MATEMATINĖ FIZIKA
Paskaitų medžiaga

Aleksandras Krylovas

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

2010 m. lapkričio 23 d.

Turinys

PAGRINDINĖS TEMOS

1. Antrosios eilės tiesinių lygčių dalinėmis išvestinėmis klasifikacija
2. Hiperbolinio tipo lygtys. Koši uždavinys
3. Hiperbolinio tipo lygtys. Mišrusis uždavinys
4. Parabolinio tipo lygtys
5. Elipsinio tipo lygtys
6. Apibendrintosios funkcijos

LITERATŪRA

1. Paulauskas V. Matematinės fizikos lygtys. Vilnius: Mintis, 1974. 456 p.
2. Ambrazevičius A. Matematinės fizikos lygtys. D. 1. Vilnius: Aldorija, 1996. 380 p.
3. Ambrazevičius A., Domarkas A. Matematinės fizikos lygtys. D. 2. Vilnius: Aldorija, 1999. 380 p.
4. Kamuntavičius G. Matematinė fizika. Kaunas: VDU, 2008.
5. Karpickaitė V. Matematinės fizikos lygčių uždavinynas. Kaunas: KPI-1980.
6. Žiaukienė S. Matematinės fizikos lygtys. Vilnius: 1987.
7. Dosinas G., Tvarijonas P. Matematinės fizikos lygtys. Užduotys ir metodiniai nurodymai. Kaunas: Technologija, 1991.
8. Būda V., Rutkauskas S. Pagrindiniai matematinės fizikos uždaviniai ir sprendimo metodai. Vilnius: Technika, 1992.

skyrius 1

Lygtys dalinėmis išvestinėmis

1.1 Įvadas

Tarkime, kad $u(x, y)$ yra diferencijuojama funkcija. Jos pirmosios eilės dalines išvestines žymėsime:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = u_x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = u_y.$$

Antrosios eilės išvestinės:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx} = u_{xx}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy} = u_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy} = u_{xy}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx} = u_{yx}.$$

Prisiminkime[1], kad mišriosios išvestinės yra lygios:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Nagrinėsime lygčių dalinėmis išvestinėmis pavyzdžius.

1.1 pavyzdys. Raskime diferencialinės lygties

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = u(x, y)$$

[1] Suformuluokite šį teiginį griežtai.

bendrąjį sperendinį.
Sprendimas. Sprendžiame lygtį kaip paprastąją diferencialinę lygtį su parametru y:

$$\frac{du}{u} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int dx \Rightarrow \ln u = x + \ln C(y).$$

Taigi $u(x,y) = C(y)\, e^x$.

1.1 pratimas. Išspręskite Koši uždavinį $u'_y = u,\ u(x,y)|_{y=0} = \sin x$.
Atsakymas. $u(x,y) = \sin(x)\, e^y$.

1.2 pavyzdys. Įrodykime, kad funkcija $u(x,y) = \sin(x-y)$ yra diferencialinės lygties

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sprendinys.
Įrodymas. Funkcijos u dalinės išvestinės yra:

$$u_x = \cos(x-y),\ u_y = -\cos(x-y).$$

Įrašę šiuos reiškinius į lygtį, gauname tapatybę (tapačiai teisingą lygybę, esant visiems x, y). **Pastebėkime**, kad šios lygties **bendrasis** sprendinys yra $u(x,y) = \varphi(x-y)$, kai $\varphi(z)$ – bet kuri diferencijuojamoji funkcija.

1.2 pratimas. Išspręskite Koši uždavinį
$u'_x - u'_y = 0,\ u(x,y)|_{y=0} = \ln x$.
Atsakymas. $u(x,y) = \ln(x+y)$.

1.2 Pirmosios eilės diferencialinės lygtys dalinėmis išvestinėmis

Pirmosios eilės diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis su dviem nepriklausomais kintamaisiais x ir y bendruoju atveju užrašoma taip

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0. \tag{1.1}$$

Lygtis

$$a(u,x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(u,x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = c(u,x,y) \tag{1.2}$$

vadinama **tiesine** išvestinių atžvilgiu (dar vadinama *kvazitiesine*).

1.2.1 Homogeninė lygtis

Kai (1.2) lygtyje $c \equiv 0$, lygtis vadinama **homogenine**:

$$a(u,x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(u,x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{1.3}$$

Akivaizdu, kad funkcija $u \equiv const$ yra šios lygties sprendinys.

Raskime kitus *pirmosios eilės tiesinės homogeninės lygties dalinėmis išvestinėmis* sprendinius. Užrašykime paprastąją diferencialinę lygtį (**charakteristikų lygtį**):

$$\frac{dx}{a(u,x,y)} = \frac{dy}{b(u,x,y)},\ u = const. \tag{1.4}$$

Tarkime, kad $\Psi(x,y) = C - const$ yra šios paprastosios diferencialinės lygties integralas. Tada funkcija $u = \Psi(x,y)$ yra tiesinės homogeninės diferencialinės lygties dalinėmis išvestinėmis sprendinys.

1.3 pavyzdys. Raskime lygties

$$yu_x - xu_y = 0$$

bendrąjį sprendinį.
Sprendimas. Užrašome paprastąją diferencialinę (charaktestikų) lygtį

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}.$$

Jos bendrasis integralas $x^2 + y^2 = const$. Taigi turime $u(x,y) = \psi(x^2+y^2)$. Čia $\psi(z)$ – bet kuri diferencijuojamoji funkcija.

1.3 pratimas. Įrodykite, kad funcijos $u = \sin(x^2+y^2)$, $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $u = e^{-(x^2+y^2)^3}$ yra 1.3 pavyzdžio lygties sprendiniai.

Tarkime, kad turime n nepriklausomų kintamųjų. Tada homogeninė lygtis užrašoma taip

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0.$$

Atitinkama *simetrinio pavidalo* paprastųjų diferencialinių lygčių sistema yra

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n}.$$

Tarkime, kad $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yra nepriklausomi šios sistemos integralai. Tada funkcija

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \Phi\left(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \cdots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)\right)$$

yra diferencialinės lygties sprendinys. Čia Φ yra bet kuri tolydžiai diferencijuojama funkcija.

1.4 pavyzdys. Išspręsime tiesinę pirmos eilės lygtį dalinėmis išvestinėmis

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + z^2y\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Užrašome atitinkamą simetrinio pavidalo paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą:

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z^2y}.$$

Gauname integralus

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x} \Rightarrow dx = 2ydy \Rightarrow x = y^2 + C_1,$$

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{dz}{z^2y} \Rightarrow \ln x = -\frac{2}{z} + C_2.$$

Taigi bendrąjį lygties sprendinį galima išreikšti taip

$$u = \Phi\left(x - y^2, \ln x + \frac{2}{z}\right).$$

1.4 pratimas. Patikrinkite, kad funkcija
$u(\alpha, \beta)$, $\alpha = x - y^2$, $\beta = \ln x + \frac{2}{z}$
yra 1.4 pavyzdžio sprendinys.

1.2.2 Nehomogeninė pirmosios eilės lygtis

Nagrinėsime (1.2) nehomogeninę lygtį. Tarkime, kad sprendinys $u(x, y)$ užrašomas neišreikštine funkcija

$$U(x, y, u) = C - const, \ \frac{\partial U}{\partial u} \neq 0.$$

Tada turime dvi tapatybes:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0.$$

Taigi įrašę iš šių tapatybių gaunamus reiškinius

$$u_x = -\frac{U_x}{U_u},\ u_y = -\frac{U_y}{U_u}$$

į (1.2) lygtį, gauname lygtį

$$a(u,x,y)\frac{\partial U}{\partial x} + b(u,x,y)\frac{\partial U}{\partial y} + c(u,x,y)\frac{\partial U}{\partial u} = 0.$$

Užrašome atitinkamą paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą

$$\frac{dx}{a(u,x,y)} = \frac{dy}{b(u,x,y)} = \frac{du}{c(u,x,y)},\ U = C - const. \tag{1.5}$$

1.5 pavyzdys. Išspręskime diferencialinę lygį

$$xu_x + yu_y + u = 0.$$

Sprendimas. Užrašome charakteristikų lygtis

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{-u}.$$

Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\ln x = \ln y + \ln C_1,\ \ln x = -\ln u + \ln C_2.$$

