

11. Sijos deformacijos ir poslinkiai

11.1. Bendrosios žinios

■ Iki šiol nagrinėjome sijas atsižvelgdami tik į jų stiprumą, t.y. užrašę sijai stiprumo sąlygą, tikrinome, ar pavojingiausiame jos taške įtempimai neviršija projekcinio stiprio. Tačiau pakankamai stiprios sijos gali būti netinkamos eksploatuoti dėl nepakankamo standumo. Be to, sprendžiant statiškai neišsprendžiamas konstrukcijas, be pusiausvyros lygčių, papildomai reikia užrašyti ir geometrines lygtis. Tiek užrašant standumo sąlygas, tiek sudarant geometrines lygtis, reikia mokėti nustatyti bet kurio sijos skerspjūvio poslinkį, rečiau – bet kurio taško deformaciją.

■ Iš ankstesnio skyriaus žinome, kad sijos skerspjūvyje veikia tiek normaliniai, tiek tangentiniai įtempimai. Su jais susijusias linijines ir kampines deformacijas galima gauti panaudojus Huko dėsnį:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M}{E \cdot I} y, \quad (11.1)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q |S_x|}{G \cdot I_x \cdot b}. \quad (11.2)$$

Šlyties deformacijų įtaka sijos deformavimo procese nėra didelė (ji kiek didesnė trumpose sijos), todėl praktiniuose skaičiavimuose jos neįvertinamos. Taigi sijos ašies išsikreivinimą lemia linijinės deformacijos. Skerspjūvyje jos pasiskirsto tiesiškai: lygios nuliui neutraliojo sluoksnio sankirtoje su skerspjūvio plokštuma, ekstreminės – kraštiniuose skerspjūvio sluoksniuose. Proporcingumo koeficientas yra tiesiog proporcingas skerspjūvyje veikiančiam lenkimo momentui, atvirkščiai proporcingas lenkiamajam (sijos skerspjūvio) standžiui. Šis koeficientas ($\frac{M}{E \cdot I}$) vadinamas apibendrintąja sijos deformacija. Kita vertus (žr. 10 skyrių), tai yra sijos ašies kreivis. Taigi sijos deformavimasis apibūdinamas linijinėmis deformacijomis ε , kampinėmis deformacijomis γ ir apibendrintąja sijos deformacija (sijos ašies kreiviu):

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{E \cdot I}, \quad (11.3)$$

čia ρ – sijos ašies kreivio spindulys.

11.1 tekstas, 11.1 pav. ✖✖✖

■ Sijai deformuojantis, jos skerspjūviai pasislenka, pasisuka, bet, remiantis Bernulio hipoteze, nesusimėto. Taigi naują sijos skerspjūvio padėtį apibūdina trys parametrai (11.2 pav.):

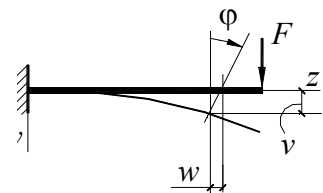
v – sijos skerspjūvio svorio centro linijinio poslinkio projekcija į atitinkamą skerspjūvio ašį (įlinkis);

w – sijos skerspjūvio svorio centro linijinio poslinkio projekcija į sijos ašį;

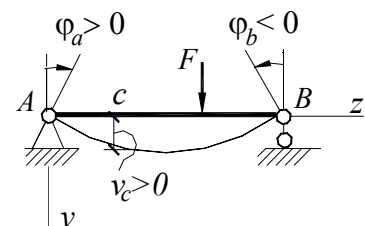
φ – sijos skerspjūvio kampinis poslinkis, t.y. kampas, kuriuo pasisuka skerspjūvis neutraliosios linijos atžvilgiu (deviacija).

Nesunku įrodyti, kad horizontalus poslinkio komponentas w yra labai mažas palyginus jį su kitais dviem poslinkio parametrais. Todėl praktiniuose skaičiavimuose jis neįvertinamas.

■ Ženklių taisyklės (11.3 pav.). Įlinkis yra teigiamas, jei skerspjūvis pasislenka teigiama skerspjūvio ašies kryptimi. Deviacija yra teigiama, jei skerspjūvis pasisuka laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi (vienintelė išimtis).



11.2 pav.



11.3 pav.

11.2. Sijos įlinkių kreivės diferencialinė lygtis

■ Nustatysime, kaip kinta įlinkiai ir deviacijos sijos ilgyje nuo lenkimo momento. Matematika duoda tokią tikslią formulę kreiviui skaičiuoti:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (11.4)$$

Praktiniams skaičiavimams dažniausiai naudojamas supaprastintas jos variantas (narys $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ yra antros eilės mažybė):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dz^2}. \quad (11.5)$$

Sulyginus (11.3) ir (11.5) lygčių dešiniąsias puses, gaunama sijos įlinkių kreivės diferencialinė lygtis:

$$\frac{dy^2}{dz^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x}, \quad (11.6)$$

čia: v – sijos skerspjūvio įlinkis y ašies kryptimi, z – sijos skerspjūvio aplikatė, M_x – lenkimo momentas x ašies atžvilgiu, E – tamprumo modulis, I_x – skerspjūvio ašinis inercijos momentas x ašies atžvilgiu.

