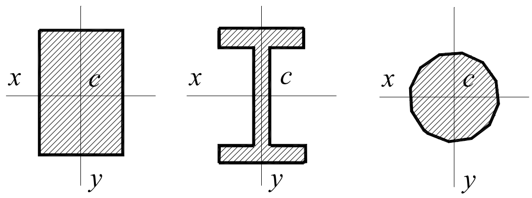
čia S_{y0}, S_{x0} – pjūvio ploto statiniai momentai pagalbinių ašių atžvilgiu.

■ Iš 7.6 formulių matyti, kad centrinių ašių atžvilgiu pjūvio ploto statiniai momentai yra lygūs nuliui (kai pagalbinės ašys sutapdinamos su centrinėmis ašimis, koordinatės $x_{0,c}$ ir $y_{0,c}$ tampa lygios nuliui; žr. 7.3 pav.). Ši centrinių ašių savybė naudojama skaičiavimams tikrinti. Be to, pasinaudojus šia savybe galima teigti, kad bet kuri pjūvio ploto simetrijos ašis kartu yra ir centrinė ašis (jos atžvilgiu kiekvienam elementariajam ploteliui visada galima rasti tokį patį plotelį su priešingo ženklo koordinate; 7.4 pav.). Štai kodėl, jeigu pjūvio plotas turi dvi simetrijos ašis, tai jo svorio centras sutampa su šių ašių susikirtimo tašku (7.5 pav.). Jeigu pjūvio plotas yra simetriškas taško atžvilgiu, tai šis taškas taip pat yra ir pjūvio ploto svorio centras (7.6 pav.).

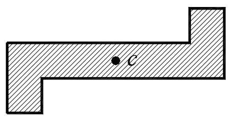


7.4 pav.

a) b) c)



7.5 pav.



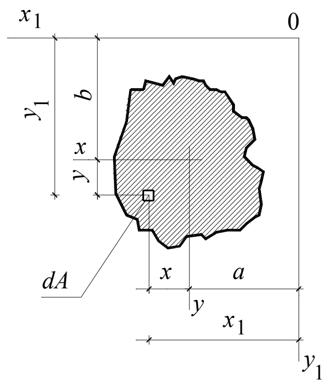
7.6 pav.

7.1 pvz.

7.4. Inercijos momentai lygiagrečių ašių atžvilgiu

■ Tarkime, duotojo pjūvio ploto inercijos momentai ašių x ir y atžvilgiu yra žinomi. Reikia rasti inercijos momentus lygiagrečių ašių x_1 ir y_1 atžvilgiu (7.7 pav.). Elementariojo plotelio koordinates x_1 ir y_1 išreiškime per koordinates x ir y:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + a, \\ y_1 &= y + b. \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$



7.7 pav.

Įrašykime gautas koordinačių išraiškas į bendrąsias inercijos momentų išraiškas (7.3, 7.4):

$$\begin{aligned} I_{x1} &= \int_A y_1^2 \cdot dA = \int_A (y+b)^2 dA = \int_A y^2 \cdot dA + b^2 \int_A dA + 2b \int_A y \cdot dA = \\ &= I_x + b^2 A + 2b \cdot S_x, \\ I_{y1} &= \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_A (x+a)^2 dA = \int_A x^2 \cdot dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A x \cdot dA = \\ &= I_y + a^2 \cdot A + 2a \cdot S_y, \end{aligned}$$

$$I_{x1y1} = \int_A x_1 \cdot y_1 \cdot dA = \int_A (x+a)(y+b)dA = \int_A x \cdot y \cdot dA + a \cdot b \int_A dA +$$
$$+ b\int_A x \cdot dA + a\int_A y \cdot dA = I_{xy} + a \cdot b \cdot A + b \cdot S_y + a \cdot S_x .$$

Jeigu ašys x ir y yra centrinės, tai $S_x = 0$; $S_y = 0$. Tada gautos formulės supaprastėja:

$$\left.\begin{aligned} I_{x1} &= I_x + b^2 \cdot A, \\ I_{y1} &= I_y + a^2 \cdot A, \\ I_{x1y1} &= I_{xy} + a \cdot b \cdot A. \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Ašinis inercijos momentas atžvilgiu ašies, lygiagrečios centrinei ašiai, yra lygus centrinio inercijos momento ir pjūvio ploto, padauginto iš ašies atstumo nuo pjūvio ploto svorio centro kvadrato, sumai.