Taigi $u = \dfrac{C_2}{x}$, $\dfrac{x}{y} = C_1$, $C_2 = \varphi\left(C_1\right)$, $u(x,y) = \dfrac{\varphi\left(\frac{x}{y}\right)}{x}$.
Patikrinkime, kad funkcija u yra diferencialinės lygties sprendinys:

$$u_x = -\frac{\varphi}{x^2} + \frac{\varphi'}{xy},\ u_y = -\frac{\varphi'}{y^2},$$

$$x\left(-\frac{\varphi}{x^2} + \frac{\varphi'}{xy}\right) + y\left(-\frac{\varphi'}{y^2}\right) + \frac{\varphi}{x} = 0.$$

1.3 Kintamųjų keitimas

Tarkime, kad nepriklausomi kintamieji x, y keičiami taip:

$$x = \varphi(\xi, \nu), \;\; y = \psi(\xi, \nu). \tag{1.6}$$

Raskime funkcijos $v(\xi, \nu) = u(x, y)$ dalines išvestines:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \nu}.$$

Pareikalaukime, kad **Jakobianas** būtų nelygus nuliui[2]:

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_\xi & \psi_\xi \\ \varphi_\nu & \psi_\nu \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.7}$$

Tada funkcijos $u(x, y)$ dalinės išvestinės išreiškiamos funkcijos $v(\xi, \nu)$ dalinėmis išvestinėmis:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_\xi & \psi_\xi \\ \varphi_\nu & \psi_\nu \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v_\xi \\ u_\nu \end{pmatrix}$$

1.5 pratimas. Pakeiskite kintamuosius $x = \xi \sin \nu$, $y = \xi \cos \nu$, kai $u(x, y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$. Raskite funkciją $v(\xi, \nu) = u(x, y)$.

1.3.1 Laplaso operatorius

1.1 apibrėžimas. Reiškinys

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

žymimas Δu, t. y.:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

arba trimačiu atveju

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ir vadinamas **Laplaso operatoriumi**.

[2] (1.7) sąlyga garantuoja atvirkštinės transformacijos egzistavimą, t. y. galimybę išreikšti naujuosius kintamuosius ξ ir ν seniaisiais kintamaisiais x, y.

Užrašykime Laplaso operatorių **polinėse** koordinatėse:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Tada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Apskaičiuokime dalines išvestines:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\varphi.$$

Diferencijuojame lygybę $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ pagal x ir y:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2},$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}.$$

Taigi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Perrašome dalines išvestines

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Užrašykime antrąsias išvestines:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - 2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.$$

Taigi Laplaso operatorius polinėse koordinatėse užrašomas taip:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Pastebėkime, kad reiškinį galima perrašyti tokiu pavidalu:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

1.6 pratimas. Įrodykite, kad Laplaso operatorius sferinėse koordinatėse

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,\ \ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

užrašomas taip:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

1.4 Koši ir Kovalevskajos teorema

Normalioji pavidalo sistema užrašoma taip:

$$\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^{n_j}} = F_j \left(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_N, \dots, \; \frac{\partial^k u_i}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}, \cdots \right),$$

$$k_0 + k_1 + \dots + k_n = k \leqslant n_j, \; k_0 < n_j, \; i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Koši uždavinys:

$$\left. \frac{\partial^k u_j}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} = \varphi_j^{(k)} (x_1, x_2, \dots, x_n), \; k = 0, 1, \dots, n_j - 1.$$

1.1 teorema. *Tarkime, kad funkcijos F_j yra analizinės tam tikroje taško $\left(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\right)$ aplinkoje, funkcijos $\varphi_j^{(k)}$ analizinės taško $\left(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ aplinkoje. Tada egzistuoja tokia taško $\left(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ aplinka, kurioje Koši uždavinys turi vienintelį analizinį sprendinį.*

skyrius 2

Antrosios eilės lygčių dalinėmis išvestinėmis klasifikacija

2.1 Antrosios eilės diferencialinė lygtis

Antrosios eilės diferencialinė lygtis dalinėmis išvestinėmis su dviem nepriklausomais kintamaisiais x ir y bendruoju atveju užrašoma taip:

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0.$$

Lygtis

$$a(u,x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(u,x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(u,x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0.$$

vadinama **tiesine** aukštesniųjų išvestinių atžvilgiu. Ši lygtis dar vadinama **kvazitiesine**. Nagrinėsime antrosios eilės **tiesinę** lygtį dalinėmis išvestinėmis:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0. \tag{2.1}$$

Lygties koeficientai a, b, c, d, e, f, g priklauso tik nuo kintamųjų x, y.

Pakeiskime kintamuosius $\xi = \varphi(x,y)$, $\nu = \psi(x,y)$. Priminkime, kad (1.7) Jakobianas nelygus nuliui. Perrašome dalines išvestines (žr. (1.6) formules):

$$\left.\begin{array}{l} u_x = u_\xi \xi_x + u_\nu \nu_x, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\nu \nu_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\nu}\xi_x\nu_x + u_{\nu\nu}\nu_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\nu \nu_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\nu}(\xi_x\nu_y + \xi_y\nu_x) + u_{\nu\nu}\nu_x\nu_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\nu \nu_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\nu}\xi_y\nu_y + u_{\nu\nu}\nu_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\nu \nu_{yy}. \end{array}\right\}$$

Tada (2.1) lygtis perrašoma taip:

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\nu} + Cu_{\nu\nu} + F = 0. \tag{2.2}$$

Čia

$$\begin{array}{l} A = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \\ B = a\xi_x\nu_x + b(\xi_x\nu_y + \nu_x\xi_y) + c\xi_y\nu_y, \\ C = a\nu_x^2 + 2b\nu_x\nu_y + c\nu_y^2, \\ F = \alpha u_\xi + \beta u_\nu + \gamma u + \delta. \end{array}$$

Pastebėkime, kad lygtis lieka tiesinė.

Pasirinkime kintamuosius ξ, ν taip, kad koeficientas A būtų lygus nuliui:

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \tag{2.3}$$

2.1 teorema. Tarkime, kad funkcija $\xi(x, y)$ yra (2.3) lygties sprendinys. Tada reiškinys $\xi(x, y) = const$ yra diferencialinės (**charakteristikų**) lygties

$$a(dy)^2 - 2bdydx + c(dx)^2 = 0$$

bendrasis integralas. Galioja ir atvirkštinis teiginys: jei $\xi(x, y) = const$ yra šios paprastosios diferencialinės lygties bendrasis integralas, tai funkcija $\xi(x, y)$ yra (2.3) lygties sprendinys.

Pastebėkime, kad jei $y = y(x)$ yra lygties $\xi(x, y) = const$ sprendinys, tai $d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy = 0$ ir $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\xi_x}{\xi_y}$.

2.2 Antrosios eilės tiesinių diferencialinių lygčių klasifikacija

Taikydami kintamųjų keitinį antrosios eilės diferencialinę lygtį su n nepriklausomais kintamaisiais x_1, x_2, ..., x_n užrašome **kanoniniu pavidalu**:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \tag{2.4}$$

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

čia $\alpha_j \in \{0, 1, -1\}$ ir $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| \neq 0$.

2.1 apibrėžimas. (2.4) lygtį vadiname **elipsine**, kai visi koeficientai α_j yra vienodo ženklo ir nelygūs nuliui; kai visi koeficientai α_j nelygūs nuliui ir bent du iš jų yra skirtingo ženklo, lygtį vadiname **hiperboline**; kai tarp koeficientų α_j yra bent vienas lygus nuliui, lygtį vadiname **paraboline**.

2.2.1 Pagrindinės lygtys

Lygtis

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

vadinama **Laplaso** lygtimi ir yra elipsinio tipo.

Lygtis

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}$$

yra įvairių bangų sklidimo matematinis modelis ir yra hiperbolinio tipo.

Lygtis

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t$$

vadinama **šilumos laidumo** lygtimi ir yra parabolinio tipo.

Pažymėję Δu antrosios eilės dalinių išvestinių sumą (Laplaso operatorių; žr. 1.1, 8 p.) šias lygtis galime perrašyti taip:

$$\Delta u = \begin{cases} 0, & \text{elipsinio tipo lygtis} \\ u_{tt}, & \text{hiperbolinio tipo lygtis} \\ u_t, & \text{parabolinio tipo lygtis} \end{cases}$$

2.1 pavyzdys. Perrašykime diferencialinę lygtį

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

kanoniniu pavidalu.

