# 4. Tempimas ir gniuždymas

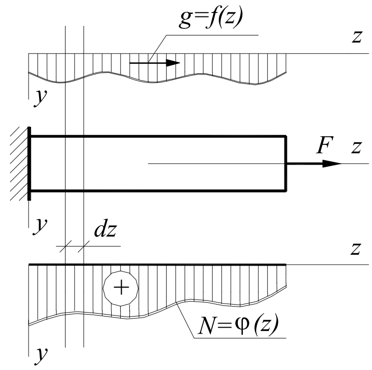
## 4.1. Bendrosios žinios

■ Tempimas-gniuždymas yra deformavimo tipas, apibūdinamas strypo ilgio pasikeitimu nuo ašinės jėgos (žr. 3.9 poskyrį). Kai $N > 0$, yra tempimas, kai $N < 0$, yra gniuždymas.

Tiek tempimas, tiek gniuždymas matematiškai nagrinėjami vienodai, t.y. visi strypo įtemptąją ir deformuotąją būseną apibūdinantys dydžiai (ašinės jėgos, normaliniai įtempimai, skerspjūvių poslinkiai ir linijinės deformacijos) tarpusavyje susiejami tomis pačiomis formulėmis. Kitaip sakant, į gniuždymą žiūrima kaip į neigiamą tempimą. Tuo tarpu fiziniu požiūriu tempimo ir gniuždymo poveikiai skiriasi, ypač kai prasideda plastinių deformacijų kaupimosi procesas arba irimas. Be to, visada reikia atsiminti, kad pakankamai ilgi gniuždomi strypai gali prarasti pirminę pusiausvyros formą. Šiame skyriuje į gniuždomų strypų stabilumą neatsižvelgiama; laikoma, kad jie pakankamai stabilūs.

## 4.2. Ašinės jėgos ir apkrovos ryšys

■ Bendruoju atveju tiek strypą (jo ruožą) veikianti išskirstytoji apkrova, tiek atsiradusi strype ašinė jėga yra aplikatės funkcijos (4.1 pav.). Šių tolydinių funkcijų ryšį nustatysime nagrinėdami strypo elementariojo elemento pusiausvyrą. Laikysime, kad nykstamai trumpame ruože $dz$ išskirstytoji apkrova yra pastovi (4.2 pav.):



4.1 pav.

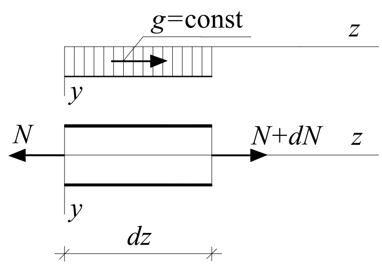
$$\sum F_z = 0;$$

$$-N + g \cdot dz + (N + dN) = 0,$$

$$\frac{dN}{dz} = -g \qquad (4.1)$$

arba

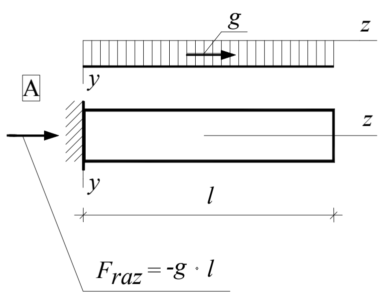
$$N = -\int g \cdot dz + C. \qquad (4.2)$$



4.2 pav.

Integravimo konstanta $C$ – ruožo pradinio skerspjūvio ašinė jėga – nustatoma iš kraštinių sąlygų. Pvz., 4.3 pav. pateiktam strypui ji yra lygi atraminės reakcijos komponentui ( $C = N_0 = -F_{raz} = g \cdot l$).

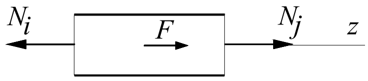
Lygtis (4.2) rodo, kad ašinių jėgų kitimas strypo ruožo ilgyje priklauso nuo išskirstytosios apkrovos. Aptarsime du dažniausiai pasitaikančius atvejus: a) strypo ruožas neapkrautas ( $g = 0$ ), tada $N = N_0 = \text{const}$ (ruože ašinė jėga yra pastovi); b) strypo ruožas apkrautas vienodai išskirstyta apkrova ( $g = \text{const}$ ), tada $N = -g \cdot z + N_0$ (ruože ašinė jėga kinta tiesiškai).



4.3 pav.

4.1, 4.2, 4.3 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

■ Lygtys (4.1) ir (4.2) galioja tik ruožams, kuriuose išskirstytoji apkrova (kartu ir ašinė jėga) kinta tolydiškai. Tokius ruožus vieną nuo kito skiria skerspjūviai, kuriuose keičiasi išskirstytosios apkrovos kitimo dėsnis, taip pat mazgai, kuriuose yra pridėta jėga. Pereinanti per mazgą, kuriame veikia jėga, ašinė jėga pasikeičia didumu, lygiu mazge veikiančios jėgos didumui. Ši išvada gaunama, nagrinėjant mazgo pusiausvyrą (4.4 pav.):




4.4 pav.

$$\Sigma F_z = 0\,;$$
$$-N_i + F + N_j = 0,$$
$$F = N_i - N_j\,. \qquad (4.3)$$

4.4 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

■ Dabar yra pakankamai teorinių žinių, kad būtų galima sudaryti bet kaip apkrauto strypo ašinių jėgų diagramą, t.y. funkcijos $N = f(g,\, F)$ grafiką, vaizduojantį ašinių jėgų kitimą išilgai strypo ašies. Tokia diagrama leidžia projektuotojui įvertinti apkrovos įtaką strypui, nustatyti labiausiai apkrautas jo vietas. Dažniausiai naudojamas toks ašinių jėgų diagramos sudarymo algoritmas (žr. 3.3 poskyrį):

1) sužymimi skaičiuojamieji skerspjūviai (ties atramomis ir laisvaisiais strypų galais, iš abiejų jėgos pridėties taško pusių ir ties išskirstytos apkrovos pradžios ir pabaigos taškais);

2) pjūvio metodu apskaičiuojamos ašinės jėgos (ašinė jėga savo skaitine reikšme lygi visų išorinių jėgų, veikiančių tą strypo dalį, kuriai nepriklauso nagrinėjamas skerspjūvis, projekcijų į strypo ašį sumai; jei išorinės jėgos projekcija strypą ties nagrinėjamu skerspjūviu tempia, tai ji sumuojama su pliuso ženklu, jei gniuždo – su minuso ženklu);

3) apskaičiuotos ašinės jėgos reikšmės pasirinktu masteliu atidedamos strypo ašyje;

4) gauti atkarpų galai sujungiami, remiantis ašinės jėgos ir išskirstytosios apkrovos integraliniu ryšiu (žr. 4.2 formulę);

5) diagrama užbrūkšniuojama ir užrašomas mastelis (skaičius, rodantis kiek ašinės jėgos vienetų atidėta brėžinio ilgio vienete, pvz., 5 kN/cm);

6) sudaryta diagrama patikrinama.