Akivaizdu, kad įlinkių kreivės diferencialinė lygtis galioja sijos ruožams, kuriuose ir lenkimo momentas, ir medžiagos mechaninės savybės, ir skerspjūvio geometriniai rodikliai kinta tolydiškai.

■ Nesunku pastebėti (11.4 pav.), kad

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} \cong \varphi. \quad (11.7)$$

Taigi suintegravus vieną kartą lygtį (11.6) gaunama sijos deviacijų lygtis, t.y. lygtis, parodanti kaip kinta deviacijos sijos ilgyje nuo lenkimo momento:

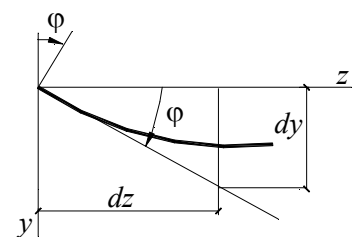
$$\frac{dy}{dz} = \varphi = -\int \frac{M_x}{E \cdot I_x} dz + \varphi_0, \quad (11.8)$$

čia φ_0 – integravimo konstanta, lygi sijos (jos ruožo) pradinio skerspjūvio deviacijai.

Antrą kartą suintegravus sijos įlinkių kreivės diferencialinę lygtį, gaunama sijos įlinkių lygtis, t.y. lygtis, parodanti, kaip kinta įlinkiai sijos ilgyje nuo lenkimo momento:

$$y \cong v = -\iint \frac{M_x}{E \cdot I_x} dz \cdot dz + \varphi_0 \cdot z + v_0, \quad (11.9)$$

čia v_0 – integravimo konstanta, lygi sijos pradinio skerspjūvio įlinkiui.



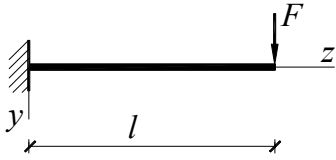
11.4 pav.

■ Integravimo konstantos φ_0 ir v_0 nustatomos iš kraštinių sąlygų:

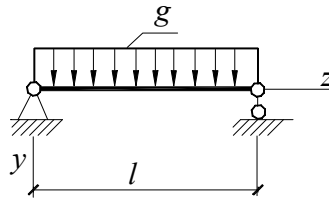
1. Standus įtvirtinimas (11.5 pav.): kai $z=0$, tai $\varphi=0$, $v=0$.

2. Šarnyrinė atrama (11.6 pav.): kai $z=0$, tai $v=0$; kai $z=l$, tai $v=0$.

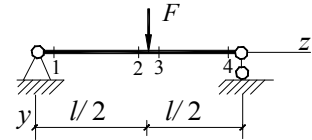
3. Dviejų sijos ruožų su skirtingais lenkimo momentų kitimo dėsniais sandūra (11.7 pav.): kai $z=0$, tai $v=0$; kai $z=\frac{l}{2}$, tai $\varphi=\varphi_2=\varphi_3$, $v=v_2=v_3$; kai $z=l$, tai $v=0$.



11.5 pav.



11.6 pav.



11.7 pav.

11.1 pvz. ✖✖✖

■ Dabar galima užrašyti sijos diferencialinių priklausomybių seką:

$$E \cdot I_x \frac{dy}{dz} = E \cdot I_x \cdot \varphi, \quad (11.10)$$

$$E \cdot I_x \frac{d^2 y}{dz^2} = E \cdot I_x \frac{d\varphi}{dz} = -M_x, \quad (11.11)$$

$$E \cdot I_x \frac{d^3 y}{dz^3} = E \cdot I_x \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = -\frac{dM_x}{dz} = -Q_y, \quad (11.12)$$

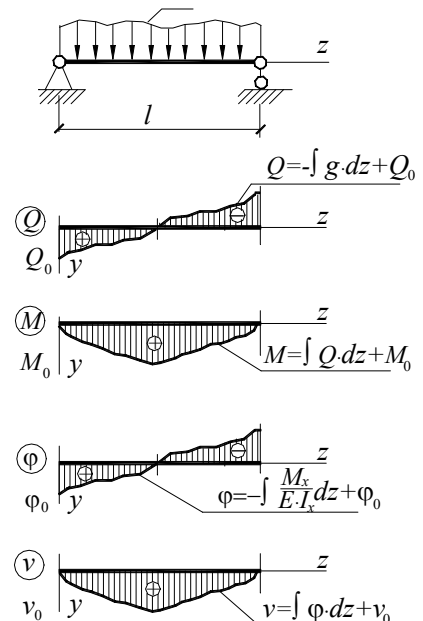
$$E \cdot I_x \frac{d^4 y}{dz^4} = E \cdot I_x \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = -\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -\frac{dQ_y}{dz} = g. \quad (11.13)$$

Diferencialines lygtis iliustruokime grafiškai. Tam tikslui dviatramei sijai (11.8 pav.), apkrautai išskirstytąja apkrova, sudarysime skersinių jėgų, lenkimo momentų, deviacijų ir įlinkių diagramas.