Sprendimas. Užrašome charakteristikų lygtį:

$$x^2\ (dy)^2 - 2xy\, dx\, dy + y^2\ (dx))^2 = 0 \Rightarrow (xdy - ydx)^2 = 0.$$

Gauname tik vieną integralą $y = Cx$ (lygtis yra parabolinė). Keičiame kintamuosius: $\xi = \dfrac{y}{x}$ ir $\nu = y$. Tada

$$\xi_x = -\frac{y}{x^2},\ \nu_x = 0,\ \xi_y = \frac{1}{x},\ \nu_y = 1,$$

$$u_x = u_\xi \left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$u_y = u_\xi \frac{1}{x} + u_\nu,$$

$$u_{xx} = \frac{y^2}{x^4} u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} u_\xi,$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\left(-\frac{y}{x^3}\right) - u_\xi \frac{1}{x^2} + u_{\xi\nu}\left(-\frac{y}{x^2}\right),$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\frac{1}{x^2} + u_{\xi\nu}\frac{2}{x} + u_{\nu\nu},$$

Įrašę gautus reiškinius į lygtį gauname jos kanoninį pavidalą:

$$u_{\nu\nu} = 0.$$

Šios lygties bendrasis spendinys (kai $x \neq 0$) yra $u = \nu\varphi(\xi) + \psi(\xi)$ arba $u(x, y) = y\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2.3 Lygties su dviem nepriklausomais kintamaisiais pertvarkymas į kanoninį pavidalą

Lygties

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{2.5}$$

charakteristikų diferencialinė lygtis

$$Ady^2 - 2Bdydx + Cdx^2 = 0. \tag{2.6}$$

Perrašome charakteristikų lygtį:

$$\left(Ady - \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)dx\right) \cdot \left(Ady - \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)dx\right) = 0.$$

Priklausomai nuo *diskriminanto* $D = B^2 - AC$ ženklo, gauname:
1) $D > 0$ – hiperbolinė lygtis;
2) $D = 0$ – parabolinė lygtis;
3) $D < 0$ – elipsinė lygtis.

2.3.1 Hiperbolinis atvejis

Tarkime, kad $\varphi(x,y) = const$ ir $\psi(x,y) = const$ yra du (2.6) lygties integralai. Tada keitinys

$$\xi = \varphi(x,y),\ \nu = \psi(x,y)$$

leidžia perrašyti (2.5) lygtį **antruoju** kanoniniu pavidalu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \nu} = \tilde{F}\left(\xi, \nu, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \nu}\right).$$

Pastebėkime, kad pakeitę kintamuosius $\xi = x - y$, $\nu = x + y$, gausime šios lygties **pirmąjį** kanoninį pavidalą:

$$u_{xx} - u_{yy} = F(\cdots).$$

2.2 pavyzdys. Perrašykime lygtį

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

kanoniniu pavidalu.
Sprendimas. Nagrinėsime atvejį $x > 0,\ y > 0$, kai lygtis yra hiperbolinė: $D = 0^2 - x^2(-y^2) = x^2y^2 > 0$. Sudarome charakteristikų lygtį:

$$x^2dy^2 - y^2dx^2 = 0 \Rightarrow xdy \pm ydx = 0.$$

Gauname du integralus: $\ln y \pm \ln x = \ln C^{\pm}$. Taigi reikia pakeisti kintamuosius:

$$\xi = xy,\ \nu = \frac{y}{x}.$$

Užrašome lygties kanoninį pavidalą:

$$u_{\xi\nu} = \frac{1}{2\xi}u_\nu,\ \xi > 0, \nu > 0.$$

2.3.2 Parabolinis atvejis

Charakteristikų lygtis šiuo atveju yra pilnas kvadratas

$$Ady^2 - 2Bdydx + Cdx^2 = \left(\sqrt{A}dy - \sqrt{C}dx\right)^2 = 0$$

ir gauname tik vieną nepriklausomą integralą $\varphi(x,y) = const$. Keičiame kintamuosius $\xi = \varphi(x,y)$, o kitą kintamąjį ν galima pasirinkti laisvai (žr. 2.1 pavyzdį, 15 p.) Nepamirškime, kad jakobianas turi būti nelygus nuliui.

2.3.3 Elipsinis atvejis

Charakteristinės lygties pirmieji integralai bus kompleksinės jungtinės funkcijos

$$\xi + i\nu = \varphi(x, y), \; \xi - i\nu = \psi(x, y).$$

2.3 pavyzdys. Perrašykime lygį

$$y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

kanoniniu pavidalu.
Sprendimas. Užrašome charakteristikų lygį

$$y^2 dy^2 + x^2 dx^2 = 0 \Rightarrow (ydy + ixdx)\,(ydy - ixdx) = 0.$$

Gauname du pirmuosius integralus: $\frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{2}ix^2 = C^{\pm}$. Keičiame kintamuosius: $\xi = \frac{1}{2}y^2$, $\nu = \frac{1}{2}x^2$. Lygties kanoninis pavidalas yra

$$u_{\xi\xi} + u_{\nu\nu} + \frac{1}{2\xi}u_\xi + \frac{1}{2\nu}u_\nu = 0.$$

2.4 Lygtys su pastoviais koeficientais

2.4.1 Hiperbolinis atvejis

Lygties su pastoviais koeficientais charakteristikos yra tiesės. Todėl kintamuosius galima keisti taip: $\xi = x + \alpha y, \; \nu = x + \beta y$. Tada turime

$$\begin{aligned}
&u_x = u_\xi + u_\nu,\\
&u_y = \alpha u_\xi + \beta u_\nu,\\
&u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\nu} + u_{\nu\nu},\\
&u_{xy} = \alpha u_{\xi\xi} + (\alpha+\beta)u_{\xi\nu} + \beta u_{\nu\nu},\\
&u_{yy} = \alpha^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha\beta u_{\xi\nu} + \beta^2 u_{\nu\nu}.
\end{aligned}$$

2.4 pavyzdys. Perrašykime lygtį

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$$

kanoniniu pavidalu.
Sprendimas. Gauname

$$u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\nu} + u_{\nu\nu} + 2\left(\alpha u_{\xi\xi} + (\alpha+\beta)u_{\xi\nu} + \beta u_{\nu\nu}\right) - 3\left(\alpha^2 u_{\xi\xi} + 2\alpha\beta u_{\xi\nu} + \beta^2 u_{\nu\nu}\right) = 0.$$

Iš čia

$$\left(1+2\alpha-3\alpha^2\right)u_{\xi\xi}+2\left(1+\alpha+\beta-3\alpha\beta\right)u_{\xi\nu}+\left(1+2\beta-3\beta^2\right)u_{\nu\nu}=0.$$

Taigi, kai $\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\beta=1$ gauname lygtį

$$u_{\xi\nu}=0.$$

2.4.2 Elipsinis atvejis

2.5 pavyzdys. Perrašykime lygtį

$$u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}=0$$

kanoniniu pavidalu.
Sprendimas. Užrašome charakteristinę lygtį

$$dy^2-2\,dx\,dy+5\,dx^2=(dy-(1+2i)\,dx)\,(dy-(1-2i)\,dx)=0.$$

Taigi turime $y=x\pm 2ix+C^{\pm}$. Keičiame kintamuosius: $\xi=y-x$, $\nu=2x$. Todėl

$$\begin{aligned}
&u_x=-u_\xi+2u_\nu,\\
&u_y=u_\xi,\\
&u_{xx}=u_{\xi\xi}-4u_{\xi\nu}+4u_{\nu\nu},\\
&u_{xy}=-u_{\xi\xi}+2u_{\nu\xi},\\
&u_{yy}=u_{\xi\xi}.
\end{aligned}$$

Perrašome lygtį:

$$u_{\xi\xi}-4u_{\xi\nu}+4u_{\nu\nu}+2\left(-u_{\xi\xi}+2u_{\nu\xi}\right)+5u_{\xi\xi}=$$

$$(1-2+5)\,u_{\xi\xi}+(-4+4)\,u_{\xi\nu}+4u_{\nu\nu}=4(u_{\xi\xi}+u_{\nu\nu})=0.$$

2.5 Lygties su pastoviais koeficientais prastinimas

Antrosios eilės tiesinę lygtį

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+au_x+bu_y+cu+f=0$$

galima pervarkyti į pavidalą, kai koeficientai $a=b=0$.

Keičiame kintamąjį

$$u(x,y)=v(x,y)\,e^{\lambda x+\mu y}.$$

Turime

$$\begin{aligned}
&u_x = (v_x + \lambda v)\, e^{\lambda x + \mu y},\\
&u_y = (v_y + \mu v)\, e^{\lambda x + \mu y},\\
&u_{xx} = (v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v)\, e^{\lambda x + \mu y},\\
&u_{xy} = (v_{xy} + \lambda v_y + \mu v_x + \lambda\mu v)\, e^{\lambda x + \mu y},\\
&u_{yy} = (v_{yy} + 2\mu v_y + \mu^2 v)\, e^{\lambda x + \mu y}.
\end{aligned}$$

Taigi reikia paimti, pavyzdžiui, $\lambda = -\dfrac{a}{2}$, $\mu = -\dfrac{b}{2}$, kai lygtis yra elipsinė, ir gausime kanonines formas:

$v_{xx} + v_{yy} + cv + f = 0$ – elipsinis tipas;

$\left.\begin{array}{l} v_{xy} + cv + f = 0 \\ v_{xx} - v_{yy} + cv + f = 0 \end{array}\right]$ – hiperbolinis tipas;

$v_{xx} + bv_y + f = 0$ – parabolinis tipas.

