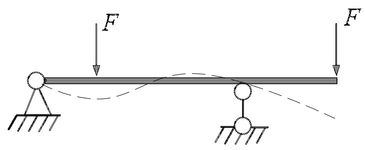
10. Lenkimas

10.1. Bendrosios žinios

■ Lenkimu vadinamas deformavimo tipas, apibūdinamas strypo ašies išsikreivinimu nuo lenkimo momento. Skersinio lenkimo atveju sijos ašies išsikreivinimo priežastis yra ir lenkimo momentas, ir skersinė jėga (10.1 pav.).



10.1 pav.

10.1 tekstas, 10.2 pav. ⌘⌘⌘

■ Pagal įrąžas, veikiančias skerspjūvyje, lenkimas skirstomas į grynąjį ir skersinį.

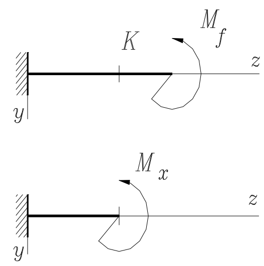
Lenkimas vadinamas grynuoju, kai sijos skerspjūvyje veikia tik lenkimo momentas (10.3 pav.).

Lenkimas vadinamas skersiniu, kai sijos skerspjūvyje veikia ir lenkimo momentas, ir skersinė jėga (10.4 pav.).

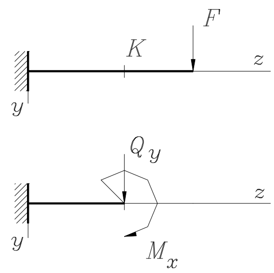
■ Pagal sijos ašies išsikreivinimo pobūdį lenkimas skirstomas į plokščiąjį ir įstrižą.

Plokščiuoju arba paprastuoju vadinamas lenkimas, kai sijos ašis išlinksta plokštumoje, sutampančioje su viena iš svarbiausiųjų plokštumų, t.y. su plokštuma, einančia per sijos ašį ir vieną iš centrinių svarbiausiųjų skerspjūvio ašių (10.5 pav.). Tokią sijos deformaciją dažniausiai sukelia statmena sijos ašiai apkrova, veikianti vienoje iš svarbiausiųjų sijos plokštumų.

Įstrižu vadinamas lenkimas, kai sijos ašis išlinksta plokštumoje, nesutampančioje nė su viena iš svarbiausiųjų plokštumų (10.6 pav.). Tokią sijos deformaciją sukelia statmena sijos ašiai apkrova, veikianti plokštumoje, kertančioje sijos ašį, bet nesutampančioje nė su viena iš svarbiausiųjų plokštumų.

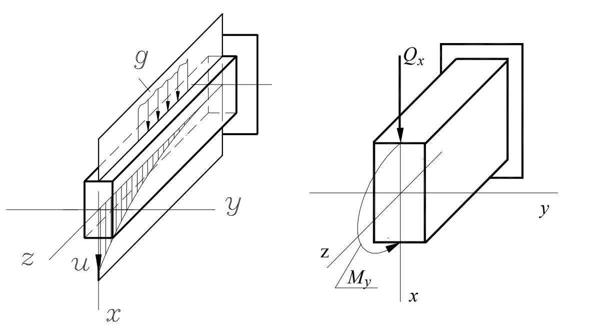


10.3 pav.

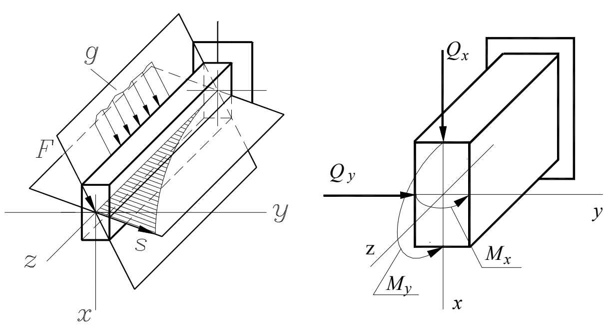


10.4 pav.

10.2 tekstas ⌘⌘⌘



10.5 pav.



10.6 pav.

■ Lenkimas yra sudėtingas deformavimo tipas. Lenkiamo elemento įtemptąją-deformuotąją būseną apibūdinančių dydžių (įrąžų, įtempimų, deformacijų ir poslinkių) nustatymo metodai yra daug sudėtingesni negu tempiamuose-gniuždomuose, kerpamuose ar sukamuose elementuose. Todėl lenkimo skyrius tradiciškai dalijamas į dvi dalis: pirmoje dalyje aptariami bendrieji dalykai ir nagrinėjamas sijos stiprumas, antroje dalyje nagrinėjami sijos standumo klausimai. Panašiai padalintas lenkimo skyrius ir šiame konspekte: toliau pateikiami įrąžų ir įtempimų nustatymo metodai, o deformacijos ir poslinkiai nagrinėjami 11 skyriuje.

10.2. Plokščiojo lenkimo įrąžos

■ Plokščiojo lenkimo atveju sijos skerspjūviuose veikia tiek skersinės jėgos, tiek lenkimo momentai. Siekiant geriau suvokti sijos deformavimąsi, rasti pavojingus skerspjūvius, numatyti optimizavimo būdus, sudaromos šių įrąžų diagramos, t.y. funkcijų $Q = f(g,F)$ ir $M = f(g,F,M_f)$ grafikai, vaizduojantys atitinkamai skersinės jėgos ir lenkimo momento kitimą išilgai sijos ašies. Prieš aptardami įrąžų diagramų sudarymo etapus, nustatysime sijos įrąžų ir apkrovos ryšį, išsiaiškinsime, kaip randami ekstreminiai lenkimo momentai, kaip brėžiamos parabolės.

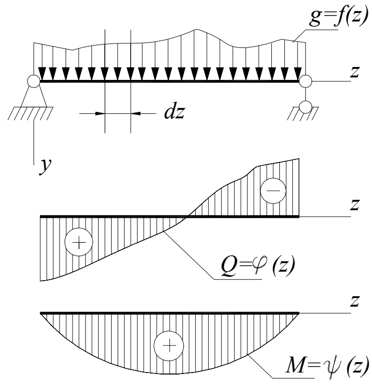
■ Bendruoju atveju tiek siją (jos ruožą) veikianti išskirstytoji apkrova, tiek atsiradusios sijoje įrąžos yra aplikatės funkcijos (10.7 pav.). Ryšį tarp šių tolydinių funkcijų nustatysime nagrinėdami sijos elementariojo elemento pusiausvyrą. Laikysime, kad nykstamai trumpame ruože dz išskirstytoji apkrova yra pastovi (10.8 pav.):

$$\sum F_y = 0;$$
$$-Q + g \cdot dz + Q + dQ = 0,$$
$$\frac{dQ}{dz} = -g. \qquad (10.1)$$

$$\sum M_{fb} = 0;$$
$$-M - Q \cdot dz + g \cdot dz \cdot \frac{1}{2} dz + M + dM = 0,$$
$$\frac{dM}{dz} = Q, \qquad (10.2)$$

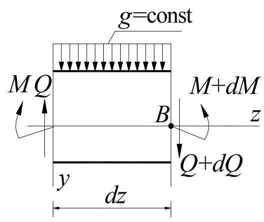
nes narys $g \cdot dz \cdot \frac{1}{2} dz$ yra antros eilės mažybė.