Išanalizavus diferencialines lygtis, galima padaryti kelias svarbias išvadas:

a) įlinkis yra ekstreminis to sijos skerspjūvio, kurio deviacija yra lygi nuliui;

b) deviacija yra ekstreminė to sijos skerspjūvio, kuriame lenkimo momentas lygus nuliui.



11.8 pav.

11.2, 11.3 pvz. ✖✖✖

11.3. Sijos standumo sąlygos

■ Bendroju atveju sijos standumo sąlygos turi tokį pavidalą:

$$|\varepsilon|_{\max} \leq \varepsilon_u, \quad (11.14)$$

$$|v| \leq v_u, \quad (11.15)$$

čia: $|\varepsilon|$ – absoliutinis sijos deformacijos didumas, $|\nu|$ – absoliutinis sijos įlinkio didumas, ε_u, ν_u – ribinės reikšmės, nustatomos norminiais dokumentais priklausomai nuo konstrukcijos paskirties.

Statyboje dažnai naudojamos standumo sąlygos, apribojančios maksimalius sijos įlinkius. Tai dažniausiai būna gembinės sijos laisvojo galo įlinkis ir dviatramės sijos tarpatramio vidurio įlinkis. Tada ribinis įlinkis yra išreiškiamas sijos ilgio l dalimis: $\nu_u = \frac{l}{m}$; čia m – skaičius, nustatomas konstrukcijų projektavimo normomis, lygus maždaug nuo 150 iki 750.

11.4 pvz. ✱✱✱

11.3. Sijos potencinė deformavimo energija

■ Prie sijos pridėjus jėgas, ji išlinksta. Jėgos, judėdamos kartu su besideformuojančia sija, nueina tam tikrą kelią atlikdamos kartu tam tikrą darbą. Šis išorinių jėgų darbas niekur nedingsta, jis susikaupia sijoje potencinės deformavimo energijos pavidalu. Būtent ši potencinė energija sugražina siją į pirminę padėtį, kai pašalinama deformavimo priežastis.

■ Nustatysime potencinės deformavimo energijos dalies, susijusios su lenkimo momentu, analitinę išraišką. Tam tikslui iš grynuoju lenkimu deformuojamos sijos ruožo išskirkime elementarųjį elementą (11.9 pav.).

Veikiant lenkimo momentui elemento galiniai skerspjūviai tarpusavyje pasisuka kampu

$$d\varphi = \operatorname{tg}(d\varphi) = \frac{dz}{\rho} = \frac{1}{\rho} dz = \frac{M}{E \cdot I} dz. \quad (11.16)$$

Kadangi lenkimo momentas siją lenkia statiškai (jo reikšmė pamažu didėja nuo nulio iki maksimalios reikšmės), tai jo atliktas elementarusis darbas, deformuojant nagrinėjamą elementą, yra lygus

$$dW = \frac{1}{2} M \cdot d\varphi = \frac{M^2}{2E \cdot I} dz. \quad (11.17)$$

Bet šis elementarusis darbas yra lygus potencinei deformavimo energijai, sukauptai elementariajame elemente,

$$dE_p = \frac{M^2}{2E \cdot I} dz. \quad (11.18)$$

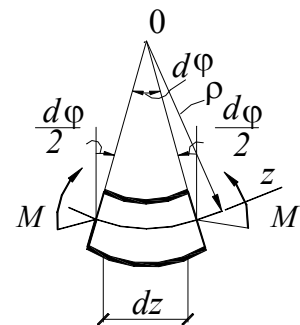
Suintegravę šią išraišką sijos ruožo ilgyje l , gauname potencinę deformavimo energiją, sukauptą visame sijos ruože:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_l \frac{M^2}{E \cdot I} dz. \quad (11.19)$$

Jei sija turi n ruožų su skirtingais lenkimo momentų kitimo dėsniais arba lenkiamaisiais standžiais, tai sijoje sukaupta potencinė deformavimo energija

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_l \frac{M^2}{E \cdot I} dz. \quad (11.20)$$

11.5 pvz. ✱✱✱



11.9 pav.

■ Skersinio lenkimo atveju, be potencinės deformavimo energijos, sukauptos nuo lenkimo momento, sukaupiamas ir tam tikras kiekis šlyties deformacijos potencinės energijos:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_l \mu \frac{Q^2}{G \cdot A} dz, \quad (11.21)$$

čia: l – sijos (jos ruožo) ilgis, μ – koeficientas, kuriuo įskaitomas nevienodas tangentinių įtempimų pasiskirstymas skerspjūvyje, Q – skersinė jėga, G – šlyties modulis, A – skerspjūvio plotas.