Išcentrinis inercijos momentas atžvilgiu ašių, lygiagrečių centrinėms ašims, yra lygus centrinio išcentrinio inercijos momento ir pjūvio ploto, padauginto iš ašių atstumų nuo pjūvio ploto svorio centro, sumai.

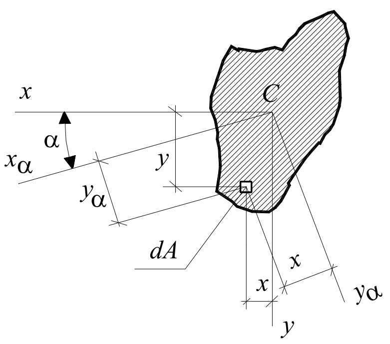
7.2 pvz.

7.5. Inercijos momentai pasuktų ašių atžvilgiu

■ Tarkime, duotojo pjūvio ploto inercijos momentai ašių x ir y atžvilgiu yra žinomi. Reikia rasti inercijos momentus pasuktų ašių x_α ir y_α atžvilgiu (7.8 pav.).

Elementariojo plotelio koordinates x_α ir y_α išreikškime per koordinates x ir y (pasinaudokime žinomomis iš matematikos koordinačių transformacijos formulėmis):

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha, \\ y_\alpha &= -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (7.10)$$



7.8 pav.

Įrašykime gautas koordinačių išraiškas į bendrąsias inercijos momentų išraiškas. Pradėkime nuo ašinio inercijos momento x ašies atžvilgiu:

$$I_{x\alpha} = \int_A y_\alpha^2 \cdot dA = \int_A (-x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha)^2 dA =$$
$$= \sin^2\alpha \cdot \int_A x^2 \cdot dA + \cos^2\alpha \cdot \int_A y^2 \cdot dA - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA =$$
$$= I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha.$$

Analogiškai išsprendę likusius du integralus (prisiminkime, kad $cos^2\alpha - sin^2\alpha = cos 2\alpha$), gausime šias inercijos momentų, pasuktų koordinatinių ašių atžvilgiu, formules:

$$\left.\begin{aligned} I_{x\alpha} &= I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \\ I_{y\alpha} &= I_x \cdot \sin^2\alpha + I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha, \\ I_{x\alpha y\alpha} &= \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (7.11)$$

Sudėkime pirmąsias dvi lygtis. Įvertinę, kad $sin^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$, gauname svarbią priklausomybę:

$$I_{x\alpha} + I_{y\alpha} = I_x + I_y = \text{const.} \qquad (7.12)$$

Tai reiškia, kad sukant koordinatines ašis ašinių inercijos momentų suma nesikeičia. Ši ašinių inercijos momentų savybė paprastai naudojama skaičiavimams tikrinti.

7.3 pvz. ⌘⌘⌘

7.6. Svarbiausiosios ašys ir svarbiausieji inercijos momentai

■ Formulės (7.11) rodo, kad inercijos momentų reikšmės priklauso nuo pjūvio ploto koordinatinių ašių padėties. Skaičiuotojus paprastai domina tokios koordinatinės ašys, kurių atžvilgiu ašiniai inercijos momentai įgyja ekstremines reikšmes. Tokiai ašių padėčiai nustatyti naudosime matematinį metodą, naudojamą funkcijos ekstremumui skaičiuoti: jeigu diferencijuojamos funkcijos išvestinė kuriame nors taške yra lygi nuliui, tai šiame taške duotoji funkcija turi ekstremumą. Išdiferencijuokime ašinio inercijos momento $I_{x\alpha}$ išraišką kampo, kuriuo sukamos koordinatinės ašys, atžvilgiu:

$$\frac{dI_{x\alpha}}{d\alpha} = -2I_x \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha + 2I_y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2I_{xy} \cdot \cos 2\alpha =$$
$$= (I_y - I_x) 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2I_{xy} \cdot \cos 2\alpha =$$
$$= -2\left[\frac{(I_x - I_y)}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cdot \cos 2\alpha\right].$$