Taigi skersinės jėgos išvestinė skerspjūvio aplikatės atžvilgiu lygi siją veikiančiai išskirstytai apkrovai, o lenkimo momento išvestinė skerspjūvio aplikatės atžvilgiu lygi skersinei jėgai. Iš šių diferencialinių lygčių gauname, kad lenkimo momento antroji išvestinė skerspjūvio aplikatės atžvilgiu lygi siją veikiančiai išskirstytai apkrovai:



10.7 pav.

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -g. \qquad (10.3)$$



10.8 pav.

Lygtys (10.1), (10.2) ir (10.3) gali būti naudojamos sijos įrąžoms skaičiuoti. Tarkime, kad skersinė jėga (Q_0) ir lenkimo momentas (M_0) sijos pradiniame skerspjūvyje yra žinomi (šios įrąžos nustatomos iš kraštinių sąlygų). Tada

$$Q = -\int g \cdot dz + Q_0, \qquad (10.4)$$
$$M = \int Q \cdot dz + M_0 \qquad (10.5)$$

arba

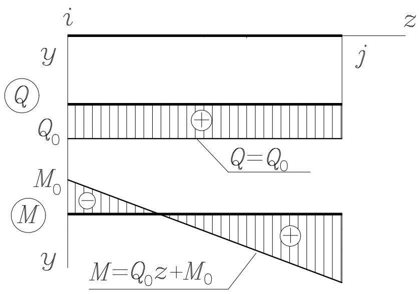
$$M = -\iint g \cdot dz \cdot dz + Q_0 \cdot z + M_0. \qquad (10.6)$$

■ Integralų išraiška, o kartu skersinės jėgos ir lenkimo momento kitimo dėsniai priklauso nuo išskirstytos apkrovos kitimo dėsnio. Aptarkime du dažniausiai pasitaikančius išskirstytosios apkrovos atvejus:

1. Ruožas neapkrautas išskirstytąja apkrova (g=0, 10.9 pav.); tada

$Q = Q_0 = \text{const}$ (ruože skersinė jėga yra pastovi),

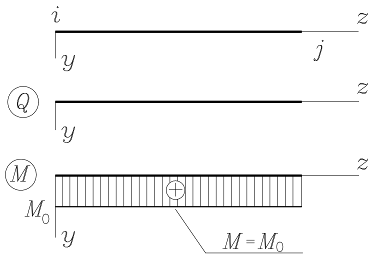
$M_z = Q \cdot z + M_0$ (ruože lenkimo momentas kinta tiesiškai).



10.9 pav.

Pasitaiko, kad neapkrautame ruože ir skersinė jėga lygi nuliui (10.10 pav.), tada

$M = M_0 = \text{const}$ (ruože lenkimo momentas yra pastovus).

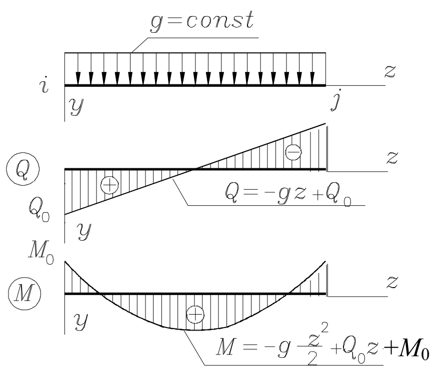


10.10 pav.

2. Ruože veikia vienodai išskirstyta apkrova ($g = \text{const}$, 10.11 pav.); tada

$Q = -g \cdot z + Q_0$ (ruože skersinė jėga kinta tiesiškai),

$M = -\dfrac{g \cdot z^2}{2} + Q_0 \cdot z + M_0$ (ruože lenkimo momentas kinta kvadratiniu dėsniu).



10.11 pav.

Lygtys (10.4), (10.5) ir (10.6) galioja tik ruožams, kuriuose išskirstytoji apkrova (kartu ir sijos įrąžos) kinta tolydiškai. Tokius ruožus vieną nuo kito skiria skerspjūviai, kuriuose keičiasi išskirstytos apkrovos kitimo dėsnis, taip pat mazgai, kuriuose pridėta jėga arba momentas.

10.1 pvz.

■ Siekdami išsiaiškinti, kaip kinta įrąžos mazguose, panagrinėkime mazgų pusiausvyrą:

1) mazgas, kuriame veikia jėga (10.12 pav.):

$$\sum F_y = 0;$$

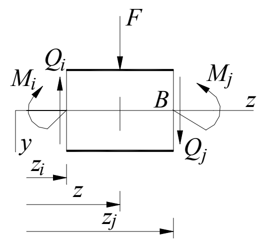
$$-Q_i + F + Q_j = 0,$$

$$Q_j = Q_i - F.$$

$$\sum M_{fb} = 0;$$

$$-M_i - Q_i(z_j - z_i) + F(z_j - z) + M_j = 0,$$

kai $z_i = z = z_j$, tai $M_i = M_j$.



10.12 pav.

Išvada: pereinant per mazgą, kuriame veikia jėga, skersinė jėga pasikeičia didumu, lygiu mazge veikiančios jėgos didumui, o lenkimo momentas lieka toks pats;

2) mazgas, kuriame veikia momentas (10.13 pav.):

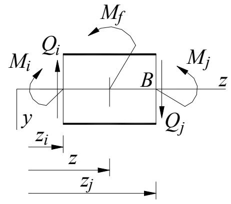
$$\sum F_y = 0;$$

$$-Q_i + Q_j = 0,$$

$$Q_j = Q_i.$$

$$\sum M_{fb} = 0; \quad -M_i - Q_i(z_j - z_i) + M_f + M_j = 0,$$

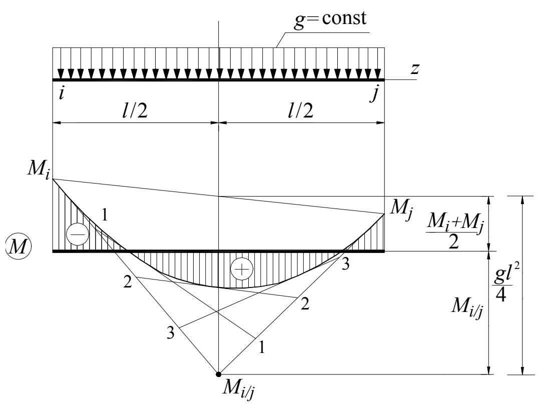
kai $z_i = z = z_j$, tai $M_j = M_i - M_f$.



10.13 pav.

Išvada: pereinant per mazgą, kuriame veikia momentas, skersinė jėga lieka tokia pati, o lenkimo momentas pasikeičia didumu, lygiu mazge veikiančio momento didumui.

■ Projektuotojus dažniausiai domina ne bet kokios, bet ekstreminės įrąžos. Tuo atveju, kai ruožas yra apkrautas išskirstytąja apkrova, ekstreminis lenkimo momentas gali veikti ne ruožo galiniuose skerspjūviuose, bet kuriame nors kitame jo skerspjūvyje. Tokio skerspjūvio vieta nustatoma, remiantis matematiniu metodu funkcijos ekstremumui skaičiuoti: jeigu diferencijuojamos funkcijos išvestinė kuriame nors taške lygi nuliui, tai šiame taške duotoji funkcija turi ekstremumą. Prisiminkime, kad $\frac{dM}{dz} = Q$, taigi ekstreminis lenkimo momentas veiks tame ruožo skerspjūvyje, kuriame skersinė jėga lygi nuliui.



10.14 pav.