Užrašyta formulė “fiziškai panaši” į (11.19) formulę: skaitiklyje yra įrašos kvadratas, vardiklyje medžiagos mechaninio rodiklio ir skerspjūvio geometrinio rodiklio sandauga. Formulės skiriasi tik koeficientu μ , kuris priklauso nuo skerspjūvio formos ir matmenų:

$$\mu = \frac{A}{I_x^2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{S_x^2}{b} dy, \quad (11.22)$$

čia: S_x – skerspjūvio dalies, esančios į vieną pusę nuo tiesės, nubrėžtos per nagrinėjamąjį tašką (lygiagrečios neutraliajai linijai), statinis momentas neutraliosios linijos atžvilgiu, b – materialusis skerspjūvio plotis ties nagrinėjamoju tašku (jo koordinatė y), y_{\max} – labiausiai nutolusio skerspjūvio taško (y ašies teigiama kryptimi) koordinatė, y_{\min} – labiausiai nutolusio skerspjūvio taško (y ašies neigiama kryptimi) koordinatė.

Stačiakampio skerspjūvio $\mu = \frac{6}{5}$, skritulinio skerspjūvio $\mu = \frac{10}{9}$.

Dauguma atvejų šlyties deformacijos potencinė energija yra maža palyginti su potencine deformavimo energija nuo lenkimo momento, todėl praktiniuose skaičiavimuose retai kada įvertinama.

11.6 pvz. ■ ■ ■

11.5. Energetinis Moro metodas

■ Sijos įlinkių kreivės radimo būdas, integruojant jos diferencialinę lygtį, yra patogus tik tada, kai lenkimo momento kitimo dėsnis visame sijos ilgyje yra pastovus. Šiuo atveju tenka nustatyti tik dvi integravimo konstantas. Kai sija turi m ruožų su skirtingais lenkimo momento kitimo dėsniais, integravimo konstantų skaičius išauga iki $2m$ ir kartu labai padidėja skaičiavimų apimtis. Todėl, be išnagrinėto metodo, sijos skerspjūviams skaičiuoti naudojami ir kiti metodai: pradinių parametru metodas, baigtinių skirtumų metodas, tariamųjų apkrovų, energetinis Moro metodas, Kastiljano teorema, lentelės.

Populiariausias, plačiausiai naudojamas inžineriniuose skaičiavimuose yra energetinis Moro metodas. Jis remiasi galimųjų poslinkių principu ir Beti bei Maksvelo tampriųjų konstrukcijų teoremomis.

■ *Galimųjų poslinkių principas* teigia: jeigu tampriosios konstrukcijos išorinės ir vidinės jėgos yra pusiausviros, tai, esant bet kokiems kinematiškai galimiems poslinkiams, ją veikiančių išorinių ir vidinių jėgų atliekami darbai yra tarpusavyje lygūs (tai iš esmės yra energijos tvermės dėsnis, pritaikytas virtualiems poslinkiams):

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}}. \quad (11.23)$$

■ Dabar įrodysime Beti bei Maksvelo tampriųjų konstrukcijų teoremas.

Dvitramę siją nuosekliai apkraukime iš pradžių jėga F_1 , po to jėga F_2 (11.10 pav.). Šių jėgų atliktas darbas bus trijų komponentų suma:

$$W = W_{11} + W_{22} + W_{12} = \frac{1}{2}F_1 \cdot v_{11} + \frac{1}{2}F_2 \cdot v_{22} + F_1 \cdot v_{12} \quad (11.24)$$

Pastabos: 1) pirmasis indeksas prie simbolio rodo vietą, antrasis – priežastį; 2) darbas W_{12} neturi daugiklio 1/2, nes jėga F_1 jį atlieka pasislinkdama svertimu poslinkiu (jis dar vadinamas virtualiuoju darbu).

Sukeiskime jėgų pridėjimo tvarką, t.y. apkraukime siją iš pradžių jėga F_2 , po to jėga F_1 (11.11 pav.). Gausime, kad

$$W = W_{22} + W_{11} + W_{21} = \frac{1}{2}F_2 \cdot v_{22} + \frac{1}{2}F_1 \cdot v_{11} + F_2 \cdot v_{21} \quad (11.25)$$

Sulyginę dešiniąsias gautų darbų išraiškų puses, gauname, kad

$$W_{12} = W_{21} \quad (11.26)$$

Ši lygybė vadinama Beti teorema apie išorinių jėgų darbų ryšį: darbas, kurį atlieka pirmoji jėga, pasislinkdama antrosios jėgos sukeltu poslinkiu, lygus darbui, kurį atlieka antroji jėga, pasislinkdama pirmosios jėgos sukeltu poslinkiu.