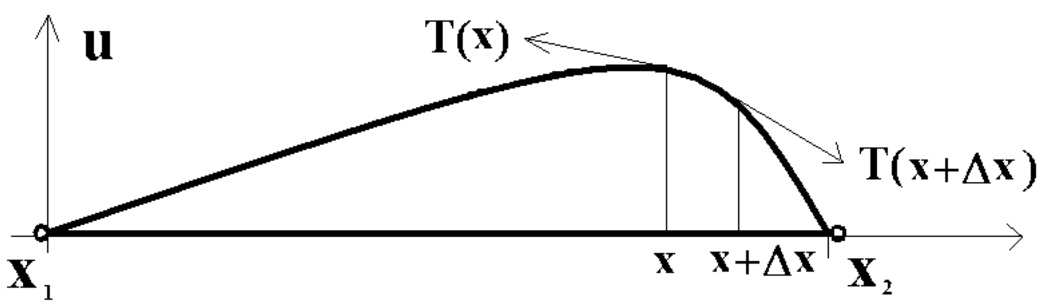
skyrius 3

Stygos svyravimo lygtis

3.1 Stygos svyravimų lygties išvedimas

3.1.1 Modeliavimo prielaidos

- Styga – ištemptas absoliučiai lankstus siūlas
- Susidariusi įtempimo jėga veikia liestinės kryptimi
- Styga svyruoja vienoje plokštumoje
- Svyravimų amplitudė maža



3.1 pav.: Styga įtvirtinta taškuose $x = X_1$ ir $x = X_2$

Žymėjimai
$u(t, x)$ – stygos nukrypimo taške x laiko momentu t funkcija;

$\rho(x)$ – stygos linijinis tankis taške x: $\int\limits_x^{x+\Delta x} \rho(x)\,dx \approx \Delta x \rho(x)$ – stygos atkarpos $[x, x+\Delta x]$ masė;
$T(x)$ taške x veikianti liestinės kryptimi įtempimo jėga;
α – stygos liestinės kampas su x ašimi;
$F(t,x)$ – stygos elementą veikianti išorinė jėga (linijinis jėgos tankis).

Kampą α imsime mažą: $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\cos\alpha \approx 1$;
$\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ – stygos taško x judėjimo greitis;
$\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$ – stygos taško x judėjimo pagreitis.

Remiantis antruoju Niutono dėsniu užrašome

$$\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = T(x+\Delta x)\sin\alpha' - T(x)\sin\alpha + F(t,x)\Delta x.$$

Iš čia gauname:

$$\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = T(x+\Delta x)\frac{\partial u(t,x+\Delta x)}{\partial x} - T(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t,x)\Delta x.$$

Padaliję abi lygybės puses iš Δx ir perėję prie ribos, kai $\Delta x \to 0$, gauname skersinių stygos svyravimų lygtį

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(t,x). \tag{3.1}$$

Jei stygos neveikia išilginė išorinė jėga ($F \equiv 0$) ir styga yra homogeninė: $\rho \equiv \rho_0$, $T \equiv T_0$, užrašome (3.1) lygties atskirą atvejį

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{3.2}$$

čia $a = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho_0}}$.

3.1.2 Kraštinės ir pradinės sąlygos

Styga itvirtinta taškuose $x = X_1$ ir $x = X_2$. Todėl galime užrašyti **kraštines sąlygas**:

$$u(t,X_1) = 0,\ u(t,X_2) = 0. \tag{3.3}$$

Tarkime, kad pradiniu laiko momentu $t = 0$ yra žinoma stygos nuokrypių funkcija $u_0^{(0)}(x)$ ir kiekvieno jos taško x judėjimo greitis $u_0^{(1)}(x)$. Tada formuluojame **pradines sąlygas**:

$$u(0,x) = u_0^{(0)}(x),\ u_t'(0,x) = u_0^{(1)}(x). \tag{3.4}$$

3.2 Dalambero metodas

Pakeiskime (3.2) lygties kintamuosius: $\xi = x - at$, $\nu = x + at$. Gauname antrąjį lygties kanoninį pavidalą:

$$u_{\xi\nu} = 0,$$

kurios bendrasis sprendinys yra

$$u(\xi,\nu) = f(\xi) + g(\nu) \Rightarrow u(x-at, x+at) = f(x-at) + g(x+at).$$

Raskime funkcijas f ir g, kai žinomos (3.4) pradinės sąlygos:

$$(f(x-at) + g(x+at))|_{t=0} = f(x) + g(x) = u_0^{(0)}(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(x-at) + g(x+at)\right)|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = u_0^{(1)}(x).$$

Integuojame antrąją lygtį:

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} u_0^{(1)}(s)\,ds + C$$

ir gauname funkcijas

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0^{(0)}(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} u_0^{(1)}(s)\,ds - C,$$

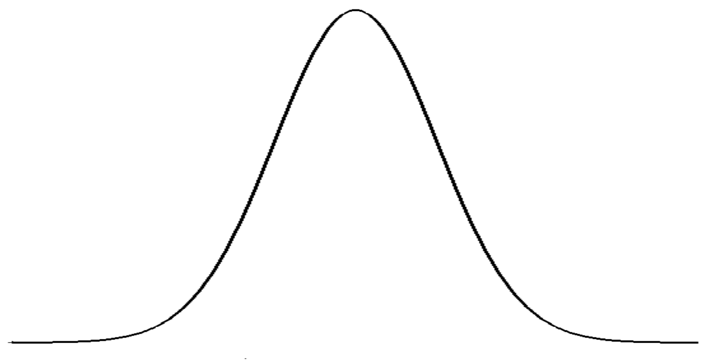
$$g(x) = \frac{1}{2}u_0^{(0)}(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} u_0^{(1)}(s)\,ds + C.$$

Taigi gauname Dalambero formulę

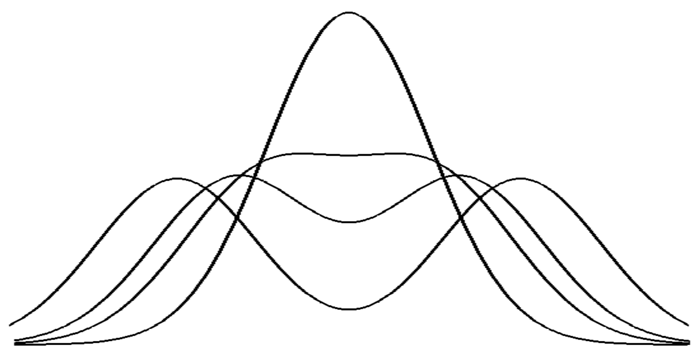
$$u(t,x) = \frac{u_0^{(0)}(x-at) + u_0^{(0)}(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_0^{(1)}(s)\,ds. \tag{3.5}$$

3.3 Dalambero formulės tyrimas

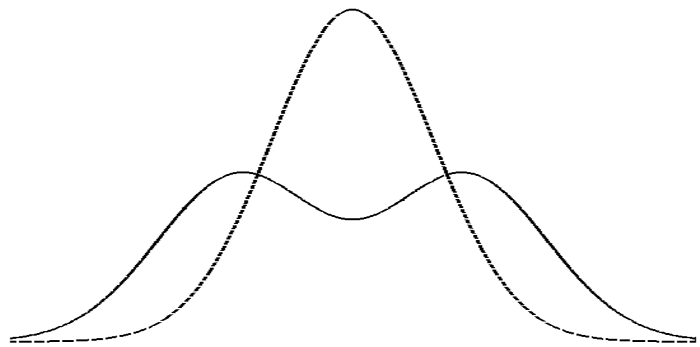
Nagrinėsime (3.5) formulę, kai $u_0^{(0)}(x) = \varphi(x)$, $u_0^{(1)}(x) \equiv 0$ ir funkcijos φ grafikas pavaizduotas paveiksle.