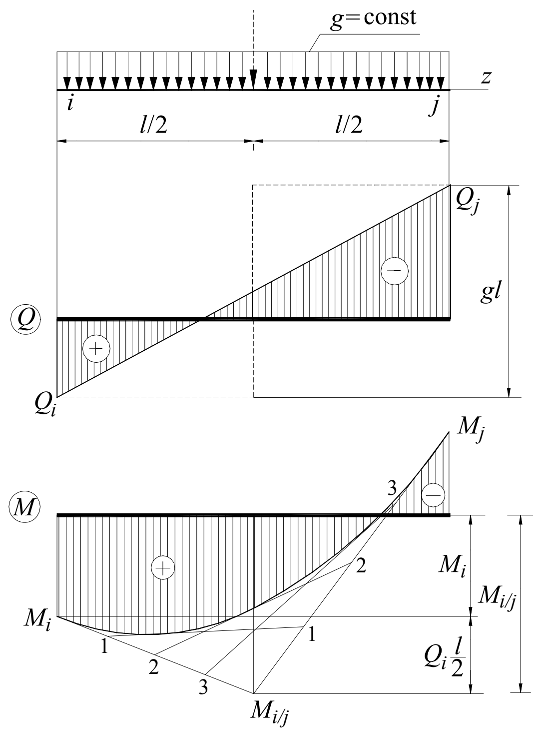
■ Kai ruožas yra apkrautas vienodai išskirstyta apkrova, lenkimo momentų diagrama yra kvadratinė parabolė. Parabolei išbrėžti reikia mažiausiai trijų taškų. Du taškai gaunami atidėjus ruožo galinių skerspjūvių lenkimo momentų reikšmes. Trečiasis taškas, t.y. taškas, kuriame susikerta lenkimo momentų diagramos galiniuose taškuose nubrėžtos liestinės, nustatomos dvejopai. Pirmuoju atveju naudojama formulė:

$$M_{i/j} = \frac{M_i + M_j}{2} + \frac{g \cdot l^2}{4}, \qquad (10.7)$$

čia indeksas i/j žymi i-j ruožo vidurinįjį skerspjūvį (10.14 pav.).

Antruoju atveju vienodai išskirstyta apkrova pakeičiama atstojamąja, veikiančia viduriniajame ruožo skerspjūvyje, ir skaičiuojamas šiame skerspjūvyje veikiantis lenkimo momentas (10.15 pav.):

$$M_{i/j} = M_i + Q_i \frac{l}{2}. \qquad (10.8)$$



10.15 pav.

Parabolės liestinių susikirtimo tašką atitinkantis lenkimo momentas $M_{i/j}$ vadinamas ruožo tariamuoju lenkimo momentu (tai lenkimo momentas, kuris veiktų viduriniajame ruožo skerspjūvyje, jei vienodai išskirstyta apkrova būtų pakeista atstojamąja).

Sudarant lenkimo momentų diagramas ir siekiant išvengti klaidų (ypač mazguose, pereinant iš vienos parabolės į kitą arba iš tiesės į parabolę, ir atvirkščiai), pirmiausia reikia sudaryti lenkimo momentų diagramą tariamam sijos apkrovimo atvejui, t.y. kai sijos ruožuose veikiančios vienodai išskirstytos apkrovos yra pakeistos atstojamosiomis. Po to kiekvieno tokio ruožo liestines (gautas sujungus galinius lenkimo momentus su tariamuoju lenkimo momentu) sudalyti į lygų skaičių lygių dalių ir dalijimo taškus nuosekliai sujungti tiesėmis. Pagaliau per gautų atkarpų vidurius įbrėžti parabolę (10.14, 10.15 pav.). Akivaizdu, kad kuo daugiau yra dalijimo taškų, tuo parabolė tikslesnė.

■ Dabar yra pakankamai teorinių žinių, kad būtų galima sudaryti bet kaip apkrautos sijos įrąžų diagramas. Dažniausiai naudojamas toks sijos įrąžų diagramos sudarymo algoritmas:

1) skaičiuojami (jeigu reikia) atraminių reakcijų komponentai, skaičiavimo rezultatai patikrinami;

2) sužymimi skaičiuojamieji skerspjūviai, t.y. skerspjūviai, kuriuose keičiasi įrąžos didumas arba jos kitimo dėsnis; tai skerspjūviai ties atramomis ir laisvaisiais sijos galais, skerspjūviai iš abiejų jėgos arba momento pridėties taško pusių ir skerspjūviai ties išskirstytos apkrovos pradžios ir pabaigos taškais;

3) pjūvio metodu (žr. 3.3 poskyrį) skaičiuojamuosiuose skerspjūviuose apskaičiuojamos skersinės jėgos ir lenkimo momentai;

4) apskaičiuotos skersinių jėgų ir lenkimo momentų reikšmės pasirinktu masteliu atidedamos atitinkamose sijos ašyse;

5) gauti atkarpų galai sujungiami, remiantis integraliniu įrąžų ir išskirstytosios apkrovos ryšiu;

6) diagramos užbrūkšniuojamos ir užrašomi masteliai (skaičiai, rodantys kiek skersinės jėgos ar lenkimo momentų vienetų atidėta brėžinio ilgio vienete, pvz., 10 kN/cm, 50 kNm/cm);

7) sudarytos diagramos patikrinamos.

10.2 pvz.

■ Kartais tenka spręsti atvirkštinį uždavinį, t.y. žinant lenkimo momentų diagramą, sudaryti skersinių jėgų diagramą ir sijos apkrovimo schemą. Toks uždavinys, remiantis anksčiau išdėstyta medžiaga, sprendžiamas trimis etapais:

1) lenkimo momentų diagramai ties skaičiuojamaisiais skerspjūviais nubraižomos liestinės ir apskaičiuojami jų krypties koeficientai ($tg\beta = Q = \dfrac{M_j - M_i}{z_j - z_i}$); taip gaunama skersinių jėgų diagrama;

2) skersinių jėgų diagramai ties skaičiuojamaisiais skerspjūviais nubraižomos liestinės ir apskaičiuojami jų krypties koeficientai ($tg\beta = g = -\dfrac{Q_j - Q_i}{z_j - z_i}$); taip gaunamos sijos ruožuose veikiančios vienodai išskirstytos apkrovos;

3) iš mazgų pusiausvyros sąlygų nustatomi mazguose pridėti momentai ir jėgos ($M_f = M_i - M_j$, $F = Q_i - Q_j$).

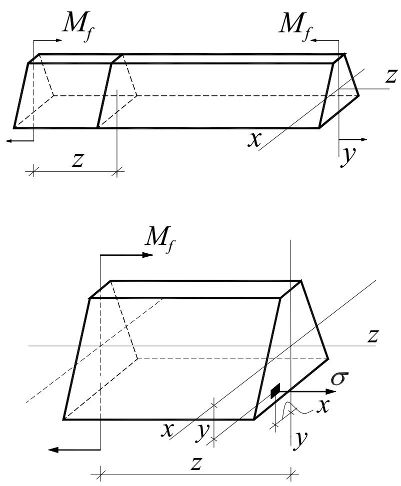
10.3 pvz.

10.3 Grynojo lenkimo normaliniai įtempimai

■ Siekdami gauti normalinių įtempimų pasiskirstymo sijos skerspjūvyje formulę, naudosime 3.8 poskyryje aprašytą metodiką.