Išnagrinėkime atvejį, kai siją veikia vienetinės jėgos ($F_1=F_2=1$). Poslinkius nuo vienetinių jėgų pažymėkime graikiška raide δ . Tada:

$$\begin{aligned} W_{12} &= 1 \cdot \delta_{12}, \\ W_{21} &= 1 \cdot \delta_{21}, \\ \delta_{12} &= \delta_{21}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Lygybė (11.27) vadinama poslinkių ryšio arba Maksvelo teorema: pirmojo taško poslinkis, sukeltas vienetinės jėgos, pridėtos antrajame taške, lygus antrojo taško poslinkiui, sukeltam vienetinės jėgos, pridėtos pirmajame taške.

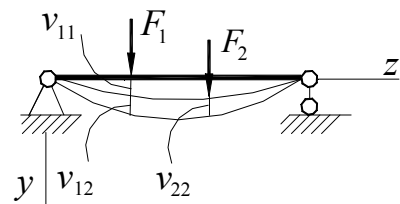
■ Remdamiesi šiomis teoremomis, gausime formulę visaip apkrautos sijos kiekvieno skerspjūvio poslinkiams skaičiuoti. Tarkime, reikia nustatyti K skerspjūvio įlinkį nuo jėgos F . Apkraukime siją iš pradžių ieškomo poslinkio kryptimi vienetine jėga, po to jėga F . Siją nukraukime ir vėl apkraukime, bet dabar iš pradžių jėga F , po to ieškomo poslinkio kryptimi vienetine jėga (11.12, 11.13 pav.). Remiantis Beti teorema, galima užrašyti, kad

$$W_{1f} = W_{f1}$$

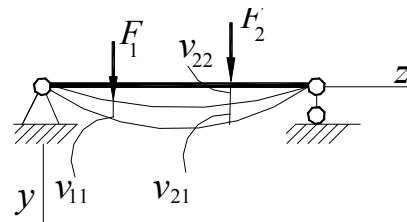
arba

$$1 \cdot v_{1f} = F \cdot \delta_{f1} \quad (11.28)$$

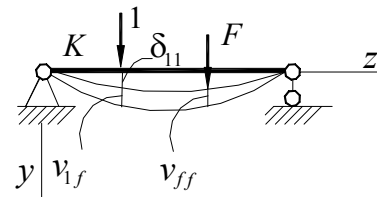
Remdamiesi galimų poslinkių principu, galime teigti, kad darbas, kurį atliko jėga F , pasislinkdama vienetinės jėgos sukeltu poslinkiu, yra lygus analogiškų vidinių jėgų darbui, t.y. darbui, kurį atliko lenkimo momentai, atsiradę dėl jėgos F , pasisukdami kartu su deformuojamos konstrukcijos skerspjūviais kampais, atsiradusiais dėl vienetinės jėgos (11.14 pav.).



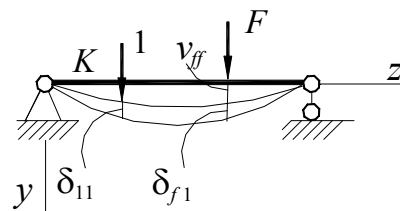
11.10 pav.



11.11 pav.



11.12 pav.



11.13 pav.

$$dW_{f1} = M \cdot d\varphi(1) = M \cdot \frac{1}{\rho(1)} dz = \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dz,$$

$$W_{f1} = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dz. \quad (11.29)$$

Sulyginę (11.28) ir (11.29) lygčių dešiniąsias puses, gauname, kad

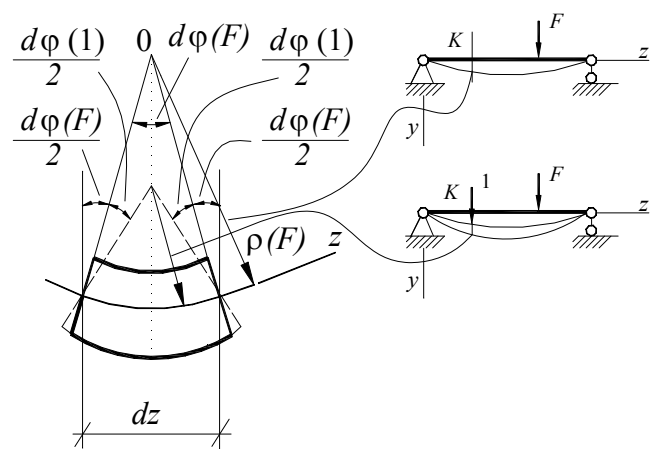
$$1 \cdot v_{1f} = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dz. \quad (11.30)$$

Formulė (11.30) vadinama Moro integralu. Moro integralas yra darbas (reiškia darbą), kurį atlieka vienatinė apibendrintoji apkrova, pasislinkdama duotosios apkrovos sukeltu poslinkiu.