4.5 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

■ Ašinių jėgų diagramos sudarymas, kai žinoma strypą veikianti apkrova, yra vienas iš pagrindinių inžinieriaus uždavinių, nes, nežinant ašinių jėgų, negalima nustatyti kitų įtemptąją ir deformuotąją strypo būseną apibūdinančių dydžių. Tačiau kartais tenka spręsti atvirkštinį uždavinį: žinant ašinių jėgų diagramą, sudaryti strypo apkrovimo schemą. Tai padaryti nėra sunku, nes pasinaudojus (4.1) formule visada galima gauti ruožuose veikiančias išskirstytąsias apkrovas, o pasinaudojus (4.3) formule – mazguose veikiančias jėgas.

*Pastaba*. Kai ruože veikiančios ašinės jėgos analitinė išraiška yra nežinoma, išskirstytąsias apkrovas patogu nustatyti grafiniu-analitiniu būdu (prisiminkime, kad funkcijos išvestinės reikšmė, apskaičiuota fiksuotame kreivės taške, lygi šiame taške išbrėžtos liestinės krypties koeficientui).

4.1 tekstas, 4.5 pav., 4.4 lygtis, 4.6 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

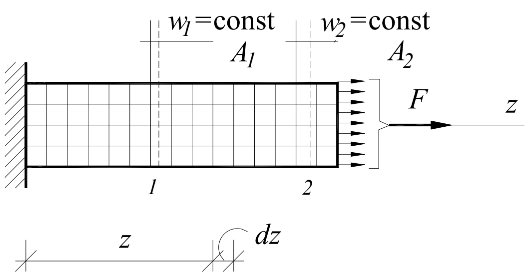
## 4.3. Normaliniai įtempimai

■ Normalinių įtempimų paskirstymo tempiamo-gniuždomo strypo skerspjūvyje formulę išvesime naudodamiesi 3.8 poskyryje aptarta metodika.

S t a t i k o s   i n t e g r a l i n ė   l y g t i s:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA. \qquad (4.5)$$

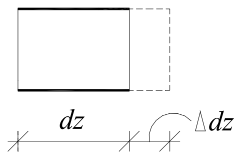
G e o m e t r i n ė   l y g t i s . Eksperimentiškai nustatyta, kad tempiant (gniuždant) strypą, skerspjūviai pasislenka lygiagrečiai savo pradinėms padėtims, t.y. visi bet kurio skerspjūvio kontūriniai taškų poslinkiai yra tarpusavyje lygūs (4.6 pav.). Atsižvelgiant į Bernulio hipotezę galima teigti, kad tarpusavyje lygūs ir vidinių to paties skerspjūvio taškų poslinkiai. Taigi visi bet kurio skerspjūvio taškų poslinkiai tarpusavyje yra lygūs $(\underset{A}{w = const})$.




4.6 pav.

Jei bet kurio skerspjūvio visi taškų poslinkiai tarpusavyje lygūs, tai visi ilgio $dz$ elemento sluoksniai pailgėja (sutrumpėja) vienodai (dydžiu $\Delta dz$, 4.7 pav.). Kadangi $\Delta dz / dz = \varepsilon$, gauname, kad ir visų sluoksnių deformacijos tarpusavyje yra lygios:

$$\varepsilon \underset{A}{=} \text{const.} \tag{4.6}$$




4.7 pav.

F i z i n ė   l y g t i s :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon . \tag{4.7}$$

L y g č i ų   s i s t e m o s   s p r e n d i m a s . Tarkime, kad medžiaga vienalytė ($E = \text{const}$). Tada, panaudoję geometrinę lygtį (4.6), iš fizinės lygties (4.7) gauname, kad $\sigma = \text{const}$. Taigi

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A ,$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \tag{4.8}$$

Lygtis (4.8) rodo, kad tempiamo-gniuždomo strypo skerspjūvyje visų taškų normaliniai įtempimai yra vienodi ir lygūs tame skerspjūvyje veikiančios ašinės jėgos ir skerspjūvio ploto santykiui.

■ Bendruoju atveju normalinių įtempimų diagrama yra grafikas, vaizduojantis normalinių įtempimų kitimą strypo skerspjūvyje ($\sigma = f(x, y)$). Tačiau tempiamo-gniuždomo strypo skerspjūvyje normaliniai įtempimai yra pastovūs, todėl, nagrinėjant tokius strypus, dažniau yra sudaroma diagrama, vaizduojanti normalinių įtempimų kitimą ne strypo skerspjūvyje, bet išilgai jo ašies ($\sigma = f(z)$). Ji parodo labiausiai pažeidžiamas strypo vietas, leidžia nustatyti pavojingus skerspjūvius. Kiekviena šios diagramos ordinatė gaunama dalijant atitinkamą ašinę jėgą iš nagrinėjamo skerspjūvio ploto, todėl, sudarant tempiamų-gniuždomų strypų skaičiuojamąsias schemas (jeigu ruošiamasi sudaryti normalinių įtempimų diagramą), reikia papildomai įvesti skaičiuojamuosius skerspjūvius tuose strypo mazguose, kuriuose šuoliškai keičiasi skerspjūvio plotas.

$\boxed{\text{4.7 pvz.}}$ ⌘ ⌘ ⌘

## 4.4. Linijinės deformacijos ir mazgų poslinkiai

■ Kai strypas yra tempiamas (gniuždomas), keičiasi vien jo matmenys (forma lieka nepakitusi). Taigi kampinės deformacijos yra lygios nuliui, o linijinės − priklauso nuo normalinių įtempimų. Jei strypo medžiaga deformuojasi tampriai, ši priklausomybė ašinės jėgos veikimo kryptimi turi tokį pavidalą (prisiminkime Huko dėsnį):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} . \tag{4.9}$$

Pasinaudojus (4.8) formule, linijinę deformaciją galima išreikšti per ašinę jėgą:

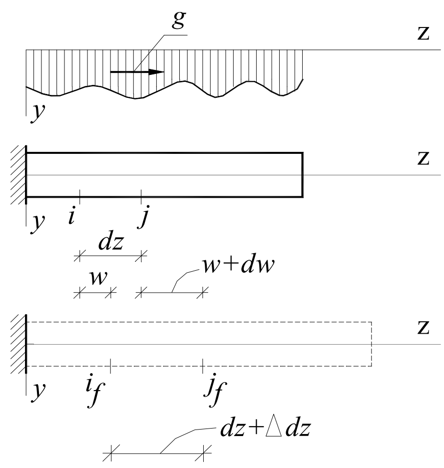
$$\varepsilon = \frac{N}{E \cdot A}. \tag{4.10}$$

Tamprumo modulio ir skerspjūvio ploto sandauga ($E \cdot A$) vadinama tempiamo-gniuždomo strypo standžiu. Jis kiekybiškai įvertina strypo sugebėjimą priešintis deformuojamam apkrovų poveikiui.