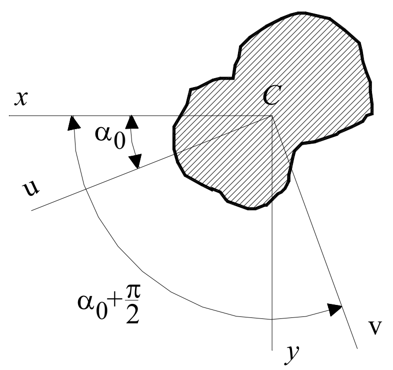
Kampą, prie kurio ašiniai inercijos momentai įgyja ekstremines reikšmes, pažymėkime α_0. Tada

$$\frac{I_x - I_y}{2} sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cdot cos 2\alpha_0 = 0, \qquad (7.13)$$

$$tg 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}, \qquad (7.14)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right). \qquad (7.15)$$

Formulė (7.14) duoda dvi kampo reikšmes: α_0 ir $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ (7.9 pav.). Taigi yra dvi tarpusavyje statmenos ašys, kurių atžvilgiu ašiniai inercijos momentai įgyja ekstremines reikšmes. Žinant, kad ašinių inercijos momentų suma yra pastovus dydis, galima teigti, kad ašinis inercijos momentas vienos iš jų atžvilgiu yra didžiausias, o kitos – mažiausias. Šios dvi tarpusavyje statmenos ašys vadinamos svarbiausiosiomis ašimis ir paprastai žymimos simboliais *u* ir *v*. Ašiniai inercijos momentai jų atžvilgiu vadinami svarbiausiaisiais inercijos momentais ir žymimi simboliais I_u, I_v (žr. 7.9 pav.).



7.9 pav.

Lygties (7.13) kairioji pusė sutampa su išcentrinio inercijos momento išraiška (7.11). Taigi išcentrinis inercijos momentas svarbiausiųjų ašių atžvilgiu yra lygus nuliui. Įvertinę šį faktą ir panaudoję įvestus simbolius, gauname šias formules svarbiausiesiems inercijos momentams skaičiuoti:

$$\left.\begin{aligned} I_u &= I_x \cdot cos^2\,\alpha_0 + I_y \cdot sin^2\,\alpha_0 - I_{xy} \cdot sin\,2\alpha_0\,, \\ I_v &= I_x \cdot sin^2\,\alpha_0 + I_y \cdot cos^2\,\alpha_0 + I_{xy} \cdot sin\,2\alpha_0\,, \\ I_{uv} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.16}$$

7.4 pvz. ⌘⌘⌘

Jei žinomi svarbiausieji inercijos momentai, tai inercijos momentai bet kokių kitų pasuktų ašių atžvilgiu apskaičiuojami pagal šias formules:

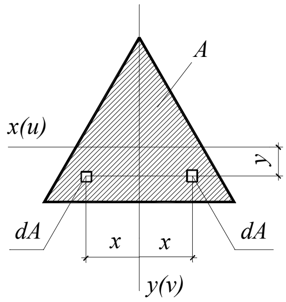
$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_u \cdot \cos^2\alpha + I_v \cdot \sin^2\alpha, \\ I_y &= I_u \cdot \sin^2\alpha + I_v \cdot \cos^2\alpha, \\ I_{xy} &= \frac{I_u - I_v}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7.17}$$

■ Aptarsime keletą išcentrinio inercijos momento savybių ir kelias su jomis glaudžiai susijusias išvadas.