Apibendrintoji energetinio Moro metodo lygtis turi tokį pavidalą:

$$s_k = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{M \cdot \bar{M}_k}{E \cdot I} dz, \quad (11.31)$$

čia: s_k – apibendrintasis k -ojo skerspjūvio poslinkis, M – lenkimo momentas nuo duotos apkrovos, \bar{M}_k – lenkimo momentas nuo vienatinės apibendrintosios apkrovos, pridėtos skerspjūvyje K ieškomo poslinkio kryptimi (skaičiuojant įlinkį pridedama vienatinė jėga, skaičiuojant deviaciją – vienatinis momentas), E – tamprumo modulis, I – skerspjūvio inercijos momentas neutraliosios linijos atžvilgiu, l – sijos (ruožo) ilgis, n – skaičius sijos ruožų, kuriuose lenkimo momentas nuo duotosios apkrovos, lenkimo momentas nuo vienatinės apibendrintosios apkrovos ir sijos standis kinta tolydiškai.



11.14 pav.

Jeigu išsprendus Moro integralą gaunamas pliuso ženklas, tai reiškia, kad skerspjūvio poslinkio komponento kryptis sutampa su vienatinės apibendrintosios apkrovos veikimo kryptimi, jei minuso ženklas – tai reiškia, kad poslinkio komponento ar vienatinės apibendrintosios apkrovos veikimo kryptys yra priešingos.

Pastabos.

1. Skersinio lenkimo atveju darbą atlieka ne tik lenkimo momentas, bet ir skersinė jėga. Dažniausiai skersinės jėgos atliekamas darbas sudaro 2-3% viso darbo, todėl praktiniuose skaičiavimuose ji neįvertinama.

2. Energetinis Moro metodas leidžia nustatyti poslinkius tik tų sijos skerspjūvių, kuriuose pridedama vienatinė apibendrintoji apkrova. O turint įlinkių ir deviacijų lygtis, galima apskaičiuoti bet kurių sijos skerspjūvių poslinkius.

11.7 pvz. ■■■

■ Kai sija tiesi, lenkimo momentai nuo vienatinės apibendrintosios apkrovos (vienetiniai lenkimo momentai) visada kinta tiesiškai. Tai leidžia supaprastinti Moro integralo skaičiavimą; t.y. skaičiuoti jį grafiniu-analitiniu arba Vereščičiagino būdu.

Tarkime, turime vienodo standžio sijos ruožo (ilgis l) lenkimo momentų nuo duotosios apkrovos ir vienetinių lenkimo momentų diagramas (11.15 pav.). Lenkimo momentų nuo duotosios apkrovos

diagramos plotas yra ω , šio ploto svorio centras yra taške C . Ties šiuo tašku vienetinių lenkimo momentų ordinatė yra \bar{M}_c . Sukirskime vienetinių lenkimo momentų diagramą su z ašimi ir jų sankirtos tašką laikykime koordinatinių ašių (z ir y) sistemos pradžios tašku. Atstumu z nuo šio taško veikia lenkimo momentas nuo duotosios apkrovos M ir vienetinis lenkimo momentas $\bar{M} = z \cdot \text{tg}\alpha$. Įrašykime šias lenkimo momentų išraiškas į Moro integralą:

$$s_k = \int_l \frac{M \cdot \bar{M}}{E \cdot I} dz = \int \frac{1}{E \cdot I} M \cdot z \cdot \text{tg}\alpha \cdot dz = \frac{\text{tg}\alpha}{E \cdot I} \int_l z \cdot M \cdot dz.$$

Bet $M \cdot dz = d\omega$, čia $d\omega$ – yra lenkimo momentų nuo duotosios apkrovos elementarusis plotelis, taigi

$$s_k = \frac{\text{tg}\alpha}{E \cdot I} \int_{\omega} z \cdot d\omega. \quad (11.32)$$

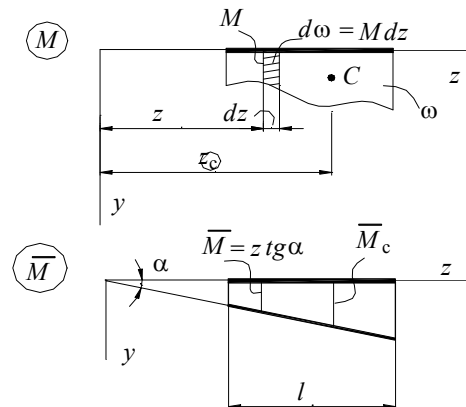
Iš 11.15 pav. matyti, kad $\int_{\omega} z \cdot d\omega$ yra lenkimo momentų nuo duotosios apkrovos diagramos statinis momentas y ašies atžvilgiu. Bet jį galima išreikšti per diagramos ploto ir to ploto svorio centro nuotolio nuo y ašies sandaugą: $\int_{\omega} z \cdot d\omega = S_y = z_c \cdot \omega$. Įrašykime gautą išraišką į 11.32 lygtį:

$$s_k = \frac{\text{tg}\alpha}{E \cdot I} \int_l z \cdot d\omega = \frac{\text{tg}\alpha}{E \cdot I} z_c \cdot \omega = \frac{\omega}{E \cdot I} z_c \cdot \text{tg}\alpha.$$

Bet $z_c \cdot \text{tg}\alpha = \bar{M}_c$. Pagaliau gauname, kad

$$s_k = \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{E \cdot I}, \quad (11.33)$$

t.y. Moro integralas yra lygus lenkimo momentų nuo duotosios apkrovos diagramos plotui, padaugintam iš lenkimo momentų nuo apibendrintosios vienetinės apkrovos diagramos ordinatės ties pirmosios diagramos svorio centru.