■ Statikos integralinės lygtys. Grynojo lenkimo atveju skerspjūvyje veikia tik normaliniai įtempimai, lygiagretūs z ašiai (10.16 pav.). Todėl iš šešių statikos integralinių lygčių (3.4) lieka tik trys:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \cdot dA, \\ M_y &= \int_A \sigma \cdot x \cdot dA, \\ M_x &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA. \end{aligned}\right\} \qquad (10.9)$$

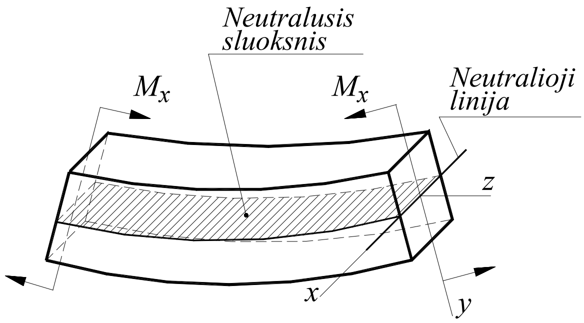


10.16 pav.

Užrašę atpjautai sijos daliai (žr. 10.16 pav.) tris pusiausvyros lygtis ($\sum F_z = 0$, $\sum M_{fy} = 0$, $\sum M_{fx} = 0$), susiesime sijos skerspjūvyje veikiančias įrąžas su apkrova:

$$\left.\begin{aligned} N &= \int_A \sigma \cdot dA = 0, \\ M_y &= \int_A \sigma \cdot x \cdot dA = 0, \\ M_x &= \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = M_f. \end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

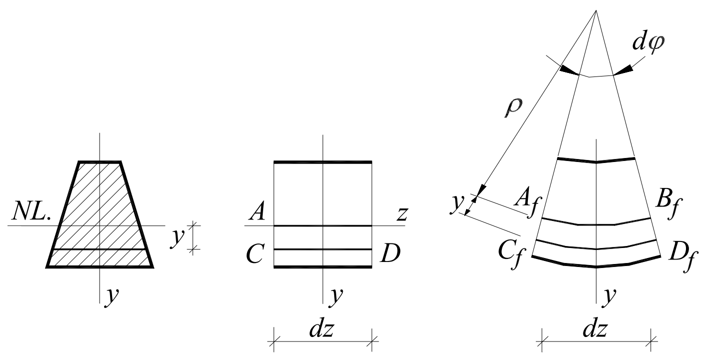
■ G e o m e t r i n ė   d e f o r m a v i m o   l y g t i s . Grynojo lenkimo atveju sija išlinksta apskritimo lanku. Viename jos krašte sluoksniai pailgėja, kitame sutrumpėja, o vertikalios linijos išlieka tiesios. Sluoksnis, kurio ilgis nepasikeičia, vadinamas neutraliuoju. Plokštumai, kurioje guli neutralusis sluoksnis, susikirtus su skerspjūvio plokštuma, gaunama neutralioji linija (10.17 pav.).



10.17 pav.

Nustatysime ryšį tarp sijos ašies kreivio κ ($\kappa = \frac{1}{\rho}$, ρ – neutraliojo sluoksnio kreivio spindulys) ir bet kurio sijos sluoksnio linijinės deformacijos ε. Tam tikslui išskirkime elementarųjį sijos elementą ir panagrinėkime jo sluoksnio *CD*, nutolusio atstumu *y* nuo neutraliojo sluoksnio *AB*, linijines deformacijas (10.18 pav.). Akivaizdu, kad sluoksnio *CD* deformacija $\varepsilon = \frac{C_f D_f - CD}{CD} = \frac{C_f D_f - dz}{dz}$. Panaudojus poslinkių mažumo principą, galima užrašyti, kad $tg(d\varphi) = \frac{dz}{\rho} = d\varphi$ arba $dz = \rho \cdot d\varphi$. Analogiškai gauname, kad $C_f D_f = (\rho + y)d\varphi$. Dabar galima išreikšti deformaciją per sijos ašies kreivio spindulį $\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{(\rho + y - \rho)d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{1}{\rho} y$ arba per sijos ašies kreivį:

$$\varepsilon = \kappa \cdot y. \qquad (10.11)$$



10.18 pav.

■ F i z i n ė   l y g t i s :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \qquad (10.12)$$

■ Dabar belieka išspręsti gautų lygčių sistemą. Į (10.12) lygtį įrašykime linijinės deformacijos išraišką (10.11):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \kappa \cdot y. \qquad (10.13)$$

Spręskime pirmąją sistemos (10.10) lygtį: $N = \int_A E \cdot \kappa \cdot y \cdot dA = 0$. Bet skerspjūvyje $E \cdot \kappa = \text{const}$, taigi $E \cdot \kappa \cdot \int_A y \cdot dA = E \cdot \kappa \cdot S_{nl} = 0$. Kadangi $E \cdot \kappa \neq 0$, tai $S_{nl} = 0$. Gavome, kad neutraliosios linijos atžvilgiu skerspjūvio statinis momentas lygus nuliui. Taigi neutralioji linija kartu yra ir centrinė skerspjūvio ašis.

Spręskime antrąją sistemos (10.10) lygtį: $M_y = \int_A E \cdot \kappa \cdot x \cdot y \cdot dA = E \cdot \kappa \cdot \int_A x \cdot y \cdot dA = E \cdot \kappa \cdot I_{xy} = 0$.

Kadangi $E \cdot \kappa \neq 0$, tai $I_{xy} = 0$. Gavome, kad skerspjūvio išcentrinis inercijos momentas lygus nuliui. Taigi ašys x ir y yra ne tik centrinės, bet ir svarbiausiosios skerspjūvio ašys.

Spręskime trečiąją sistemos (10.10) lygtį:

$$M_x = \int_A E \cdot \kappa \cdot y^2 \cdot dA = E \cdot \kappa \cdot \int_A y^2 \cdot dA = E \cdot \kappa \cdot I_x,$$

$$\kappa = \frac{M_x}{EI_x}, \tag{10.14}$$

Į (10.13) lygtį įstatę sijos ašies kreivio išraišką (10.14), gausime normalinių įtempimų pasiskirstymo sijos skerspjūvyje formulę:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y. \tag{10.15}$$

Čia: M_x – nagrinėjamo skerspjūvio lenkimo momentas, I_x – skerspjūvio ašinis inercijos momentas neutraliosios linijos atžvilgiu, y – taško, kuriame skaičiuojamas įtempimas, atstumas nuo neutraliosios linijos.

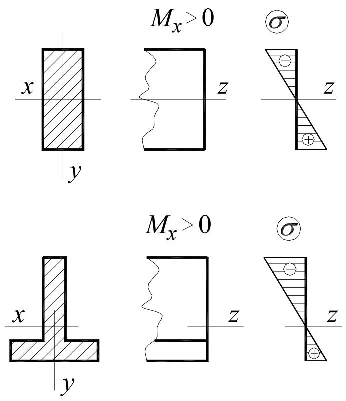
Iš (10.15) formulės matyti, kad normaliniai įtempimai sijos skerspjūvyje pasiskirsto tiesės dėsniu: jie lygūs nuliui ties neutraliąja linija, didžiausi kraštiniuose sluoksniuose (10.19 pav.).

Dažniausiai projektuotojus domina didžiausių normalinių įtempimų absoliutinis didumas. Todėl sijos stiprumo sąlyga normalinių įtempimų atžvilgiu turi tokį pavidalą:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq R, \tag{10.16}$$

čia $W_x = \dfrac{I_x}{|y|_{max}}$.

Formulė (10.15) išvesta grynojo lenkimo atvejui. Pasirodo, kad, esant skersiniam lenkimui, skaičiavimo paklaida, naudojant šią formulę, yra nedidelė. Todėl ji praktiškai naudojama visiems lenkimo uždaviniams spręsti.