■ Strypui deformuojantis, pasikeičia jo skerspjūvių padėtis, t.y. skerspjūviai pasislenka. Linijinės deformacijos ir skerspjūvio poslinkio ryšį nustatysime nagrinėdami 4.8 pav. pateikto strypo dviejų skerspjūvių ($i$ ir $j$) poslinkius. Laikysime, kad atstumas tarp jų yra nykstamai mažas ($dz$).

Veikiant apkrovai, strypas pailgės ir nagrinėjami skerspjūviai užims naujas padėtis : skerspjūvio $i$ poslinkis bus $w$, skerspjūvio $j$ – $w + dw$. Pasikeis ir atstumas tarp skerspjūvių: dabar jis bus lygus $dz + \Delta dz$. Užrašykime atstumą tarp skerspjūvių $i$ ir $j_f$ dviem būdais ir gautas išraiškas sulyginkime: $w + dz + \Delta dz = dz + w + dw$. Gauname, kad $\Delta dz = dw$. Bet elemento $dz$ pailgėjimas lygus $\varepsilon \cdot dz$, taigi $\varepsilon \cdot dz = dw$ arba

$$\frac{dw}{dz} = \varepsilon. \tag{4.11}$$



4.8 pav.

4.2 tekstas ⌘ ⌘ ⌘

■ Iš lygties (4.11) išreikškime poslinkį:

$$w = \int \varepsilon \cdot dz + w_0 . \tag{4.12}$$

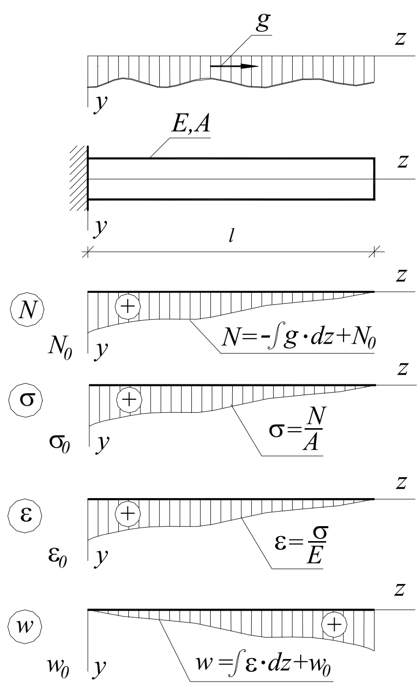
Čia $w_0$ – integravimo konstanta, lygi ruožo pradinio skerspjūvio poslinkiui.

Panaudojus Huko dėsnį ir normalinių įtempimų formulę, nesunku poslinkį išreikšti per įtempimą ir ašinę jėgą:

$$w = \int \frac{\sigma}{A} dz + w_0 , \tag{4.13}$$

$$w = \int \frac{\sigma}{E \cdot A} dz + w_0 . \tag{4.14}$$

■ Taigi tarp visų tempiamo-gniuždomo strypo įtemptąją ir deformuotąją būseną apibūdinančių dydžių yra tam tikras ryšys. Naudojantis atitinkamomis formulėmis (4.2, 4.8, 4.9, 4.12), galima sudaryti ir ašinių jėgų, ir normalinių įtempimų, ir linijinių deformacijų, ir skerspjūvių poslinkių diagramas (4.9 pav.). Tačiau visais atvejais diagramų forma (dydžių kitimo dėsningumai) priklauso nuo išskirstytosios apkrovos. Anksčiau buvo aptartas išskirstytosios apkrovos ir ašinės jėgos ryšys (normalinių įtempimų ir linijinių deformacijų diagramos yra proporcingos ašinių jėgų diagramai). Dabar



4.9 pav.

aptarsime išskirstytosios apkrovos ir skerspjūvio poslinkio ryšį. Nagrinėsime du dažniausiai pasitaikančius atvejus: $g$=0 ir $g$=const. Pirmuoju atveju skerspjūvio poslinkis kinta tiesiškai, nes, kai ruožas neapkrautas – $N = N_0 = const,$ $w = \frac{N_0}{E \cdot A} z + w_0$. Antruoju atveju skerspjūvio poslinkis kinta kvadratiniu dėsniu, nes kai ruože veikia vienodai išskirstyta apkrova – $N = -g \cdot z + N_0$, $w = -\frac{g}{2E \cdot A} z^2 + \frac{N_0}{E \cdot A} z + w_0$.

■ Nesunku pastebėti, kad ruožo ilgio pokytis lygus jo galinių skerspjūvių poslinkiui vienas kito atžvilgiu (4.9 pav.). Taigi $\Delta l = w - w_0 = \int \frac{N}{E \cdot A} dz + w_0 - w_0$,

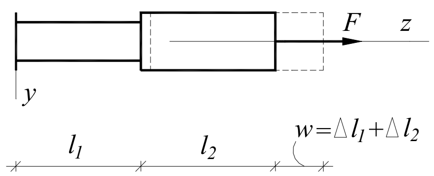
$$\Delta l = \int_l \frac{N}{E \cdot A} dz. \tag{4.15}$$

Čia $l$ – ruožo ilgis.

Jei ruože veikia pastovi ašinė jėga ($N$=const), jei jis pagamintas iš vientisos vienalytės medžiagos ($E$=const) ir jei jis yra pastovaus skerspjūvio ($A$=const), tai

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \tag{4.16}$$

■ Skerspjūvių poslinkių diagrama yra grafikas, vaizduojantis naujas (deformuoto strypo) skerspjūvių padėtis. Sudarant skerspjūvių poslinkių diagramą, pirmiausia skaičiuojami ruožų ilgių pokyčiai, nes bet kurio skerspjūvio poslinkio didumas priklauso nuo to, kiek pakito ilgiai tų strypo ruožų, kurie yra tarp nagrinėjamo skerspjūvio ir koordinačių sistemos pradžios taško (paprastai jis sutapdinamas su atraminiu skerspjūviu; žr. 4.10 pav.). Pasitelkiamos (4.15) arba (4.16) formulės. Suskaičiavus ruožų ilgių pokyčius, skaičiuojami skaičiuojamųjų skerspjūvių poslinkiai. Naudojamasi formule:

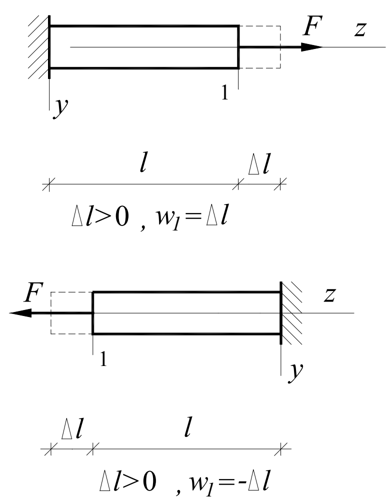



4.10 pav.

$$w = \pm \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i ; \tag{4.17}$$

čia $n$ – ruožų, esančių tarp nagrinėjamo skaičiuojamojo skerspjūvio ir atraminio skerspjūvio, skaičius.