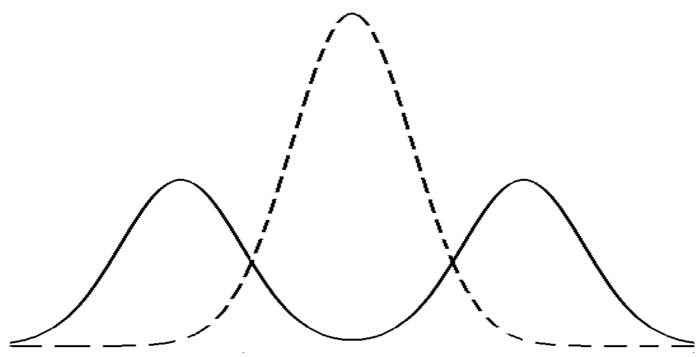
3.2 pav.: Funkcijos $\varphi(x)$ grafikas



3.3 pav.: Funkcijos (3.5) grafikas esant skirtingoms t reikšmėms



3.4 pav.: Funkcijos (3.5) grafikas laiko momentu $t = t_1 > 0$



3.5 pav.: Funkcijos (3.5) grafikas laiko momentu $t = t_2 > t_1$

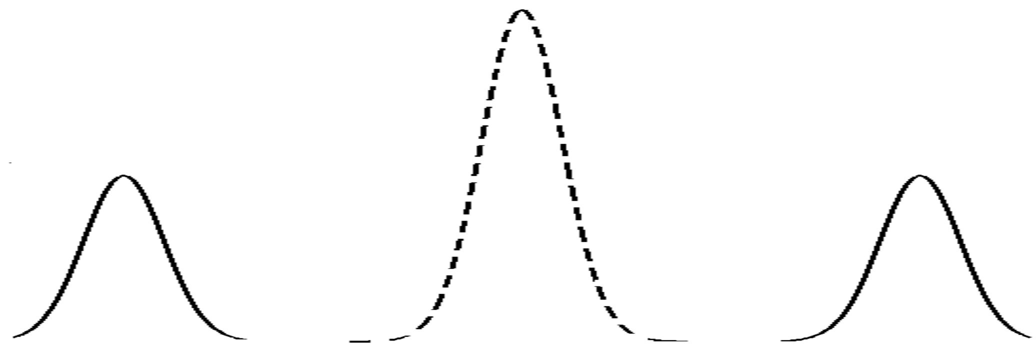
3.4 Nehomogeninės lygties sprendimas

Nagrinėsime tiesinę nehomogeninę stygos svyravimo lygtį

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x) \tag{3.6}$$

Parodykime, kad funkcija

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\xi)\, d\xi \tag{3.7}$$



3.6 pav.: Funkcijos (3.5) grafikas laiko momentu $t = t_3 > t_2$

yra (3.6) lygties sprendinys. Pažymėkime

$$F(t,x) = \int_0^x f(t,\xi)\, d\xi.$$

Pastebėkime, kad iš čia išplaukia

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \equiv F'_x = f(t,x). \tag{3.8}$$

Tada

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(F(\tau, x + a(t-\tau)) - F(\tau, x - a(t-\tau))\right) d\tau$$

ir gausime

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) = \frac{1}{2a} \left(F(\tau, x + a(t-\tau)) - F(\tau, x - a(t-\tau))\right)|_{\tau=t} +$$

$$\frac{1}{2a}\, a \int_0^t \left(F'_x(\tau, x + a(t-\tau)) + F'_x(\tau, x - a(t-\tau))\right) d\tau = 0 + \frac{1}{2} \int_0^t \left(F'_x + F'_x\right) d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(t,x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(F'_x - F'_x\right) d\tau,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) = \frac{1}{2}\left(F'_x(\tau, x+a(t-\tau)) + F'_x(\tau, x-a(t-\tau))\right)\Big|_{\tau=t} +$$

$$\frac{a}{2}\int_0^t \left(F''_{xx} - F''_{xx}\right)\, d\tau,$$

$$\int_0^t \left(F'_x + F'_x\right)\, d\tau,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x) = \frac{1}{2a}\int_0^t \left(F''_{xx} - F''_{xx}\right)\, d\tau.$$

Įrašome gautus reiškinius į (3.6) ir taikome (3.8) formulę:

$$\Phi''_{tt} - a^2\Phi''_{xx} = f(t,x).$$

3.1 pavyzdys. Funkcija

$$\Phi(t,x) = \frac{1}{2\cdot 3}\int_0^t d\tau \int_{x-3(t-\tau)}^{x+3(t-\tau)} \cos(\xi - 5\tau)\, d\xi =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^t \left(\sin(x+3(t-\tau)-5\tau) - \sin(x-3(t-\tau)-5\tau)\right)\, d\tau =$$

$$\frac{1}{48}\cos(x-5t) - \frac{1}{48}\cos(x+3t) - \frac{1}{12}\cos(x-5t) + \frac{1}{12}\cos(x-3t) =$$

$$-\frac{1}{16}\cos(x-5t) - \frac{1}{48}\cos(x+3t) + \frac{1}{12}\cos(x-3t)$$

yra diferencialinės lygties

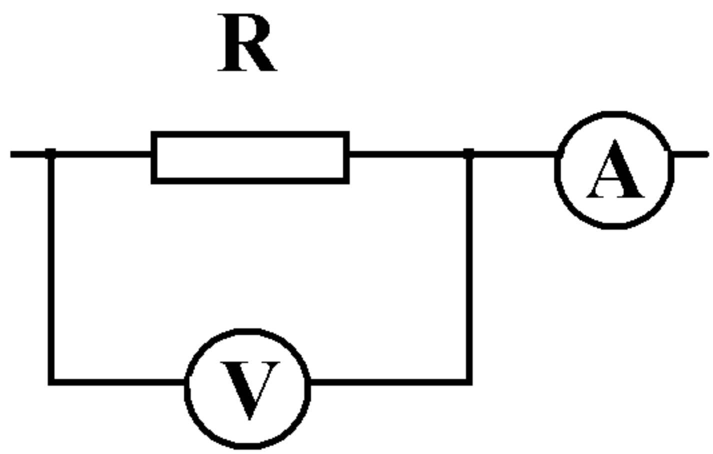
$$u_{tt} - 9u_{xx} = \cos(x-5t)$$

sprendinys.

3.5 Kiti hiperbolinio tipo matematiniai modeliai

3.5.1 Ilgosios linijos lygtys

Prisiminkime elektrinės grandinės elementų diferencialinius sąryšius.



3.7 pav.: Varža

Varža

Elektros srovės (3.7 pav.) stiprumui $i(t)$ ir įtampai $u(t)$ galioja lygybės

$$u(t) = R\,i(t) \text{ arba } i(t) = \frac{1}{R}\,u(t).$$

Talpa

Galioja (3.8 pav.) lygybė:

$$i(t) = C\,\frac{d\,u(t)}{dt}.$$

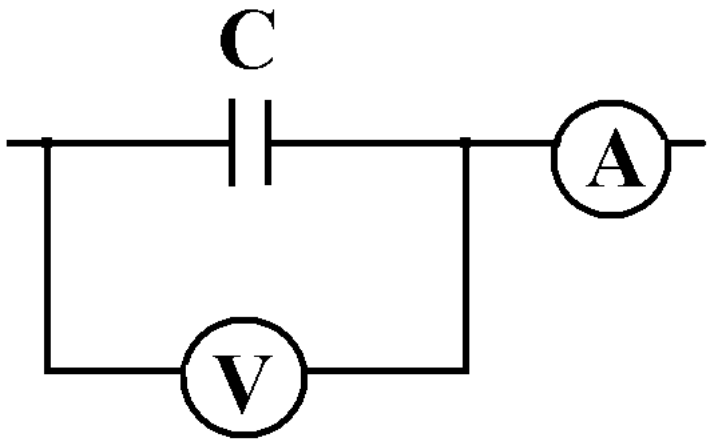
Induktyvumas

Galioja (3.9 pav.) lygybė:

$$u(t) = L\,\frac{d\,i(t)}{dt}.$$

Ilgosios linijos (telegrafo) lygtys

Esant dideliam atstumui $x_2 - x_1 \gg 1$ voltmetro ir ampermetro rodmenys taškuose x_1 ir x_2 (3.10 pav.) bendruoju atveju bus skirtingi. Todėl funkcijos i ir u priklauso nuo erdvinės koordinatės x, t. y. turime paskirstytų