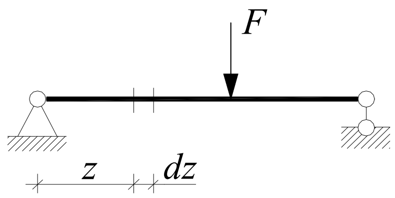
10.19 pav.

10.4, 10.5 pvz. ⌘⌘⌘

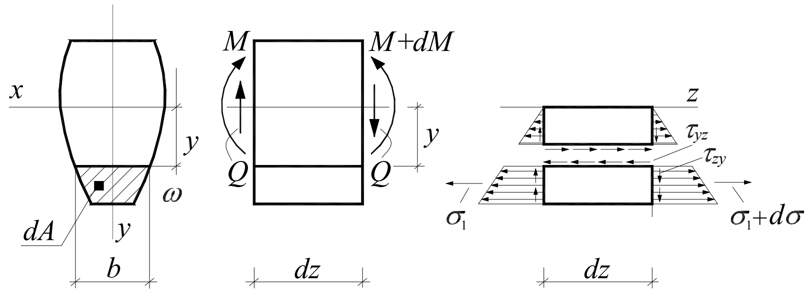
11.4. Sijos tangentiniai įtempimai

■ Tangentinių įtempimų pasiskirstymo sijos aukštyje dėsnis nustatomas remiantis Žuravskio prielaida, pagal kurią tangentiniai įtempimai sijos skerspjūvio plotyje pasiskirsto vienodai, o jų veikimo kryptis sutampa su skersinės jėgos veikimo kryptimi (iš tikrųjų tangentinių įtempimų pasiskirstymas sijos plotyje ir jų veikimo kryptis priklauso nuo skerspjūvio formos). Žuravskio prielaida geriausiai tinka siauriems ir aukštiems skerspjūviams. Esant sudėtingai skerspjūvio formai (pvz., dvitėjui), tangentiniams įtempimams nustatyti taikoma speciali metodika.

■ Iš sijos (10.20 pav.) išskirkime elementarųjį elementą. Pjūviu, nutolusiu atstumu y nuo neutralios linijos (ašies x), atpjaukime apatinę elemento dalį, kurios skerspjūvio plotas ω (10.21 pav.).



10.20 pav.



10.21 pav.

Kairiame pjūvyje veiks tangentiniai įtempimai τ_{xy} ir normaliniai įtempimai σ, dešiniame pjūvyje – atitinkamai τ_{zy} ir $(\sigma + d\sigma)$. Horizontaliame pjūvyje dėl tangentinių įtempimų dualumo veiks tangentiniai įtempimai $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, o normaliniai įtempimai bus lygūs nuliui, nes vertikalia kryptimi sluoksniai vienas kito nespaudžia (galioja poslinkių mažumo principas).

Atpjautam elementui (11.22 pav.) užrašykime pusiausvyros lygtį $\sum F_z = 0$:

$$-\tau_{yz} \cdot dz \cdot b - \int_{\omega} \sigma dA + \int_{\omega} (\sigma + d\sigma) dA = 0,$$

$$\tau_{yz} \cdot dz \cdot b = \int_{\omega} d\sigma dA = \int_{\omega} \frac{dM_x}{I_x} \cdot y dA = \frac{dM_x}{I_x} \int_{\omega} y dA = \frac{dM_x}{I_x} S_{x,\omega},$$

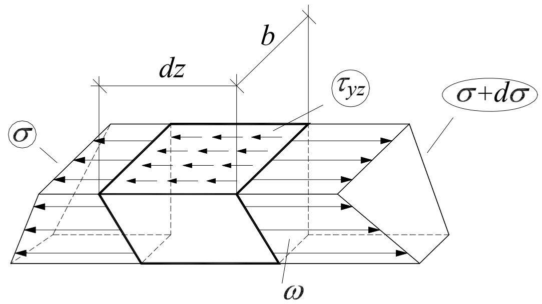
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{dM_x \cdot S_{x,\omega}}{dz \cdot I_x \cdot b}.$$

Bet $\dfrac{dM_x}{dz} = Q_y$, taigi $\tau_{zy} = \dfrac{Q_y \cdot S_{x,\omega}}{I_x \cdot b}$.

Turėdami galvoje, kad tangentinių įtempimų ženklas priklauso tik nuo skersinės jėgos ženklo, gauname tokią galutinę formulę:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot |S_x|}{I_x \cdot b}, \qquad (10.17)$$

čia: τ_{zy} – tangentinis įtempimas, veikiantis xy plokštumoje y ašies kryptimi, Q_y – skersinė jėga, veikianti y ašies kryptimi, S_X – skerspjūvio dalies, esančios į vieną pusę nuo tiesės, nubrėžtos per nagrinėjamąjį tašką lygiagrečiai neutraliajai linijai, statinis momentas neutraliosios ašies (x) atžvilgiu, b – materialusis skerspjūvio ties nagrinėjamuoju tašku plotis, matuojamas kryptimi, lygiagrečia neutraliajai linijai.



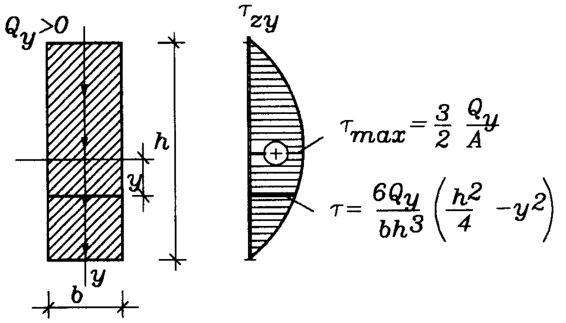
10.22 pav.

10.6 pvz. ⌘ ⌘ ⌘

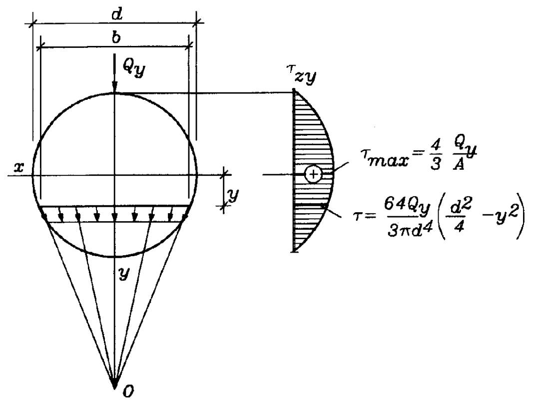
■ Iš formulės (10.17) matyti, kad tangentinių įtempimų pasiskirstymo sijos aukštyje dėsnis priklauso nuo santykio $\frac{|S_x|}{b}$. Aptarsime, kaip pasiskirsto tangentiniai įtempimai įvairių formų skerspjūviuose.

■ *Stačiakampis* (10.23 pav.). Stačiakampiame skerspjūvyje tangentiniai įtempimai kinta kvadratiniu dėsniu, didžiausią reikšmę įgydami ties neutraliąja linija.

■ *Skritulys* (10.24 pav.). Šiuo atveju tangentinių įtempimų kryptis nesutampa su skersinės jėgos veikimo kryptimi. Daroma papildoma prielaida, kurioje sakoma, kad tangentinių įtempimų vertikalios projekcijos skritulio plotyje pasiskirsto vienodai. Priėmus tokią prielaidą, vertikalios tangentinių įtempimų projekcijos apskaičiuojamos taikant Žuravskio formulę.