Ženklas prieš sumos simbolį priklauso nuo strypo padėties koordinačių sistemos atžvilgiu. Jeigu nagrinėjamas skerspjūvis koordinatinių ašių susikirtimo taško atžvilgiu yra teigiamoje pusėje, tai teigiamas ilgio pokytis sukelia teigiamą poslinkį (skerspjūvis juda teigiama koordinatinės ašies kryptimi) ir todėl prieš sumos simbolį reikia rašyti pliuso ženklą; jeigu nagrinėjamas skerspjūvis koordinatinių ašių susikirtimo taško atžvilgiu yra neigiamoje pusėje, tai teigiamas ilgio pokytis sukelia neigiamą poslinkį (skerspjūvis juda neigiama koordinatinės ašies kryptimi) ir todėl prieš sumos simbolį reikia rašyti minuso ženklą (4.11 pav.).




4.11 pav.

4.8 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

*Pastaba*. Šiame poskyryje buvo kalbama tik apie linijinių tempiamų-gniuždomų konstrukcijų skerspjūvių poslinkius. Plokščiųjų ir erdvinių tempiamų-gniuždomų konstrukcijų mazgų poslinkiai nustatomi sudėtingai. Apie tai bus kalbama 4.9 poskyryje.

## 4.5. Išilginės ir skersinės deformacijos

■ Nesunku pastebėti, kad tempiant strypą jo matmenys skersine kryptimi mažėja, o gniuždant – didėja. Bandymais nustatyta, kad tamprumo ribose tarp skersinės ir išilginės deformacijų yra tiesinis ryšys:

$$\varepsilon_q = -\nu \cdot \varepsilon . \qquad (4.18)$$

Proporcingumo koeficientas $\nu$ ($\nu = \left|\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}\right|$) priklauso nuo medžiagos savybių. Jis vadinamas skersinės deformacijos, arba Puasono koeficientu. Įvairioms medžiagoms jo reikšmė svyruoja nuo nulio iki pusės (pvz., betono – 0,17, plieno – 0,25, švino – 0,45, kaučiuko – 0,47).

4.9 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

## 4.6. Temperatūrinės deformacijos

■ Visų anksčiau nagrinėtų deformacijų priežastis buvo mechaninis poveikis. Nesunku pastebėti, kad kūno matmenys keičiasi ir nuo temperatūros. Bandymais nustatyta, kad tarp deformacijos ir temperatūros pokyčio yra tiesinė priklausomybė:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta t . \qquad (4.19)$$

Čia $\alpha$ – šiluminio plėtimosi koeficientas. Jis priklauso nuo medžiagos fizinių savybių ir nustatomas eksperimentiškai.

*Pastaba.* Temperatūrinės deformacijos labai svarbios statiškai neišsprendžiamoms konstrukcijoms, nes gali sukelti didelius įrąžų persiskirstymus.

4.10 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

## 4.7. Įtempimai įstrižuose pjūviuose

■ Iš 4.3 poskyrio gali susidaryti įspūdis, kad tempiamame-gniuždomame strype veikia tik normaliniai įtempimai. Iš tikrųjų taip nėra. Tik normaliniai įtempimai veikia skerspjūviuose, o kituose pjūviuose veikia ir normaliniai, ir tangentiniai įtempimai.

■ Dviem pjūviais – įstrižu ir statmenu tempiamo-gniuždomo strypo ašiai – išskirkime elementą ir panagrinėkime jo pusiausvyrą (4.12 pav.). Prisiminkime, kad pusiausvyros lygtys susieja ne įtempimus, bet jėgas; mūsų atveju – įtempimų atstojamąsias. Kadangi visi šie įtempimai pjūviuose pasiskirsto tolygiai, tai minėtos atstojamosios yra lygios atitinkamų įtempimų ir pjūvių plotų sandaugai (žr. 4.12*d* pav.).

Užrašykime nagrinėjamo elemento pusiausvyros lygtis:

$$\Sigma F_n = 0;$$

$$\sigma_\alpha \cdot A_\alpha - \sigma \cdot A \cdot \cos\alpha = 0,$$

$$\sigma_\alpha = \sigma \frac{A}{A_\alpha} \cos\alpha = \sigma \frac{A}{A} \cos\alpha \cdot \cos\alpha,$$

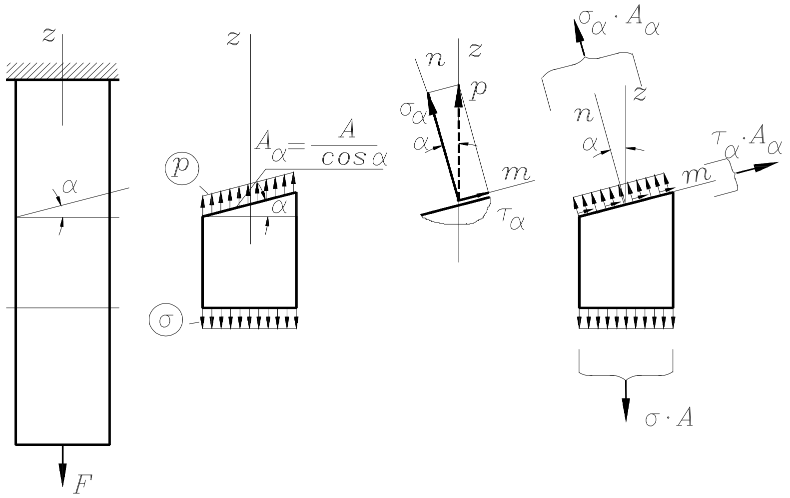
$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha. \tag{4.20}$$

$$\Sigma F_m = 0;$$

$$\tau_\alpha \cdot A_\alpha - \sigma \cdot A \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$\tau_\alpha = \sigma \frac{A}{A_\alpha} \sin\alpha = \sigma \frac{A}{A} \sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \tag{4.21}$$




4.12 pav.