3.8 pav.: Talpa

parametrų sistemą. Nagrinėsime ilgosios linijos mažą ($|\Delta x| \ll 1$) elementą (3.11 pav.). Kai linijos parametrai R (varža), L (saviindukcija), C (talpa), G (skersinis izoliacijos laidumas – nuotekis) nepriklauso nuo x, ji vadinama *homogenine*. Taikome Omo ir Kirchhofo dėsnius mažam linijos elementui:

$$u(t,x) - u(t,x+\Delta x) = i(t,x)\frac{R}{2}\Delta x + \frac{\partial i(t,x)}{\partial t}\frac{L}{2}\Delta x +$$

$$i(t,x+\Delta x)\frac{R}{2}\Delta x + \frac{\partial i(t,x+\Delta x)}{\partial t}\frac{L}{2}\Delta x,$$

$$i(t,x) - i(t,x+\Delta x) = \left(u(t,x) - i(t,x)\frac{R}{2}\Delta x - \frac{\partial i(t,x)}{\partial t}\frac{L}{2}\Delta x\right) G\Delta x +$$

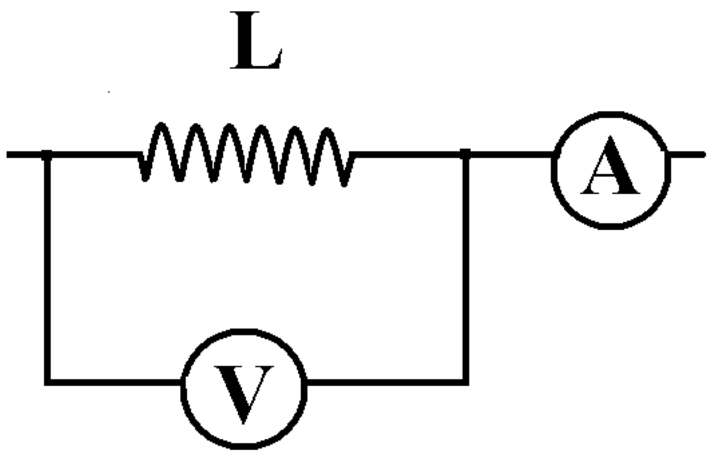
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x) - i(t,x)\frac{R}{2}\Delta x - \frac{\partial i(t,x)}{\partial t}\frac{L}{2}\Delta x\right) C\Delta x.$$

Gauname

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = & iR + \frac{\partial i}{\partial t}L \\ \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = & uG + \frac{\partial u}{\partial t}C \end{cases} \qquad (3.9)$$

Diferencijuojame abi lygtis pagal t ir x ir taikome lygybes $u_{tx} = u_{xt}$, $i_{tx} = i_{xt}$:

$$-i_{xx} = -RCi_t + Gu_x - CLi_{tt}.$$



3.9 pav.: Induktyvumas

Taikydami pirmąją (3.9) lygtį gauname

$$i_{tt} - \frac{1}{CL} i_{xx} + \frac{RC + LG}{CL} i_t + \frac{RG}{CL} i = 0.$$

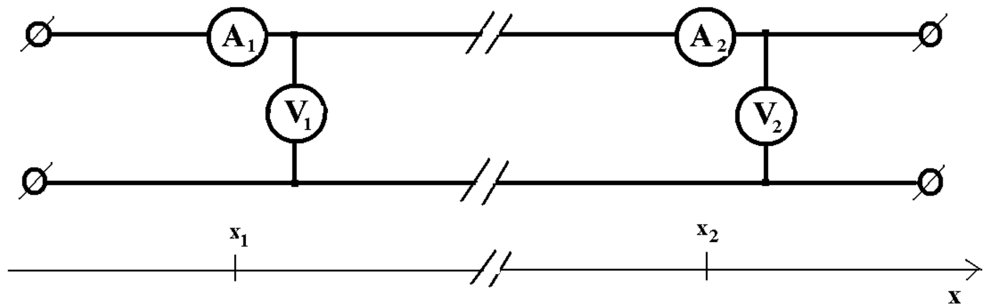
3.1 pratimas. Užrašykite lygtį funkcijai $u(t, x)$ rasti.

3.5.2 Membranos svyravimų lygtis

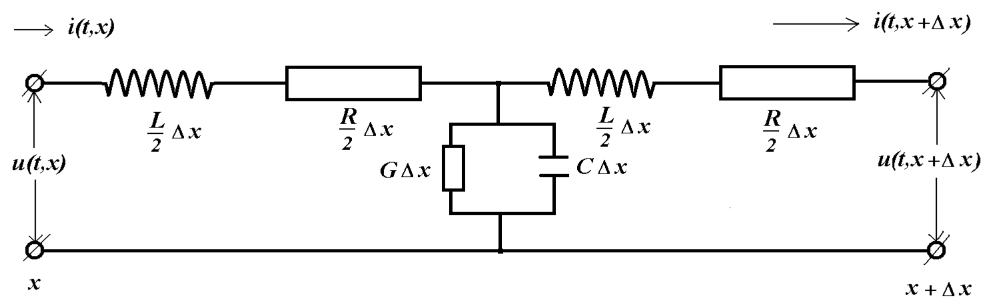
Membrana – įtempta plona absoliučiai lanksti plevelė;
t – laikas, x, y – membranos taškų koordinatės;
$u(t, x, y)$ – membranos taškų nukrypimai aplikačių (u) ašies kryptimi;
ρ – membranos tankis (apskaičiuotas ploto vienetui);
T – įtempimo jėga (apskaičiuota kontūro vienetui);
$F(t, x, y)$ – išorinės (skersinės) jėgos tankis;
Homogeninės ir vienodai įtemptos (ρ, T – $const$) membranos mažų skersinių svyravimų lygtis – **dvimatė bangavimo** lygtis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(t, x, y), \tag{3.10}$$

čia $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, $f(t, x, y) = \dfrac{F(t, x, y)}{\rho}$.



3.10 pav.: Ilgoji linija



3.11 pav.: Telegrafo lygčių išvedimas

3.5.3 Dujų ir skysčio dinamikos lygtys

$\vec{U}(t,x,y,z) = (u,v,w)$ – dujų srovės greičio vektorius;
$\rho(t,x,y,z)$ – dujų tankis;
$p(t,x,y,z)$ – dujų slėgis;
Vektorinio lauko $\vec{U}$ **divergencija** vadinamas reiškinys

$$\mathrm{div}\vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Dujų dinamikos lygtys:
tolydumo lygtis

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\vec{U}\right) = 0. \tag{3.11}$$

Pastebėkime, kad (3.11) lygtį galima perrašyti taip:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{U}, \mathrm{grad}\rho) + \rho\,\mathrm{div}\vec{U} = 0,$$

čia
$$\text{grad}\rho = \vec{i}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\rho}{\partial z}.$$
Prisiminkime, kad *divergenciją* ir gradijentą patogu išreikši **nabla** operatoriumi
$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right):$$
$$\text{div}\vec{U} = (\nabla, \vec{U}), \ \text{grad}\rho = \nabla\rho.$$
Oilerio lygtys vektoriniu pavidalu užrašomos taip:
$$\rho\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \rho(\vec{U}\nabla)\vec{U} + \nabla p = 0, \tag{3.12}$$
arba koordinatėmis
$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$
Būsenos lygtis neturi standartinio pavidalo ir bendruoju atveju užrašoma taip
$$f(p, \rho, T) = 0, \tag{3.13}$$
čia T – dujų (skysčio) temperatūra.

Lygčių sistema (3.11), (3.12), (3.13) vadinam hidrodinamikos lygtimis.