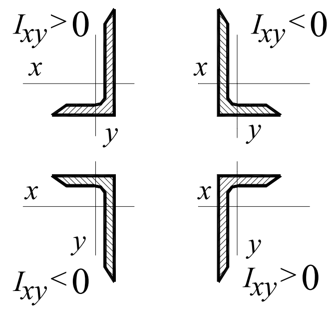
1. Išcentrinis inercijos momentas atžvilgiu dviejų statmenų ašių, kurių bent viena yra pjūvio simetrijos ašis, yra lygus nuliui (jos atžvilgiu kiekvienam elementariajam ploteliui visada galima rasti tokį patį plotelį su priešingo ženklo atitinkama koordinate; 7.10 pav.). Taigi bet kuri pjūvio simetrijos ašis yra ne tik centrinė (žr. 7.3 poskyrį), bet ir svarbiausioji.

2. Pasukus koordinatinių ašių sistemą 90^o kampu, išcentrinis inercijos momentas pakeičia ženklą, bet jo skaitinė reikšmė lieka tokia pati (ši savybė gaunama į (7.11) trečiąją lygtį įstačius kampą $\alpha + 90^0$).

3. Valcuoto plieno kampuočio išcentriniam inercijos momentui skaičiuoti paprastai naudojama formulė, pritaikyta prie sortimento lentelių: $I_{xy} = \pm(I^* - I_{min})tg\alpha_0$, čia I^* – didesnysis iš ašinių inercijos momentų (I_x arba I_y); ženklas nustatomas pagal "ploto" taisyklę: jeigu pjūvio ploto yra daugiau teigiamuose koordinatinių ašių kvadratuose, tai $I_{xy} > 0$, jeigu neigiamuose, tai $I_{xy} < 0$ (7.11 pav.).



7.10 pav.



7.11 pav.

7.7. Inercijos spindulys ir atsparumo momentas

■ Aptarsime dar kelis pjūvio geometrinius rodiklius, naudojamus skaičiuojant įvairias konstrukcijas. Jie yra gaunami iš pagrindinių pjūvio geometrinių rodiklių (7.1-7.5).

■ Ašinį inercijos momentą dažnai patogu išreikšti pjūvio ploto ir tam tikros atkarpos kvadrato sandauga; pvz.:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = A \cdot i_x^2.$$

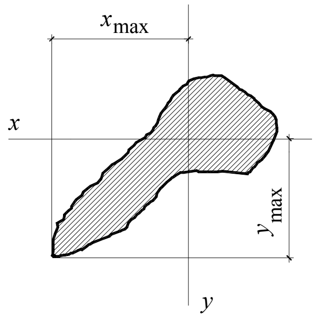
Atkarpa i_x vadinama pjūvio inercijos spinduliu x ašies atžvilgiu:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}. \qquad (7.18)$$

Analogiškai:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}.$$

■ Padaliję pjūvio ašinį inercijos momentą iš toliausiai nuo atitinkamos ašies esančio taško koordinatės, paimtos absoliutiniu didumu, gausime dar vieną pjūvio geometrinį rodiklį – atsparumo momentą (7.12 pav.). Koordinatinių ašių x ir y atžvilgiu atsparumo momentų išraiškos turės tokį pavidalą:



7.12 pav.

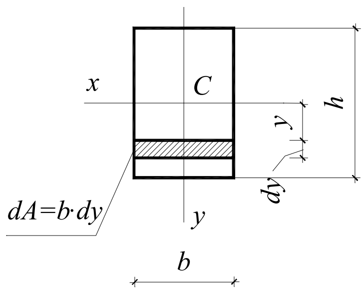
$$\left.\begin{aligned} W_x &= \frac{I_x}{|y|_{max}}, \\ W_y &= \frac{I_y}{|x|_{max}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.19)$$

7.5 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

7.8. Elementariųjų figūrų centriniai inercijos momentai

7.2 tekstas ⌘ ⌘ ⌘

■ *Stačiakampis* (7.13 pav.). Išskirkime elementarųjį plotelį $dA = b \cdot dy$. Įrašykime gautą išraišką į ašinio inercijos momento integralinę išraišką (7.3, pirmas integralas):



7.13 pav.