Pjūvyje, kurio normalė sudaro kampą $\beta = \alpha + 90^0$ su strypo ašimi, t.y. pjūvyje, statmename nagrinėjamajam, veiks tokie įtempimai:

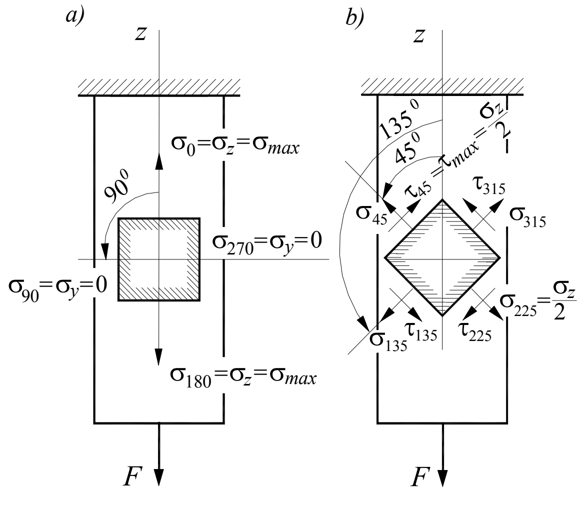
$$\sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2\alpha, \tag{4.22}$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \tag{4.23}$$

■ Pasinaudojus gautomis formulėmis, galima padaryti tris svarbias išvadas (4.13pav.):

1) didžiausi normaliniai įtempimai veikia skerspjūvyje ($\alpha = 0$, $\sigma_0 = \sigma_z = \frac{N}{A} = \sigma_{\max}$);

2) didžiausi tangentiniai įtempimai veikia pjūviuose, sudarančiuose $45^o$ kampą su skerspjūvio plokštuma ($\alpha = 45^0$, $\tau_{45} = \frac{\sigma_z}{2} = \tau_{\max}$);




4.13 pav.

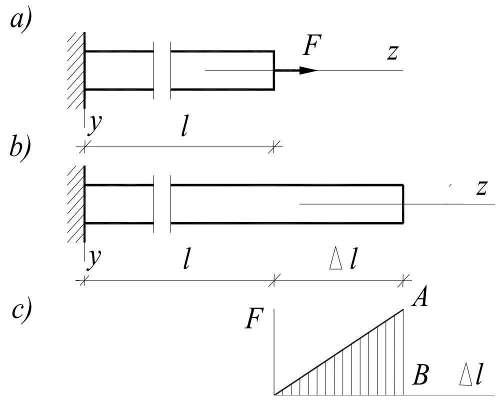
3) išilginiuose pjūviuose neveikia jokie įtempimai ($\alpha = 90^0$, $\sigma_{90} = 0$, $\tau_{90} = 0$); tai reiškia, kad išilginiai sluoksniai savo šoniniais paviršiais neveikia vienas kito, t.y. į tempiamą strypą galima žiūrėti kaip į pluoštą tarp savęs nesusijusių gijų.

4.11 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

## 4.8. Išorinių jėgų darbas. Potencinė deformavimo energija

■ Nustatysime darbą, kurį atlieka išorinės jėgos, deformuodamos tamprų tempiamą-gniuždomą strypą. Nagrinėsime strypą, kurį centriškai pridėta jėga, kisdama nuo nulio iki fiksuotos savo reikšmės, t.y. statinė jėga, ištempė dydžiui $\Delta l$ (4.14*a,b* pav.).

Nusibraižykime tempimo diagramą, t.y. grafiką, rodantį jėgos $F$ ir strypo ilgio pokyčio $\Delta l$ ryšį. Jeigu nagrinėjamas strypas ne tik tamprus, bet ir deformuojasi proporcingai (medžiagai galioja Huko dėsnis), tai tempimo diagrama bus tiesė (4.14*c* pav.). Iš fizikos žinome, kad darbas yra lygus jėgos ir jos nueito kelio sandaugai. Mūsų atveju jis yra lygus tempimo diagramos plotui (4.14*c* paveiksle šis plotas yra užbrūkšniuotas). Kadangi linija $OA$ yra tiesė, tai



4.14 pav.

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l. \qquad (4.24)$$

*Pastaba*. Nereikėtų pamiršti, kad ši formulė tinka tik tampriems tiesiškai besideformuojantiems strypams.

■ Išorinių jėgų darbas niekur nedingsta, jis susikaupia, akumuliuojasi deformuotame strype potencinės deformavimo energijos pavidalu. Būtent ši potencinė energija sugrąžina deformuotą strypą atgal į pirminę būseną, kai pašalinama deformavimo priežastis (tamprių kūnų savybė akumuliuoti energiją žinoma seniai; prisiminkime įvairius ginklus (akmenų svaidykles, lankus), mechaninius laikrodžius ir pan.). Nepaisant įvairių mažų nuostolių galima laikyti, kad visas išorinių jėgų darbas yra sunaudojamas sukaupti potencinei deformavimo energijai, t.y., kad

$$W = E_p. \qquad (4.25)$$

Tačiau nereikia pamiršti, kad (4.25) lygybė galioja tik tuo atveju, kai strypas yra idealiai tamprus. Kai to nėra, pvz., kai greta tampriosios deformacijos atsiranda ir plastinė, dalis deformavimo energijos pereina į šilumą, sunaudojamą medžiagos struktūrai pakeisti, ir tik dalis jos susikaupia potencinės energijos pavidalu.

■ Išreikškime potencinę deformavimo energiją per ašines jėgas. Tarkime, kad tempiamo-gniuždomo strypo ilgio $dz$ elementas, veikiamas ašinių jėgų, pailgėjo dydžiu $\Delta dz$ (4.15 pav.). Jeigu strypas idealiai tamprus, tai visas ašinių jėgų darbas, pereis į potencinę deformavimo energiją:

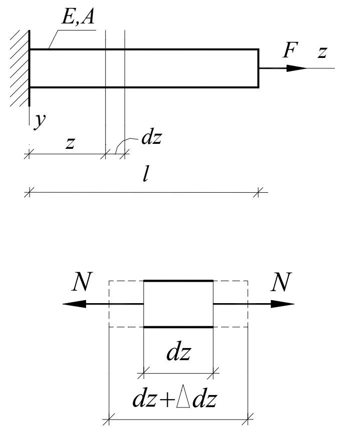
$$dW = \frac{1}{2} N \cdot \Delta dz = dE_p. \qquad (4.26)$$

Prisiminkime, kad $\Delta dz = \varepsilon \cdot dz$, $\varepsilon = \dfrac{N}{E \cdot A}$, taigi

$$dE_p = \frac{1}{2} N \cdot \Delta dz = \frac{N^2}{2E \cdot A} dz. \qquad (4.27)$$

Visame strype sukaupta potencinė deformavimo energija

$$E_p = \int_l \frac{N^2}{2E \cdot A} dz \,. \tag{4.28}$$




4.15 pav.