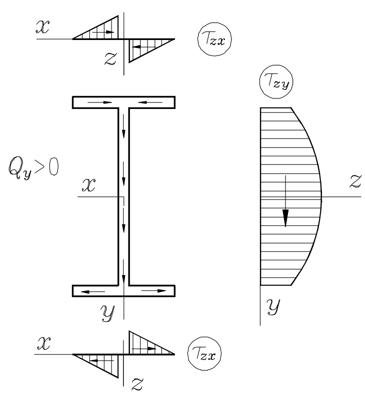
10.23 pav.



10.24 pav.

■ *Dvitėjis* (10.25 pav.). Dvitėjui tangentiniai įtempimai skaičiuojami atskirai sienutei ir lentynoms. Sienutėje veikiantys tangentiniai įtempimai apskaičiuojami pagal Žuravskio formulę, ir jie yra lygiagretūs skersinės jėgos veikimo krypčiai.

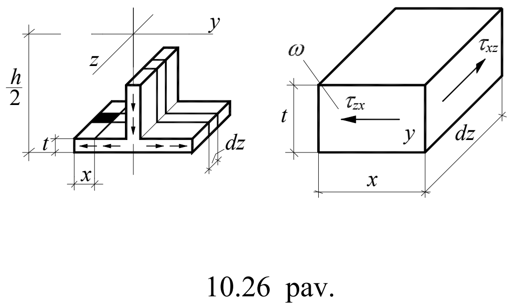
Lentynose atsiranda dviejų krypčių tangentiniai įtempimai: τ_{zy} ir τ_{zx}. Pirmieji yra nedideli, be to, jų nustatymas yra sudėtingas, nes negalioja Žuravskio formulė, todėl jie neskaičiuojami. Tangentiniai įtempimai τ_{zx} apskaičiuojami pagal Žuravskio formulę darant prielaidą, kad jie lentynos aukštyje pasiskirsto vienodai:



10.25 pav.

$$\tau_{zx}=\frac{Q_y \cdot |S_{x,w}|}{I_x \cdot t}, \qquad (10.18)$$

čia $S_{x,w}=x\cdot t\left(\frac{h}{\alpha}-\frac{t}{\alpha}\right)$ – atpjautos lentynėlės skerspjūvio statinis momentas neutralios ašies atžvilgiu (10.26 pav.).



10.26 pav.

Taigi tangentiniai įtempimai lentynose kinta tiesės dėsniu; nuo nulio lentynėlės krašte (x=0) iki ekstreminės reikšmės ties susikirtimu su sienute.

Srities, kurioje susikerta lentyna su sienute, įtemptoji būsena yra sudėtinga. Joje veikiantiems įtempimams apskaičiuoti nepakanka elementarių medžiagų mechanikos mokslo žinių.

10.5. Sijos skaičiavimas

■ Sija gali suirti dėl didžiausių normalinių, dėl didžiausių tangentinių įtempimų arba dėl kompleksinio normalinių ir tangentinių įtempimų poveikio.

■ Normalinių įtempimų atžvilgiu pavojingas tas sijos skerspjūvis, kuriame veikia didžiausias lenkimo momentas. Šiame skerspjūvyje pavojingiausi yra taškai, labiausiai nutolę nuo neutraliosios linijos. Normaliniai įtempimai pavojinguose taškuose turi tenkinti tokią stiprumo sąlygą:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W} \le R . \qquad (10.19)$$

■ Tangentinių įtempimų atžvilgiu pavojingas tas skerspjūvis, kuriame veikia didžiausia skersinė jėga. Šiame pjūvyje pavojingiausi dažniausiai yra taškai ties neutraliąja linija. Tangentiniai įtempimai pavojinguose taškuose turi tenkinti tokią stiprumo sąlygą:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max} |S_x|_{\max}}{I_x \cdot b} < R_s . \qquad (10.20)$$

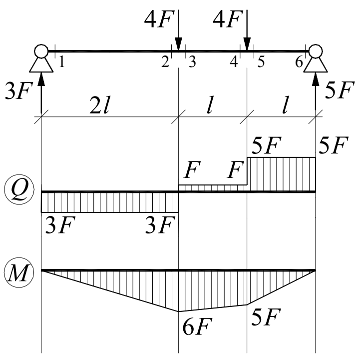
Kompleksinio normalinių ir tangentinių įtempimų poveikio atžvilgiu pavojingas tas skerspjūvis, kuriame abiejų įrąžų (M ir Q) reikšmės yra pakankamai didelės, pvz., skerspjūviai 2 ir 5, žr. 10.27 pav. Jeigu tokių įtartinų skerspjūvių yra keletas, reikia tikrinti kiekvieną iš jų. Šiuose skerspjūviuose pavojingiausi yra taškai, kuriuose įtempimų reikšmė, apskaičiuota priklausomai nuo pasirinktos stiprumo hipotezės, yra didžiausia, pvz., taškai A ir B, žr. 10.28 pav. Toks kompleksinis normalinių ir tangentinių įtempimų poveikis dažnai pavojingas plonasienio profilio sijose. Čia pavojinga šių įtempimų kombinacija veikia sienutėje ties jos sandūra su lentyna (žr. 10.28 pav.). Ji turi tenkinti stiprumo sąlygą:

$$\sigma_{det} \le R , \qquad (11.21)$$

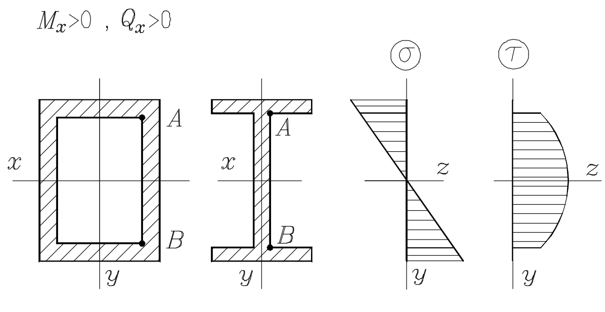
čia σ_{det} – skaičiuojamieji įtempimai.

Stiprumo sąlyga, naudojant trečiąją stiprumo teoriją, turi tokį pavidalą:

$$\sigma_{det} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le R . \qquad (10.22)$$



10.27 pav.



10.28 pav.

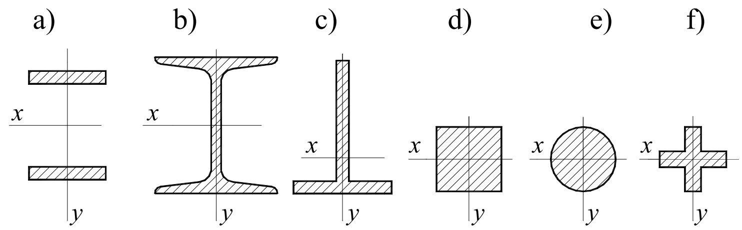
■ Praktiniai skaičiavimai rodo, kad dažniausiai naudojamose gana ilgose sijose lemiamą reikšmę turi normaliniai įtempimai, todėl labai dažnai sijos skaičiuojamos naudojant tik (10.19) stiprumo sąlygą.

10.7 pvz. ⌘⌘⌘

10.6. Racionali sijos skerspjūvio forma. Kintamo skerspjūvio sijos

■ Sija laikoma racionali, kai ji tenkina stiprumo sąlygą, esant minimaliam jos svoriui. Mažinti sijos svorį galima dviem būdais: pirma, keičiant skerspjūvio formą, antra, keičiant skerspjūvio matmenis.