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = b\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} - (-\frac{h^3}{8})\right) = \frac{b \cdot h^3}{12}. \qquad (7.20)$$

Analogiškai gauname, kad

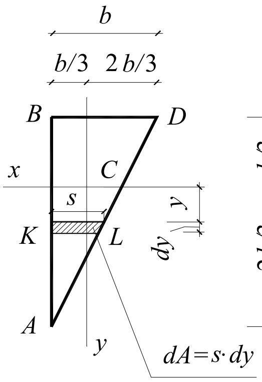
$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \qquad (7.21)$$

Stačiakampis turi dvi simetrijos ašis, taigi

$$I_{xy} = 0. \qquad (7.22)$$

7.6 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

■ *Trikampis.* Pirmiausia skaičiuosime ašinį inercijos momentą x ašies atžvilgiu (7.14 pav.). Išskirkime elementarųjį plotelį $dA = s \cdot dy$. Iš trikampių ABD ir AKL panašumo gauname, kad $s = \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right)$. Tada $dA = \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right)dy$. Įrašykime gautą elementariojo plotelio išraišką į ašinio inercijos momento integralinę išraišką (7.3, pirmas integralas):



7.14 pav.

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right)dy =$$

$$= \frac{b}{h}\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{2}{3}h \cdot y^2 - y^3\right)dy = \frac{b}{h}\left(\frac{2}{9}h \cdot y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{2}{3}h} =$$

$$= \frac{b}{h}\left(\frac{2}{9}h\frac{8}{27}h^3 - \frac{1}{4}\frac{16}{81}h^4 - \left(-\frac{2}{9}h\frac{1}{27}h^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{87}h^4\right)\right) =$$

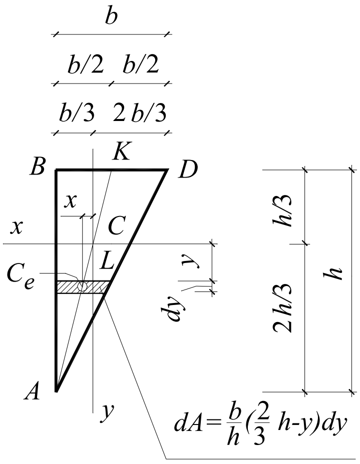
$$= \frac{b}{h}\left(\frac{16}{243}h^4 - \frac{16}{324}h^4 + \frac{2}{243}h^4 + \frac{1}{324}h^4\right) = \frac{b}{h}\cdot\frac{27}{972}h^4 =$$

$$= \frac{b \cdot h^3}{36}. \qquad (7.23)$$

Analogiškai gauname, kad

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}. \qquad (7.24)$$

Skaičiuodami išcentrinį inercijos momentą, taip pat išskirkime elementarųjį plotelį $dA = \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right)$ (7.15 pav.). Jo svorio centro c_e koordinates x ir y susiesime geometriniais ryšiais pasinaudoję trikampių ABK ir CC_eL panašumu: $x = \frac{b}{2h}y$. Įrašykime gautas elementariojo plotelio ir jo svorio centro koordinatės x išraiškas į integralą (7.4):



7.15 pav.