11.15 pav.

11.2 tekstas, 11.34 formulė, 11.8 pvz.

11.5. Įvairūs sijų poslinkių nustatymo metodai

■ *Pradinių parametru metodas.* Šis metodas pagrįstas apytiksliai įlinkių kreivės diferencialinės lygties sprendiniu, gautu panaudojus Teiloro-Makloreno eilutę:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \frac{z}{1!} + f''(z_0) \frac{z^2}{2!} + \dots + f^n(z_0) \frac{z^n}{n!}, \quad (11.35)$$

t.y. matematiniu metodu, leidžiančiu bet kurią funkciją išreikšti daugianariais panaudojant jos aukštesnių eilių išvestines. Naudojant pradinių parametru metodą, bet kurio sijos skerspjūvio poslinkiai išreiškiami per pradinio skerspjūvio poslinkius, įrašas ir apkrovas, įvertinant kitas siją veikiančias apkrovas. Pavyzdžiui, pradinių parametru metodo formulė pirmajam sijos ruožui skaičiuojant įlinkius turi tokį pavidalą:

$$v = v_0 + \varphi_0 z - \frac{M_0}{2E \cdot I} z^2 - \frac{Q_0}{6E \cdot I} z^3 + \frac{g_0}{24E \cdot I} z^4 + \frac{g_0'}{120E \cdot I} z^5 + \dots \quad (11.36)$$

čia: v – z -ojo skerspjūvio įlinkis, v_0 – pradinio skerspjūvio įlinkis, φ_0 – pradinio skerspjūvio deiviacija, M_0 – pradinio skerspjūvio lenkimo momentas, Q_0 – pradinio skerspjūvio skersinė jėga, g_0 – pradinio skerspjūvio išskirstytos apkrovos intensyvumas, $E \cdot I$ – ruožo standis.

Kai skaičiuojamos deiviacijos –

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{M_0}{E \cdot I} z + \frac{Q_0}{2E \cdot I} z^2 + \frac{g_0}{6E \cdot I} z^3 + \frac{g_0'}{24E \cdot I} z^4 + \dots \quad (11.37)$$

Abiem atvejais pradiniai parametrai nustatomi iš kraštinių sąlygų.

Esminis pradinių parametų metodo pranašumas lyginant jį su metodu, pagrįstu įlinkių kreivės diferencialinės lygties integravimu, yra tas, kad nepriklausomai nuo statišškai išsprendžiamos sijos ruožų skaičiaus naudojant pradinių parametų metodą reikia nustatyti ne daugiau kaip dvi konstantas, o integruojant įlinkių kreivės diferencialinę lygtį tokių konstantų yra $2m$; čia m – ruožų skaičius.

■ *Fiktyvių apkrovų metodas.* Jis pagrįstas dviejų diferencialinių lygčių matematiniu panašumu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M}{dz^2} &= -g, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= -\frac{M}{E \cdot I}, \end{aligned} \right\} \quad (11.38)$$

čia: M – lenkimo momentas, g – išskirstytos apkrovos intensyvumas, y – įlinkis, $E \cdot I$ – sijos ruožo standis.

Naudojant fiktyvių apkrovų metodą: a) fiktyvi sija, tenkinanti tikrosios sijos deiviacijų ir įlinkių kraštines sąlygas, apkraunama tikrosios sijos lenkimo momentų diagrama, b) nagrinėjamame skerspjūvyje nustatoma fiktyvi skersinė jėga ir fiktyvus lenkimo momentas, c) padalijus gautą fiktyvią įrašą iš sijos standžio gaunamos atitinkamai deiviacijos ir įlinkiai.

■ *Baigtinių skirtumų metodas.* Naudojant baigtinių skirtumų metodą: a) sija suskaidoma į norimą atkarpų skaičių (kuo daugiau atkarpų, tuo tikslesni skaičiavimo rezultatai), b) kiekvienam skaičiuojamajam skerspjūviui, pakeitus tiek funkcijos, tiek argumento diferencialus (dy , dz) baigtiniais skirtumais (Δy , Δz), užrašomos įlinkių kreivės diferencialinės lygtys, c) sprendžiama algebrinių lygčių sistema (tiek lygčių, kiek skaičiuojamųjų skerspjūvių).

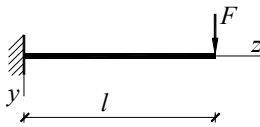
11.3 tekstas, 11.39, 11.40 formulės, 11.16 pav. ✱ ✱ ✱

■ *Tipinių sijų poslinkių formulių lentelės.* Tokių formulių lentelėse paprastai pateikiama tik ypatingųjų sijos skerspjūvių (laisvųjų galų, atraminių skerspjūvių ir tarpatramio vidurio) poslinkiai.