■ Iš formulės $|\sigma|_{\max} = \dfrac{|M|}{W} \le R$ matyti, kad esant pastoviam plotui skerspjūvio forma yra tuo geresnė, kuo didesnis skerspjūvio atsparumo momentas. Prisiminkime, kad $W_x = \dfrac{I_x}{|y|_{max}}$, $I_x = \int\limits_A y^2 dF$. Taigi, esant pastoviam aukščiui, atsparumo momentas yra didesnis to skerspjūvio, kurio plotas sutelktas kraštiniuose skerspjūvio sluoksniuose. Idealizuotas tokio skerspjūvio variantas vadinamas idealiuoju skerspjūviu (10.29*a* pav.). Iš realių skerspjūvių racionaliausias yra dvitėjinis skerspjūvis (10.29*b* pav.), jeigu medžiaga nevienodai stipri tempimui ir gniuždymui (pvz., gelžbetonis) – tėjinis skerspjūvis (10.29*c* pav.), medinės sijos dažniausiai daromos stačiakampio skerspjūvio (10.29*d* pav.). Kitų skerspjūvių (skritulys, kryžius) forma neracionali, ir todėl jie sijoms gaminti paprastai nenaudojami (10.29*e*,*f* pav.).



10.29 pav.

■ Aptarsime sijos optimizavimą, keičiant jos skerspjūvio matmenis.

Pastovaus skerspjūvio sijose medžiaga visiškai išnaudojama tik tame skerspjūvyje, kuriame veikia maksimalus lenkimo momentas. Visuose kituose skerspjūviuose normaliniai įtempimai yra mažesni už projektinį stiprį. Keičiant sijos skerspjūvio matmenis galima pasiekti, kad bet kuriame jos skerspjūvyje didžiausi absoliutiniu didumu normaliniai įtempimai būtų lygūs projektiniam stipriui. Tokios sijos vadinamos vienodo stiprumo sijomis.

■ Išnagrinėsime, kaip keičiasi skerspjūvis gembinės vienodo stiprumo sijos, laisvajame gale apkrautos jėga *F*. Sijos skerspjūvio kitimo lygtį gausime prilyginę absoliutiniu didumu didžiausius normalinius įtempimus, veikiančius bet kuriame sijos skerspjūvyje, projektiniam stipriui: $|\sigma|_{\max}(z) = \dfrac{|M|(z)}{w(z)} = R$. Gavome, kad vienodo stiprumo sijos skerspjūvio atsparumo momentas turi kisti tokiu pačiu dėsniu, kaip ir lenkimo momentas:

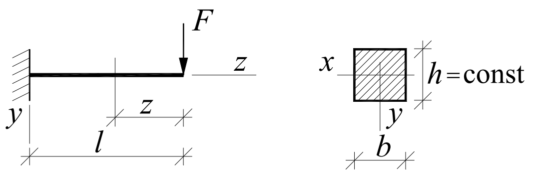
$$w(z) = \frac{|M|(z)}{R}. \tag{10.23}$$

Nagrinėkime stačiakampio skerspjūvio sijos du variantus. Tarkime, kad sijos skerspjūvio aukštis yra pastovus; nustatykime, kaip turi kisti skerspjūvio plotis, kad bet kuriame sijos skerspjūvyje normaliniai įtempimai absoliutiniu didumu būtų lygūs projektiniam stipriui, t.y. kad būtų tenkinama (10.23) lygtis (10.30 pav.).

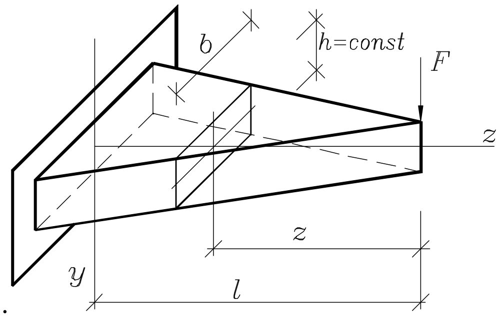
Tam tikslui išreikškime atsparumo momentą per skerspjūvio matmenis b ir h, o užrašę pusiausvyros lygtį, – lenkimo momentą per jėgą F. Įrašykime gautas išraiškas į (10.23) lygtį, išspręskime ją kraštinės b atžvilgiu:

$$w(z) = \frac{b(z)\cdot h^2}{\sigma} = \frac{|M|(z)}{R} = \frac{|-F\cdot z|}{R},$$
$$b(z) = \frac{\sigma\cdot F}{R\cdot h^2}z. \qquad (10.24)$$

Gavome, kad sijos skerspjūvio plotis kinta tiesiškai (10.31 pav.).



10.30 pav.

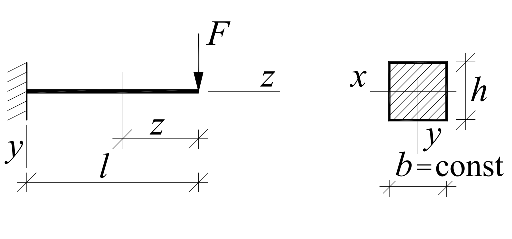


10.31 pav.

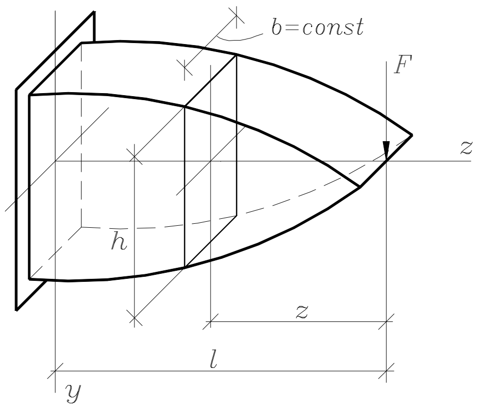
Dabar išspręskime kitą variantą: sijos skerspjūvio plotis pastovus, kinta jo aukštis (10.32 pav.):

$$w(z) = \frac{b\cdot h^2(z)}{\sigma} = \frac{|M|(z)}{R} = \frac{|-F\cdot z|}{R},$$
$$h(z) = \sqrt{\frac{\sigma\cdot F}{R\cdot b}z}. \qquad (10.25)$$

Gavome antros eilės kreivės lygtį (10.33 pav.).



10.32 pav.



10.33 pav.

10.3 tekstas	⌘ ⌘ ⌘

10.7. Lenkimo centras

■ Lenkiant siją, kai jėgų veikimo plokštuma sutampa su sijos svarbiausiąja plokštuma (*zx* arba *zy*), kuri nėra jos simetrijos plokštuma, sija ne tik išlinksta bet ir susisuka, (pvz., lovinio profilio sija, 10.34 pav.).

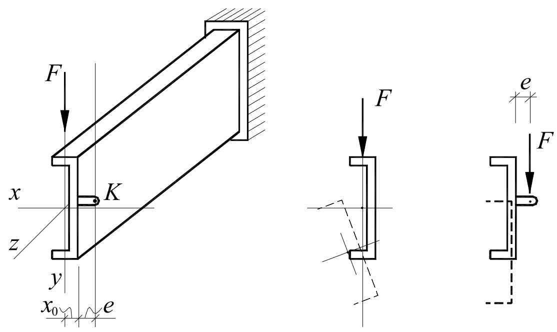
Jėgą pamažu perkeliant į lovio sienelės pusę galima rasti tokią jėgos padėtį (tašką C_e), kuriame pridėjus jėgą sija tik išlinks, bet nesusisuks. Šis taškas vadinamas lenkimo centru. Jo padėtis nustatoma nagrinėjant tangentinius įtempimus sijos skerspjūvyje (10.35 pav.).