Jeigu strype veikia pastovi ašinė jėga ($N$=const), jeigu strypas pagamintas iš vienodos medžiagos ($E$=const) ir jeigu strypo skerspjūvis visame jo ilgyje yra vienodas ($A$=const), t.y. jeigu visame strypo ilgyje deformacija $\varepsilon = \text{const}$, tai

$$E_p = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot A} \,. \tag{4.29}$$

Kartais reikia žinoti santykinę potencinę deformavimo energiją, t.y. energijos dalį , tenkančią strypo tūrio vienetui. Strypo tūris lygus skerspjūvio ploto ir ilgio sandaugai ($V = A \cdot l$), taigi

$$e_p = \frac{E_p}{V} = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot A \cdot A \cdot l} = \frac{\sigma}{2E}$$

arba

$$e_p = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} \,. \tag{4.30}$$

4.3 tekstas, 4.12 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

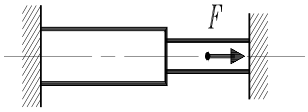
## 4.9. Tempiamos-gniuždomos konstrukcijos

■ Tempiama-gniuždoma konstrukcija susideda iš tempiamų-gniuždomų strypų (ruožų), kurie vienas su kitu, su absoliučiai standžiais elementais ir atramomis jungiasi galais. Strypų galų sujungimai vadinami mazgais (jungtimis). Mazgas turi būti toks, o apkrova prie jo turi būti pridėta taip, kad per jį į bet kurį strypą būtų perduodamas tik tempimo-gniuždymo poveikis (strypinė konstrukcija, kurios strypai ne tik tempiami-gniuždomi, bet ir kitaip deformuojami, pavyzdžiui, lenkiami, vadinama rėmu). Priklausomai nuo strypų išsidėstymo tempiamos-gniuždomos konstrukcijos gali būti:

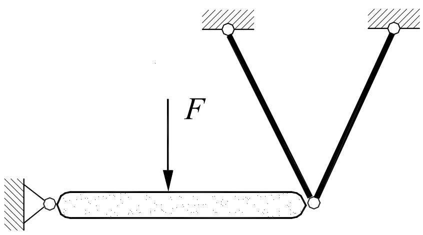
a) tiesinės (mazgai dažniausiai standūs ir išdėstyti vienoje tiesėje; apkrovos pridėtos šioje tiesėje ir veikia išilgai jos; 4.16 pav.);

b) plokščiosios (mazgai – cilindriniai šarnyrai, išdėstyti vienoje plokštumoje; apkrovos pridėtos tik mazguose; 4.17 pav.);

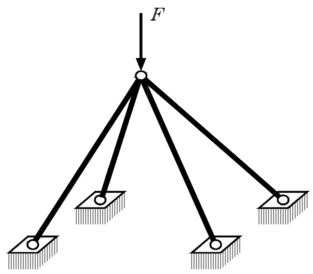
c) erdvinės (mazgai – rutuliniai šarnyrai, apkrovos pridėtos tik mazguose; 4.18 pav.).




4.16 pav.

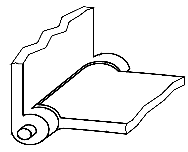



4.17 pav.

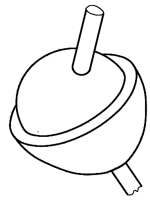



4.18 pav.

*Pastaba.* Šarnyras (lankstas, vyris) yra kelių strypų jungtis, leidžianti strypams suktis savo ašies (kai ji cilindrinė; 4.19 pav.) arba savo centro (kai ji rutulinė; 4.20 pav.) atžvilgiu. Nėra nei idealių šarnyrų (arčiausiai jų – šarnyrai su guoliais), nei absoliučiai standžių jungčių. Dažniausiai sudarant skaičiuojamąsias schemas remiamasi gyvenimo patirtimi, paremta eksperimentiniais duomenimis. Pavyzdžiui, santvarų mazgai, nors strypai juose jungiami varžtais, kniedėmis ar privirinami, laikomi šarnyrais. Tarus, kad mazgai yra absoliučiais standūs, skaičiavimų rezultatai skiriasi nežymiai. Tuo tarpu skaičiavimų apimtis (dėl atsiradusių lenkimo momentų) tampa ženkli.



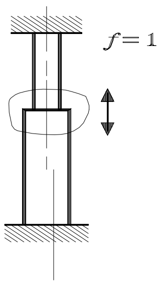
4.19 pav.



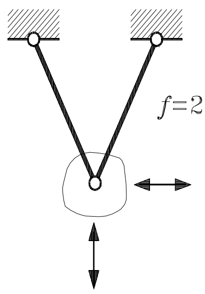
4.20 pav.

■ Tempiamos-gniuždomos konstrukcijos mazgai skirstomi į atraminius ir laisvuosius. Laisvaisiais vadinami mazgai, kurie deformuojantis konstrukcijai gali pasislinkti. Jie gali būti tiesiniai, plokštieji ir erdviniai. Mazgo priklausymą vienai iš šių grupių lemia jo laisvumo laipsnis $f$ – galimų mazgo poslinkio komponentų suma. Tiesinio laisvojo mazgo laisvumo laipsnis lygus vienam (naujai jo padėčiai nusakyti pakanka vieno parametro; 4.21 pav.), plokščiojo – dviem (naujai jo padėčiai nusakyti pakanka dviejų parametrų; 4.22 pav.), erdvinio – trim (naujai jo padėčiai nusakyti reikia trijų parametrų; 4.23 pav.). Atraminio mazgo laisvumo laipsnis dažniausiai lygus nuliui.

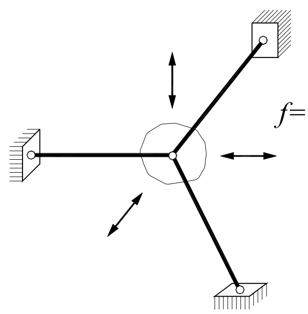
Jeigu konstrukcijoje yra absoliučiai standus elementas, tai įskaitomas ne atskirų mazgų, prijungtų




4.21 pav.



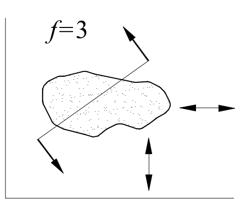

4.22 pav.



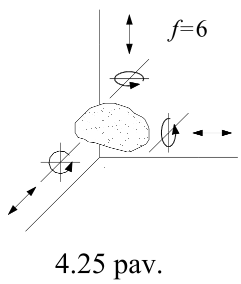

4.23 pav.

prie jo, laisvumas, bet paties absoliučiai standaus elemento laisvumas (jis laikomas vienu stambiu vientisu mazgu). Plokščiojoje konstrukcijoje jo laisvumo laipsnis lygus trim (4.24 pav.), erdvinėje – šešiems (4.25 pav.). Jeigu absoliučiai standus elementas pritvirtintas prie atramos, tai jo laisvumo laipsnis sumažėja tiek vienetų, kiek atraminių ryšių jis turi. Pavyzdžiui, 4.26 pav. pateiktas plokščiasis absoliučiai standus elementas turi du atraminius ryšius, taigi jo laisvumo laipsnis lygus vienam: jis tegali pasisukti atramos atžvilgiu.