Trimatė bangavimo lygtis

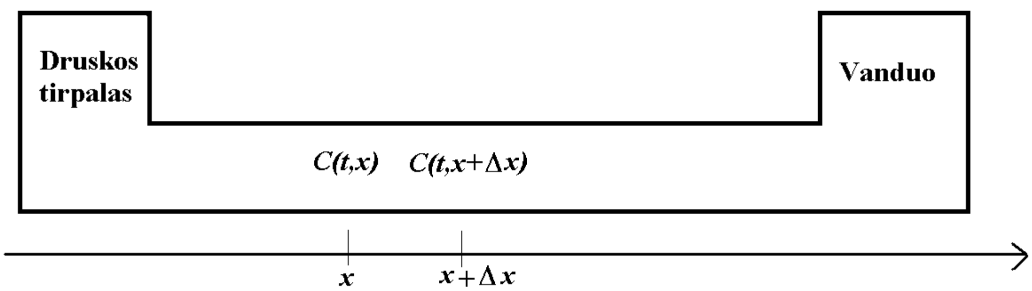
Dujų svyravimams (3.13) lygtis dažnai pakeičiama Puasono dėsniu:
$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}.$$
Tada mažos amplitudės bangoms $p \approx p_0(1 + \gamma\tilde{p})$ galioja *tiesinės akustikos* artinys slėgiui
$$\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial z^2}\right),$$
čia $a = \sqrt{\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ – garso greitis.

skyrius 4

Šilumos laidumo ir difuzijos lygtys

4.1 Difuzijos matematinis modelis

Dėl medžiagos (pavyzdžiui, druskos; 4.1 pav.) molekulių chaotinių judėsių kinta jos koncentracija (molekulių kiekis) kitoje medžiagoje (pavyzdžiui, vandenyje). Difuzuojančių medžiagų sąveikos procesas paprastai vyksta du-



4.1 pav.: Difuzijos proceso modelis

jose ir skysčiuose ir vadinamas **difuzija**. Per laiko intervalą $\Delta t \ll 1$ per vamzdžio pjūvį (S – pjūvio plotas) praeina difuzuojančios medžiagos kiekis, kurio masė yra m. Šis kiekis priklauso nuo medžiagos (pavyzdžio atveju – druskos) koncentracijos $C(t, x)$ ir nuo difuzijos koeficiento λ. Masė m išreiškiama Fiko (A.Fick) dėsniu:

$$m = -\lambda \frac{\partial C}{\partial x} S \, \Delta t. \tag{4.1}$$

Pastebėkime, kad iš (4.1) išplaukia

$$\Delta_x m = m(t, x + \Delta x) - m(t, x) = -\lambda \left(\frac{\partial C(t, x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial C(t, x)}{\partial x} \right) S\,\Delta t.$$

Kita vertus, per laiko intervalą $\Delta t \ll 1$ medžiagos (druskos) koncentracija indo dalyje tarp x ir $x + \Delta x$ pasikeis taip:

$$-\Delta_x m = (C(t + \Delta t, \tilde{x}) - C(t, \tilde{x}))\ \Delta V.$$

Čia ΔV – indo dalies tarp taškų x ir $x + \Delta x$ tūris, $\tilde{x} \in (x, x + \Delta x)$. Kai S–*const*, $\Delta V = S\,\Delta x$. Taigi gauname

$$\frac{C(t + \Delta t, \tilde{x}) - C(t, \tilde{x})}{\Delta t} S = \lambda S \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C(t, x + \Delta x) - C(t, x)}{\Delta x} \right).$$

Perėję prie ribos, kai $\Delta t \to 0$ ir $\Delta x \to 0$, gauname difuzijos lygtį

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{4.2}$$

čia $a = \sqrt{\lambda}$.

4.2 Šilumos laidumas strype

4.2.1 Modeliavimo prielaidos

- strypas yra tiek plonas, kad kiekvieno skersinio pjūvio taškuose tempertūra laikoma vienoda;
- $u(t, x)$ – strypo skersmenyje, kurio koordinatė yra x temperatūra laiko momentu t;
- $S(x) > 0$ – strypo skerspjūvio plotas;
- $p(x) > 0$ – skerspjūvio perimetras;
- $\rho(x) > 0$ – tankis;
- $C(x) > 0$ – specifinė šiluma (šilumos kiekis strypo elemente x, $x + \Delta x$ lygus $C\rho\,S\Delta x\,u$);
- $k(x) > 0$ – šilumos laidumo koeficientas;
- $\kappa(x) > 0$ – spinduliavimo (aušimo) koeficientas;
- $f(t, x)$ – oro temperatūra strypo aplinkoje.

4.2.2 Diferencialinė lygtis

$$C(x)\,\rho(x)\;S(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \kappa(x)p(x)\,(u - f(t,x))\,.$$

Kai visi modelio parametrai yra konstantos (vienalytė medžiaga ir vienodas skerspjūvis),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(u - f(t,x)),$$

$$a = \sqrt{\frac{k}{C\rho}},\;\; b = \frac{\kappa p}{C\rho S}.$$

Jei strypas yra izoliuotas ($\kappa = 0$), gauname homogeninę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Šilumos sklidimas esant šilumos šaltiniui

Kai strypas yra izoliuotas ir veikia šilumos šaltinis, tai strypo temeratūrai galioja nehomogeninė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(t,x). \tag{4.3}$$

4.2.3 Šilumos laidumas erdvėje

Tarkime, kad $\rho(x,y,z)$ – kūno tankis, $C(x,y,z)$ – specifinė šiluma, $k(x,y,x)$ – šilumos laidumo koeficientas. Kūno temperantūrai $u(t,x,y,z)$ galioja *šilumos laidumo lygtis*

$$C\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k\,\operatorname{grad}u\right). \tag{4.4}$$

Kai parametrai ρ, C, k yra konstantos (**homogeninis** kūnas) gauname lygtį

$$u_t = a^2\,\Delta u,$$

čia $a = \sqrt{\dfrac{k}{\rho C}}$, $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – Laplaso operatorius.

4.3 Koši uždavinio sprendimas

Begalinio strypo aušinimas

Spręsime uždavinį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \ u\,(t,x)|_{t=0} = \varphi(x), \tag{4.5}$$

kai $-\infty < x < +\infty$, $t \geqslant 0$.

4.3.1 Kintamųjų atskyrimo metodas

Ieškosime netrivialių (nenulinių) (4.5) lygties spendinių tokiu pavidalu

$$u(t,x) = T(t)\,X(x).$$

Tada $u_t = T'(t)\,X(x),\ u_{xx} = T(t)\,X''(x)$ ir įrašę šiuos reiškinius į (4.5) lygtį, gauname

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2\,\frac{X''(x)}{X(x)} = const.$$

Nagrinėsime atvejį $const < 0$ (priešingas atvejis neturi fizikinės prasmės) ir pažymėkime $const = -a^2 \cdot \lambda^2$. Tada

$$T(t) = C\,e^{-\lambda^2\,a^2\,t}, \ \ X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Taigi pastebėję, kad λ yra bet kuris neneigiamas realusis skaičius, gauname be galo daug lygties sprendinių

$$u(t,x) = e^{-\lambda^2\,a^2\,t}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right).$$

4.3.2 Furjė metodas

Tiesioginiu patikrinimu įrodome, kad integralas

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2\,a^2\,t}\left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)\,d\lambda \tag{4.6}$$

irgi yra (4.5) lygties sprendinys.

Iš pradinės sąlygos gauname:

$$u(0,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right)\,d\lambda = \varphi(x).$$

Tarkime, kad funkciją $\varphi(c)$ galima išreikšti Furjė integralu. Tada

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi,$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi.$$

Iš čia, taikydami formulę $\cos \lambda x \cos \lambda\xi + \sin \lambda x \sin \lambda\xi = \cos \lambda(\xi - x)$, gauname

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \left(\cos \lambda x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi + \sin \lambda x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi \right) d\lambda =$$

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) \, d\xi \right) d\lambda.$$

Pakeitę integravimo tvarką, gausime

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \, I(\xi) \, d\xi,$$

čia

$$I(\xi) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\xi - x) \, d\lambda.$$

Raskime funkcijos $I(\xi)$ išvestinę

$$I'(\xi) = -\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \lambda \sin \lambda(\xi - x) \, d\lambda =$$

$$\frac{1}{2a^2 t} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin \lambda(\xi - x) \, d \, e^{-\lambda^2 a^2 t}$$

Diferencijavimu dalimis gauname diferencialinę lygtį

$$I'(\xi) = -\frac{\xi - x}{2a^2 t} I(\xi).$$

Iš čia ir iš funkcijos $I(\xi)$ reiškimo integralu, kai $\xi = x$:

$$\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

išplaukia, kad

$$I(\xi)|_{\xi=x} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

$$I(\xi) = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Taigi galime užrašyti (4.5) uždavinio sprendinį

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi, & t>0 \\ \varphi(x), & t=0 \end{cases} \tag{4.7}$$

4.3.3 Fundamentinio sprendinio fizikinė prasmė

Tarkime, kad funkcija $\varphi(\xi)$ (4.7) formulėje yra tokia

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{kai } \xi < x_0 - \delta, \\ \varphi_0, \text{ kai } x_0 - \delta \leqslant \xi \leqslant x_0 + \delta, & \\ 0, & \text{kai } \xi > x_0 + \delta, \end{cases}$$

čia δ – mažas teigiamas skaičius.