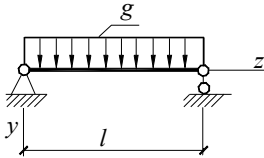
Kontroliniai klausimai

- | | |
|--|--|
| 11.1. Parodykite visus sijos skerspjūvio poslinkio komponentus. Brėžinys. | 11.6. Kas yra lenkiamasis (sijos skerspjūvio) standis? Formulė. |
| 11.2. Kas yra sijos skerspjūvio deiviacija? | 11.7. Užrašykite įlinkių kreivės diferencialinę lygtį. |
| 11.3. Kas yra sijos skerspjūvio įlinkis? | 11.8. Kokiems sijos ruožams galioja įlinkių kreivės diferencialinė lygtis? |
| 11.4. Užrašykite diferencialinę sijos skerspjūvio deiviacijos ir įlinkio ryšį. Brėžinys. | 11.9. Užrašykite sijos deiviacijų lygtį. |
| 11.5. Kaip išreiškiama apibendrintoji sijos deformacija? Formulė. | 11.10. Užrašykite sijos įlinkių lygtį. |

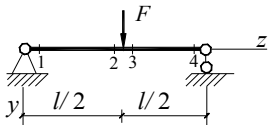
11.11. Užrašykite parodytos sijos kraštines sąlygas.



11.12. Užrašykite parodytos sijos kraštines sąlygas.



11.13. Užrašykite parodytos sijos kraštines sąlygas.



11.14. Užrašykite sijos diferencialinių priklausomybių seką.

11.15. Ties kuriuo skerspjūviu sijos įlinkis yra ekstreminis?

11.16. Kurio sijos skerspjūvio deviacija yra ekstreminė?

11.17. Parodytai sijai apytiksliai nubraižykite skersinių jėgų, lenkimo momentų, deviacijų ir įlinkių diagramas.

11.18. Užrašykite sijos standumo sąlygas.

11.19. Užrašykite lenkimo momento įtakojamą sijos potencinės energijos išraišką.

11.20. Užrašykite skersinės jėgos įtakojamą sijos potencinės energijos išraišką.

11.21. Paaiškinkite formulę:

$$\mu = \frac{A}{I_x^2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{S_x^2}{b} dy.$$

11.22. Ką teigia Kastiljano teorema? Formulė.

11.23. Ką teigia išorinių jėgų darbų ryšio (Betti) teorema?

11.24. Ką teigia poslinkių ryšio (Maksvelo) teorema?

11.25. Užrašykite Moro integralą.

11.26. Paaiškinkite fizinę Moro integralo prasmę.

11.27. Paaiškinkite formulę:

$$S_k = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\sum_{j=1}^m w_j \cdot \overline{M_{cj}} \right)_i}{(E \cdot I)_i}.$$

11.28. Kokius žinote sijos skerspjūvių poslinkių skaičiavimo metodus?

11.29. Kokia pradinių parametru metodo esmė.

11.30. Kuo pagrįstas pradinių parametru metodas?

11.31. Paaiškinkite formulę:

$$v = v_0 + \varphi_0 \cdot z - \frac{M_0}{2EI} z^2 - \frac{Q_0}{6E \cdot I} z^3 + \frac{g_0}{24E \cdot I} z^4 + \frac{g_0^2}{120E \cdot I} z^5 + \dots$$

11.32. Paaiškinkite formulę:

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{M_0}{E \cdot I} z + \frac{Q_0}{2E \cdot I} z^2 + \frac{g_0}{6E \cdot I} z^3 + \frac{g_0^2}{24E \cdot I} z^4 + \dots$$

11.33. Koks esminis pradinių parametru metodo pranašumas lyginant jį su metodu, pagrįstu įlinkių kreivės diferencialinės lygties integravimu?

11.34. Kokia fiktyvių apkrovų metodo esmė?

11.35. Kuo pagrįstas fiktyvių apkrovų metodas?

11.36. Kokia yra baigtinių skirtumų metodo esmė?

11.37. Paaiškinkite formulę:

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = \Delta^2 \frac{M_{x,i}}{(E \cdot I_x)_i}.$$

11.38. Paaiškinkite formulę:

$$\varphi_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\Delta}.$$

11.39. Koks pagrindinis tipinių sijų poslinkių formuliu trūkumas?

Kęstutis Vislavičius

MEDŽIAGŲ MECHANIKA 1

Kontūriniai paskaitų tekstai statybos inžinieriams

Redagavo S. Kirkiėnė

SL 136. 2000 08 09. 11,62 apsk. leid. l. 100 egz.

Užsakymas

Leido Vilniaus Gedimino technikos universitetas, leidykla "Technika", Saulėtekio al. 11, LT-2040 Vilnius
Spausdino UAB "Biznio mašinų kompanija", Gedimino pr. 60, LT-2002 Vilnius