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = \int_{-h/3}^{2h/3} \frac{b}{2h}y \cdot y \cdot \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right)dy =$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\int_{-h/3}^{2h/3}\left(\frac{2}{3}hy^2 - y^3\right)dy = \frac{b^2}{2h^2}\left(\frac{2}{9}h \cdot y^3 - \frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{2}{3}h} =$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\left(\frac{2}{9}h\frac{8}{27}h^3 - \frac{1}{4}\frac{16}{81}h^4 - \left(-\frac{2}{9}h\frac{8}{27}h^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{81}h^4\right)\right) =$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\left(\frac{16}{243}h^4 - \frac{16}{324}h^4 + \frac{2}{243}h^4 + \frac{1}{324}h^4\right) = \frac{b^2}{2h^2}\cdot\frac{27}{972}h^4 =$$

$$= \frac{b^2 \cdot h^2}{72}. \qquad (7.25)$$

7.7 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

■ *Skritulys* (7.16 pav.). Išskirkime elementarųjį žiedą, kurio plotas $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$. Įrašykime gautą išraišką į integralą (7.5):

$$I_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^r 2\pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho = 2\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^r = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

arba

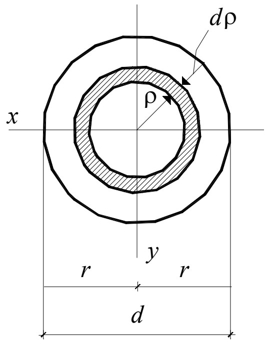
$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \qquad (7.26)$$

Prisiminkime, kad $I_p = I_x + I_y$, taigi

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \qquad (7.27)$$

Skritulys turi be galo daug simetrijos ašių, taigi

$$I_{xy} = 0. \qquad (7.28)$$



7.16 pav.

7.8 pvz., 7.1 lentelė

7.9. Sudėtingo skerspjūvio geometrinių rodiklių skaičiavimo algoritmas

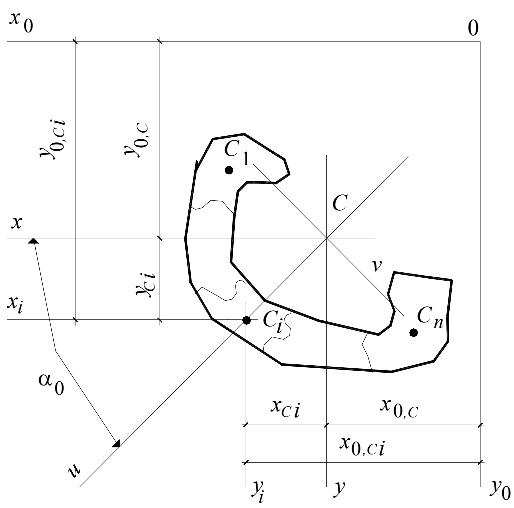
■ Tarkime, turime skerspjūvį, suskaidytą į *n* elementariųjų figūrų (*i*=1,2,...,*n*), (7.17 pav.).

Pirmiausia pasirenkamos pagalbinės ašys x_0, y_0 ir jų atžvilgiu nustatomos skerspjūvio svorio centro koordinatės:

$$\left.\begin{aligned} x_{0,c} &= \frac{S_{y0}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{0,ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \\ y_{0,c} &= \frac{S_{x0}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{0,ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.29)$$

Gautos koordinatės tikrinamos:

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \sum A_i \cdot y_{ci} = 0, \\ S_y &= \sum A_i \cdot x_{ci} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.30)$$



7.17 pav.

Centriniai inercijos momentai skaičiuojami naudojant (7.9) formules:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum_{i=1}^{n} (I_{xi,i} + A_i \cdot y_{ci}^2), \\ I_y &= \sum_{i=1}^{n} (I_{yi,i} + A_i \cdot x_{ci}^2), \\ I_{xy} &= \sum_{i=1}^{n} (I_{xiyi,i} + A_i \cdot x_{ci} \cdot y_{ci}). \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

Jeigu skerspjūvis neturi bent vienos simetrijos ašies, tai, naudojant formulę (7.15), nustatomas svarbiausiųjų ašių pasisukimo kampas α_0, ir, naudojant formules (7.16), – svarbiausieji inercijos momentai I_u, I_v. Skaičiavimai patikrinami: $I_x + I_y = I_u + I_v = \text{const}$. Pagaliau skaičiuojamos labiausiai nuo u ir v ašių nutolusių taškų koordinatės (7.10) ir skerspjūvio atsparumo momentai (7.19).