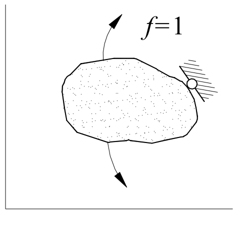
Sudarant skaičiuojamąsias schemas reikia siekti, kad visi deformuojami strypai, prijungti prie absoliučiai standaus elemento, nebūtų lygiagretūs vienai tiesei arba kad jų ašys nesusikirstų viename taške. Šiais atvejais konstrukcija tampa geometriškai nestabili. Pavyzdžiui, 4.27 pav. pateiktas plokščiasis absoliučiai standus elementas gali neapibrėžtai judėti horizontalia kryptimi, o 4.28 pav. pateiktas plokščiasis absoliučiai standus elementas – neapibrėžtai suktis atramos atžvilgiu.



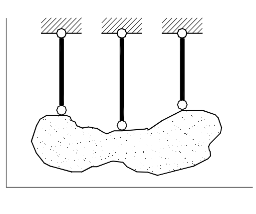

4.24 pav.



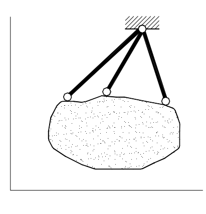

4.25 pav.




4.26 pav.

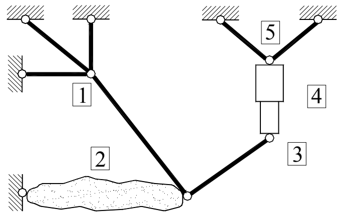


4.27 pav.



4.28 pav.

Jeigu konstrukcija turi $m$ laisvųjų mazgų, kurių kiekvieno laisvumo laipsnis $f_i$, tai jos mazgų laisvės laipsnių suma $p = \sum_{i=1}^{m} f_i$ . Kadangi mazgo laisvumo laipsnis yra galimų mazgo poslinkio komponentų suma, tai kiekvienai konstrukcijai galima užrašyti $p$ nepriklausomų pusiausvyros lygčių (4.29 pav.).



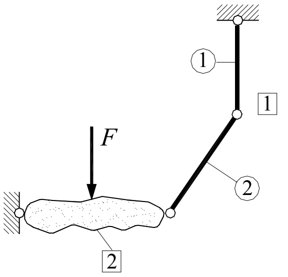

$p$ = 2+1+2+1+2 = 8

4.29 pav.

■ Bendruoju atveju tempiamos-gniuždomos konstrukcijos gali būti geometriškai nestabilios (4.30 pav.) ir geometriškai stabilios. Pastarosios savo ruožtu gali būti statiškai išsprendžiamos (4.31 pav.) ir statiškai neišsprendžiamos (4.32 pav.). Konstrukcijos priklausymą vienai ar kitai grupei sąlygoja statinio neišsprendžiamumo laipsnis $k$:

$$k = n - p = n - \sum_{i=1}^{m} f_i . \qquad (4.31)$$

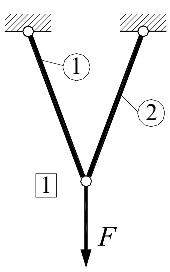
Čia $n$ – strypų (nežinomųjų) skaičius.




$k$ = 2 - (2+1) =-1

$\underline{k < 0}$

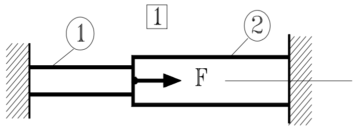
4.30 pav.




$k$ = 2-2 = 0

$\underline{k = 0}$

4.31 pav.




$k$ = 2-1 = 1

$\underline{k > 0}$

4.32 pav.

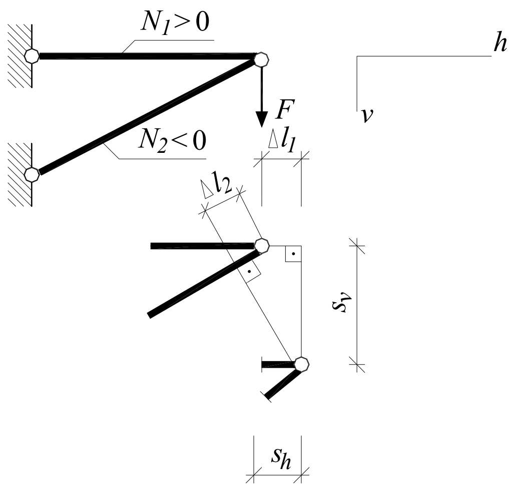
4.13 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

### 4.9. Statiškai išsprendžiamos tempiamos-gniuždomos konstrukcijos

■ Statiškai išsprendžiamų konstrukcijų ašinės jėgos nustatomos pjūvio metodu, nes joms galima užrašyti tiek pusiausvyros lygčių, kiek yra nežinomųjų. Skaičiuojant ašines jėgas, pusiausvyros lygtis patartina parinkti tokias, į kurias įeitų tik vienas nežinomasis. Apskaičiuotas ašinių jėgų reikšmes būtina tikrinti. Šiuo atveju reikia rašyti pusiausvyros lygtis, į kurias įeitų kuo daugiau surastų nežinomųjų.

Kiti tempiamos-gniuždomos konstrukcijos įtemptąją ir deformuotąją būseną apibūdinantys dydžiai (normaliniai įtempimai, strypų deformacijos, mazgų poslinkiai) skaičiuojami naudojant formules, išvestas ankstesniuose šio skyriaus poskyriuose. Stiprumo sąlygos ir uždavinių tipai aptarti šeštajame skyriuje.

*Pastaba.* Skaičiuojant tempiamų-gniuždomų




4.33 pav.

konstrukcijų mazgų poslinkius, naudojamas poslinkių mažumo principas, t.y. laikoma, kad deformuojantis konstrukcijai ir strypams sukantis atramų atžvilgiu, jų laisvieji galai juda ne lanku, bet tiese, statmena strypo ašiai (4.33 pav.).

4.14 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

## 4.11. Statiškai neišsprendžiamos tempiamos-gniuždomos konstrukcijos

■ Skaičiuojant statiškai neišsprendžiamas tempiamas-gniuždomas konstrukcijas, reikia spręsti lygčių sistemą, sudarytą iš statikos, geometrinių ir fizinių lygčių.

Statikos lygtys susieja ašines jėgas su apkrova ($N = f(F)$). Jų galima užrašyti *p,* t.y. tiek, kokia yra konstrukcijos mazgų laisvės laipsnių suma.