Sienelėje veikiančių įtempimų atstojamoji apytiksliai (neįvertinus τ_{zy} veikiančių lentynose) lygi skersinei jėgai Q_y arba tiesiog jėgai *F*. O tangentinių įtempimų, veikiančių lentynose, atstojamosios sudaro jėgų porą, kuri ir susuka lenkiamą lovinę siją (10.36 pav.). Taigi jėga *F* turi būti pridėta taip, kad ji ne tik lenktų siją, bet ir suktų ją z ašies atžvilgiu kompensuodama šitaip dėl tangentinių įtempimų, veikiančių lentynose, susidariusį sukimo momentą. Atstumą, kuriuo reikia perstumti jėgą *F*, galima gauti iš pusiausvyros lygties (10.36, 10.37 pav.):

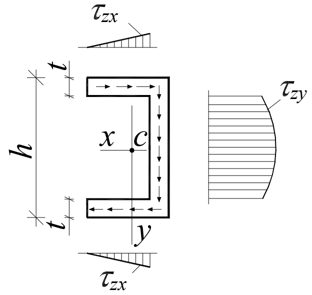
$$\sum M_{fk} = 0;$$

$$-Q_y(x_0 + e) + Q_x(h - t) = 0,$$

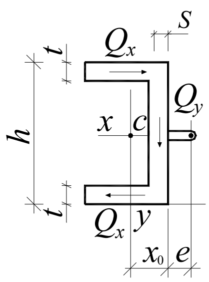
$$e = \frac{Q_x}{Q_y}(h - t) - x_0. \qquad (10.26)$$



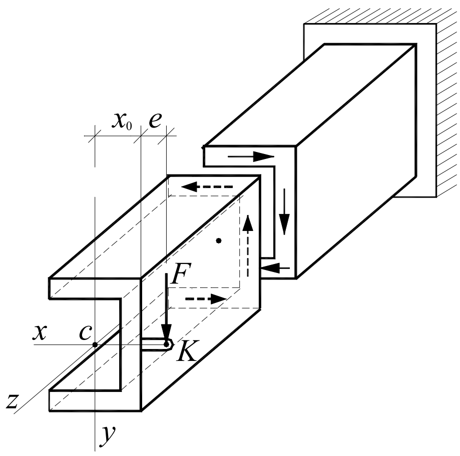
10.34 pav.



10.35 pav.



10.36 pav.



10.37 pav.

Kontroliniai klausimai

10.1. Kas yra lenkimas? Brėžinys.
10.2. Kaip skirstomas lenkimas pagal įrąžas, veikiančias sijos skerspjūvyje?
10.3. Koks lenkimas vadinamas grynuoju? Brėžinys.
10.4. Koks lenkimas vadinamas skersiniu? Brėžinys.
10.5. Kaip skirstomas lenkimas pagal sijos išsikreivinimo pobūdį?

10.6. Koks lenkimas vadinamas plokščiuoju? Brėžinys.

10.7. Koks lenkimas vadinamas įstrižuoju? Brėžinys.

10.8. Kas yra skersinių jėgų diagrama?

10.9. Kas yra lenkimo momentų diagrama?

10.10. Kas yra skaičiuojamieji skerspjūviai? Kur jie žymimi?

10.11. Kam lygi skersinės jėgos skaitinė reikšmė, kai ji skaičiuojama pjūvio metodu? Pavyzdys.

10.12. Kam lygi lenkimo momento skaitinė reikšmė, kai ji skaičiuojama pjūvio metodu? Pavyzdys.

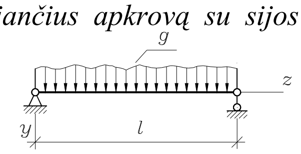
10.13. Užrašykite apkrovos ir sijos įrąžų diferencialinius ryšius.

10.14. Kaip iš skersinių jėgų diagramos galima gauti išskirstytosios apkrovos intensyvumą? Pavyzdys.

10.15. Kaip iš lenkimo momentų diagramos galima gauti skersinę jėgą? Pavyzdys.

10.16. Užrašykite apkrovos ir sijos įrąžų integralinius ryšius.

10.17. Parodytai sijai apytiksliai nubraižykite skersinių jėgų ir lenkimo momentų diagramas. Naudokite integralinius ryšius, susiejančius apkrovą su sijos įrąžomis.



10.18. Kaip kinta skersinė jėga ir lenkimo momentas sijos ruože, kuriame nėra išskirstytosios apkrovos? Brėžinys, formulės.

10.19. Kaip kinta skersinė jėga ir lenkimo momentas sijos ruože, kuriame veikia vienodai išskirstyta apkrova? Brėžinys, formulės.

10.20. Kaip kinta lenkimo momentas sijos ruože, kuriame skersinės jėgos lygios nuliui? Brėžinys, formulė.

10.21. Kokia tolydinės funkcijos savybė naudojama skaičiuojant ekstreminius lenkimo momentus?

10.22. Kokiomis sąlygomis (prielaidomis) remiantis gaunama sijos normalinių įtempimų formulė?

10.23. Užrašykite lenkimo momento ir normalinio įtempimo integralinį ryšį.

10.24. Kas yra neutralusis sluoksnis?

10.25. Kas yra neutralioji linija? Brėžinys.

10.26. Užrašykite linijinės deformacijos ir sijos ašies kreivio spindulio ryšį. Brėžinys.

10.27. Užrašykite lygčių sistemą, iš kurios gaunama normalinių įtempimų pasiskirstymo sijos skerspjūvyje formulė.

10.28. Užrašykite sijos ašies kreivio spindulio ir lenkimo momento ryšį.

10.29. Kaip pasiskirsto ir kam lygūs normaliniai įtempimai sijos skerspjūvyje? Brėžinys.

10.30. Kokių ašių atžvilgiu galima taikyti sijos normalinių įtempimų formulę?

10.31. Ką teigia Žuravskio prielaida.

10.32. Užrašykite Žuravskio formulę.

10.33. Parodykite, kaip pasiskirsto tangentiniai įtempimai sijos stačiakampiame skerspjūvyje. Brėžinys.

10.34. Parodykite, kaip pasiskirsto tangentiniai įtempimai dvitėjiniame skerspjūvyje. Brėžinys.

10.35. Užrašykite bendriausias sijos stiprumo sąlygų išraiškas.

10.36. Užrašykite sijos stiprumo sąlygą normalinių įtempimų atžvilgiu.

10.37. Užrašykite sijos stiprumo sąlygą tangentinių įtempimų atžvilgiu.

10.38. Koks plonasienės sijos skerspjūvis ir kokie jo taškai yra pavojingi sudėtiniam normalinių ir tangentinių įtempimų poveikiui? Brėžinys.

10.39. Kokie sijos skerspjūviai yra racionalūs? Brėžinys.

10.40. Kokia sija vadinama vienodo stiprumo sija?

10.41. Prie gembinės stačiakampio skerspjūvio sijos laisvojo galo pridėta jėga F. Nubraižykite vienodo stiprumo siją, kai h=const. *Paaiškinkite, kodėl gaunate tokios formos gembinę siją.*

10.42. Prie gembinės stačiakampio skerspjūvio sijos laisvojo galo pridėta jėga F. Nubraižykite vienodo stiprumo siją, kai b=const. *Paaiškinkite, kodėl gaunate tokios formos gembinę siją.*

10.43. Ką vadiname sijos skerspjūvio šlyties (lenkimo) centru? Brėžinys.