7.9 pvz. ⌘⌘⌘

Kontroliniai klausimai

7.1. *Kaip apibrėžiama plokščiųjų figūrų (pjūvių) geometrinių rodiklių sąvoka?*
7.2. *Užrašykite pjūvio statinių momentų integralines išraiškas. Brėžinys.*
7.3. *Užrašykite pjūvio ašinių inercijos momentų integralines išraiškas. Brėžinys.*
7.4. *Užrašykite pjūvio išcentrinio inercijos momento integralinę išraišką. Brėžinys.*
7.5. *Užrašykite pjūvio polinio inercijos momento integralinę išraišką. Brėžinys.*
7.6. *Koks yra pjūvio polinio ir ašinių inercijos momentų ryšys, kai polius sutampa su stačiakampės koordinačių sistemos pradžia? Brėžinys.*
7.7. *Kokios ašys vadinamos centrinėmis?*
7.8. *Ką teigia atstojamosios momento (Varinjono) teorema? Kaip ji pritaikoma pjūvio svorio centro padėčiai nustatyti? Brėžinys.*
7.9. *Užrašykite pjūvio svorio centro koordinačių skaičiavimo formules.*
7.10. *Kam lygus pjūvio statinis momentas simetrijos ašies atžvilgiu?*
7.11. *Kokios ašys vadinamos svarbiausiosiomis?*
7.12. *Paaiškinkite formules (brėžinys).*

$$I_{x\alpha} = I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \sin^2\alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$I_{y\alpha} = I_x \cdot \sin^2\alpha + I_y \cdot \cos^2\alpha + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha.$$

7.13. *Ką teigia pjūvio ašinių inercijos momentų invariantiškumo dėsnis? Formulė, brėžinys.*
7.14. *Paaiškinkite formulę:*

$$tg 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{Ix - Iy}.$$

7.15. *Paaiškinkite formules:*

$$I_u = I_x \cdot \cos^2\alpha_0 + I_y \cdot \sin^2\alpha_0 - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0,$$

$$I_v = I_x \cdot \sin^2\alpha_0 + I_y \cdot \cos^2\alpha_0 + I_{xy} \cdot \sin 2\alpha_0.$$

7.16. *Kam lygus pjūvio išcentrinis inercijos momentas svarbiausiųjų ašių atžvilgiu?*
7.17. *Kaip nustatomas pjūvio išcentrinio inercijos momento ženklas? Brėžinys.*
7.18. *Jeigu pjūvio ašiniai inercijos momentai simetrijos ašių atžvilgiu yra vienodi, tai kokios ašys yra svarbiausiosios?*
7.19. *Kaip skaičiuojami pjūvio ašiniai ir išcentrinis inercijos momentai ašių, lygiagrečių centrinėms jo ašims, atžvilgiu? Brėžinys.*
7.20. *Užrašykite pjūvio inercijos spindulių formules.*
7.21. *Užrašykite pjūvio atsparumo momentų formules.*
7.22. *Kuriam tikslui naudojamos šios formulės?*
7.23. *Kaip apibrėžiama elementariosios figūros sąvoka?*
7.24. *Kam lygūs stačiakampio ploto inercijos momentai savųjų centrinių ašių atžvilgiu? Brėžinys, formulės.*
7.25. *Kam lygūs trikampio inercijos momentai savųjų centrinių ašių atžvilgiu? Brėžinys, formulės.*
7.26. *Kam lygūs skritulio inercijos momentai savųjų centrinių ašių atžvilgiu? Brėžinys, formulės.*
7.27. *Paaiškinkite formules.*

$$x_{0,c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_{0,ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}, \quad y_{0,c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_{0,ci}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}.$$

7.28. *Paaiškinkite formulę:*

$$I_x = \sum_{i=1}^{n}(I_{xi,i} + A_i \cdot y_{ci}^2).$$