Geometrinės deformavimo lygtys susieja geometrinius deformuotos konstrukcijos parametrus: strypų deformacijas ir mazgų poslinkius ($\Delta l = f(s)$). Tokių lygčių galima užrašyti $n$, t.y. tiek, kiek yra strypų (sudarant geometrines deformavimo lygtis, naudojamas poslinkių mažumo principas). Jas galima gauti formaliuoju būdu (transponuojant pusiausvyros lygčių koeficientų matricą) arba geometriškai nagrinėjant deformuotą konstrukciją. Eliminavus ir geometrinių deformavimo lygčių poslinkius, gaunamos deformacijų darnos lygtys, t.y. lygtys, susiejančios strypų deformacijas. Jų galima užrašyti tiek, koks yra konstrukcijos statinio neišsprendžiamumo laipsnis $k$ ($k = n - p$). Deformacijų darnos lygtis galima gauti ir tiesiogiai, nagrinėjant deformuotą konstrukciją.

Fizinės lygtys susieja deformacijas su jų priežastimi ($\Delta l = f(N, \Delta t)$). Jas galima užrašyti kiekvienam konstrukcijos strypui, t.y. fizinių lygčių skaičius lygus konstrukcijos strypų skaičiui $n$.

■ Statiškai neišsprendžiamų tempiamųjų-gniuždomųjų konstrukcijų skaičiavimo algoritmas:
1. Nustatomas konstrukcijos statinio neišsprendžiamumo laipsnis $k$.
2. Sudaroma $p$ pusiausvyros lygčių.
3. Sudaroma $k$ deformacijų darnos lygčių.
4. Panaudojus $n$ fizinių lygčių, deformacijos išreiškiamos per ašines jėgas.
5. Sprendžiama lygčių sistema su $n$ nežinomųjų.
6. Apskaičiuotos ašinių jėgų reikšmės patikrinamos.

4.15 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

## 4.12. Statiškai neišsprendžiamų konstrukcijų savybės

1. Suardžius atliekamuosius ryšius statiškai neišsprendžiamose konstrukcijose nesukeliamas visos konstrukcijos suirimas, nes dažniausiai ji lieka geometriškai stabili, o suardžius bent vieną statiškai išsprendžiamos konstrukcijos ryšį, ji tampa geometriškai judri. Taigi statiškai neišsprendžiamos konstrukcijos darbas yra saugesnis.

2. Statiškai neišsprendžiamose konstrukcijose ašinių jėgų pasiskirstymas priklauso nuo strypų medžiagos ($E$) ir skerspjūvio matmenų ($A$). Pakeitus strypų standžius ($E \cdot A$), įvyksta visos konstrukcijos ašinių jėgų persiskirstymas. Taigi statiškai neišsprendžiamos konstrukcijos projektinis uždavinys gali būti išspręstas tik priartėjimo būdu.

3. Statiškai neišsprendžiamose konstrukcijose temperatūra, atramų sėdimas ir netikslus elementų pagaminimas sukelia papildomas ašines jėgas, kurias būtina įvertinti.

4.16 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

### *Kontroliniai klausimai*

*4.1. Kas yra tempimas-gniuždymas?*
*4.2. Užrašykite ašinės jėgos ir apkrovos diferencialinį ryšį.*
*4.3. Užrašykite ašinės jėgos ir apkrovos integralinį ryšį.*
*4.4. Kam lygūs normaliniai įtempimai tempiamo-gniuždomo strypo skerspjūvyje? Formulė.*
*4.5. Užrašykite tempiamo-gniuždomo strypo poslinkių ir deformacijų diferencialinį ryšį.*
*4.6. Užrašykite tempiamo-gniuždomo strypo poslinkių ir deformacijų integralinį ryšį.*
*4.7. Kam lygus tempiamo-gniuždomo strypo ilgio pokytis?*
*4.8. Kas yra tempiamo-gniuždomo strypo standis?*
*4.9. Išskirstytąja apkrova apkrautam tempiamam-gniuždomam strypui sudarykite jo įtemptąją ir deformuotąją būseną apibūdinančių dydžių diagramas.*
*4.10. Kas yra Puasono koeficientas? Kokios jo reikšmės? Formulė.*
*4.11. Kaip skaičiuojamos deformacijos nuo temperatūros? Formulė.*
*4.12. Paaiškinkite formules:*

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2\alpha \ ,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \ .$$

*4.13. Kuriame tempiamo strypo pjūvyje veikia didžiausi normaliniai įtempimai? Kodėl?*
*4.14. Kuriame tempiamo strypo pjūvyje veikia didžiausi tangentiniai įtempimai? Kodėl?*
*4.15. Kodėl į tempiamą strypą galima žiūrėti kaip į pluoštą tarp savęs nesusijusių gijų?*
*4.16. Kaip išreiškiamas tampriųjį tiesiškai besideformuojantį tempiamą-gniuždomą strypą deformuojančios jėgos atliktas darbas? Formulė, brėžinys.*
*4.17. Kaip išreiškiama tempiamo-gniuždomo strypo potencinė deformavimo energija? Formulė.*
*4.18. Užrašykite santykinės potencinės deformavimo energijos išraišką.*
*4.19. Kada poveikis strypui išreiškiamas ne išorinėmis jėgomis?*
*4.20. Kaip galima sumažinti smūgio metu atsiradusią ašinę jėgą?*
*4.21. Kaip skirstomos tempiamos-gniuždomos konstrukcijos pagal strypų išsidėstymą?*
*4.22. Koks mazgas vadinamas laisvuoju?*
*4.23. Kas yra mazgo laisvumo laipsnis?*
*4.24. Kaip nustatomas tempiamos-gniuždomos konstrukcijos statinio neišsprendžiamumo laipsnis?*
*4.25. Nubraižykite geometriškai nestabilią tempiamą-gniuždomą konstrukciją.*
*4.26. Nubraižykite statiškai išsprendžiamą tempiamą-gniuždomą konstrukciją.*
*4.27. Nubraižykite vieną kartą statiškai neišsprendžiamą tempiamą-gniuždomą konstrukciją.*
*4.28. Nubraižykite du kartus statiškai neišsprendžiamą tempiamą-gniuždomą konstrukciją.*
*4.29. Koks principas naudojamas nustatant tempiamos-gniuždomos konstrukcijos mazgų poslinkius? Kaip jis taikomas?*
*4.30. Kas yra geometrinės deformacijų darnos lygtys? Kaip jos gaunamos?*
*4.31. Kokių lygčių sistemą reikia spręsti nustatant statiškai neišsprendžiamos tempiamos-gniuždomos konstrukcijos ašines jėgas?*
*4.32. Kodėl statiškai neišsprendžiamos tempiamos-gniuždomos konstrukcijos yra saugesnės už analogiškas statiškai išsprendžiamas konstrukcijas? Brėžinys.*
*4.33. Kodėl statiškai neišsprendžiamos tempiamos-gniuždomos konstrukcijos projektinis uždavinys gali būti išspręstas tik priartėjimo būdu?*
*4.34. Kokios priežastys sukelia ašinių jėgų persiskirstymą statiškai neišsprendžiamose tempiamose-gniuždomose konstrukcijose?*