Paimkime,

$$\varphi_0 = \frac{Q_0}{2\delta S\rho C},$$

S – strypo skerspjūvio plotas,
ρ – strypo medžiagos tankis,
C – specifinė šiluma,
Q_0 – šilumos kiekis, sukoncentruotas strypo atkarpoje $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

Įrašę φ_0 į (4.7) formulę, gausime

$$u(t,x) = \frac{Q_0}{S\rho C}\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{1}{2\delta}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

ir kai $\delta \to 0$ gauname:

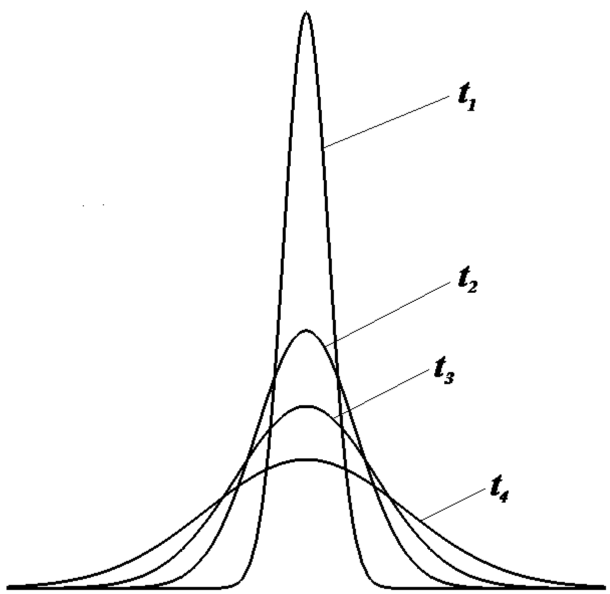
$$\frac{Q_0}{S\rho C}\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}.$$

Paimkime šilumos kiekį Q_0 taip, kad jis galėtų pakelti vienetinio ilgio strypo atkarpos temperatūrą vienu laipsniu: $Q_0 = 1 \cdot S\rho C \cdot 1$. Funkciją

$$v(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x_0 - x)^2}{4a^2 t}} \tag{4.8}$$

vadiname **fundamentiniu sprendiniu**. Ši funkcija turi šaltinio prasmę, kai taške $x = x_0$ pradine akimirka patalpintas šilumos kiekis (toks, kad pakelti temperatūrą taip, kaip buvo nurodyta), o kituose strypo taškuose jo temperatūra lygi nuliui.

Funkcijos $v(t, x)$ grafikas esant skirtingoms t reikšmėms $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ parodytas 4.2 paveiksle.



4.2 pav.: Funkcijos (4.8) grafikas esant skirtingoms t reikšmėms

4.1 pratimas. Raskite laiko momentą t_x, kai taške $x \neq x_0$ strypo temperatūra $v(t_x, x)$ yra maksimali ir raskite šią temperatūrą.

Temperatūros formulė plokštumoje ir erdvėje

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta.$$

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta)\, e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

4.3.4 Kraštinės sąlygos

Baigtinio strypo galuose $x = 0$ ir $x = l$ palaikoma kintanti temperatūra $\alpha(t)$ ir $\beta(t)$ – **pirmosios rūšies kraštinės sąlygos**:

$$u(t,x)|_{x=0} = \alpha(t), \;\; u(t,x)|_{x=l} = \beta(t).$$

Strypo galuose yra žinoma šilumos srovė (ji proporcinga temperatūros gradijentui) – **antrosios rūšies kraštinės sąlygos**:

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \gamma(t), \;\; \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=l} = \delta(t).$$

Trečiosios rūšies kraštinės sąlygos – strypo galuose vyksta šiluminis spinduliavimas į aplinką:

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - h_0(u(t,x) - f_0(t))\right|_{x=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + h_l(u(t,x) - f_l(t))\right|_{x=l} = 0.$$

4.3.5 Kraštinio uždavinio sprendimas Furjė metodu

Baigtinio izoliuoto strypo aušinimas

$$u_t = a^2\, u_{xx}, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0,$$

$$u(0,x) = \varphi(x),$$

$$u'_x(t,0) = 0, \;\; u'_x(t,l) = 0.$$

Taikome kintamųjų atskyrimo metodą (4.3.1, 36 p.):

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -a^2\lambda^2, \qquad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Iš čia gauname

$$T(t) = Ce^{-a^2\lambda^2 t}, \qquad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Iš kraštinių sąlygų gauname, kad nenuliniai sprendiniai egzistuoja, kai

$$B = 0, \qquad \lambda = \frac{n\pi}{l},\ n = 1, 2, \ldots$$

Todėl (atskirai išnagrinėkite atvejį, kai $\lambda = 0$)

$$u(t, x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}} \cos\frac{n\pi x}{l}$$

Iš pradinės sąlygos turime

$$u(0, x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x).$$

Taigi apskaičiuojame Furjė eilutės koeficientus

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ n = 0, 1, \ldots$$

4.4 Maksimumo principas

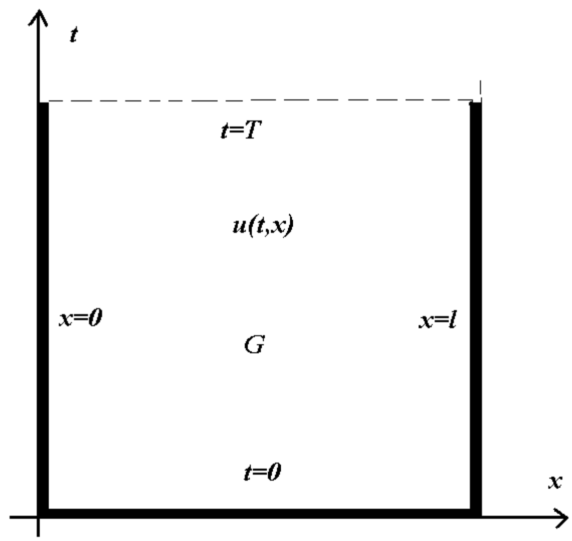
Pažymėkime stačiakampio $G = \{0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant l\}$ kontūrą $\Gamma = \{t = 0,\ x = 0,\ x = l\}$ (4.3 pav.) Tarkime, kad $M_\Gamma = \max\limits_{\Gamma} u(t, x)$ funkcijos u maksimumas kontūro Γ taškuose, $M_G = \max\limits_{G} u(t, x)$ – jos maksimumas srities G taškuose. Kadangi $\Gamma \subset G$, galioja nelygybė $M_\Gamma \leqslant M_G$. Tačiau šilumos laidumo lygties sprendiniui galioja lygybė $M_\Gamma = M_G$.

4.1 teorema. Tarkime, kad funkcija $u(t, x)$ – lygties $u_t = a^2u_{xx}$ – spendinys yra tolydi srityje G. Tada egzistuoja toks kontūro Γ taškas (t_0, x_0), kad

$$u\,(t_0, x_0) = M_G = \max_{G} u(t, x).$$

Įrodymas. Tarkime, kad $(t_1, x_1) \in G \setminus \Gamma$ yra vidinis srities G taškas ir $u(t_1, x_1) = M_\Gamma + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Sudarome pagalbinę funkciją (ji nėra šilumos laidumo lygties sprendinys)

$$U(t, x) = u(t, x) + \frac{\varepsilon}{2t_1}(t_1 - t).$$



4.3 pav.: Maksimumo principas

Jei padaryta prielaida yra teisinga, funkcijos U maksimumas srities G taškuose lygus $M_\Gamma + \varepsilon$, o kontūro Γ taškuose

$$U(t,x)|_\Gamma \leqslant M_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2t_1} t_1 = M_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Taigi funkcija $U(t,x)$ įgyja maksimalią reikšmę kažkuriame vidiniame (atskirai reikia nagrinėti atvejį $t_2 = T$) srities taške (t_2, x_2). Maksimumo taške turi būti $U_{xx}(t_2, x_2) \leqslant 0$ ir iš funkcijos U apibrėžimo išplaukia, kad $u_{xx}(t_2, x_2) \leqslant 0$. Kita vertus, ekstremumo taške gausime įvertį $u_t(t_2, x_2) \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2t_2}$ (lygybė galima tik, kai $t_2 = T$). Tada funkcija $u(t,x)$ nėra lygties $u_t = a^2 u_{xx}$ sprendinys, o tai prieštarauja teoremos sąlygai.

4.5 Uždavinys apie žemės temperatūrą

Spręsime uždavinį, kai žinoma vidutinė ilgametė temperatūra žemės paviršiuje

$$f(t) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \, e^{\frac{2\pi n t}{T}},$$

čia T – metų ilgis (pavyzdžiui, $T = 365$).

Žymėsime $x = 0$ – žemės paviršius, $x = -\infty$ – didelis gylis.

Sprendinio ieškosime Furjė eilutės pavidalu

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n u_n(x)\, e^{\frac{2\pi nt}{T}}.$$

Funkcija $u(t,x)$ yra šilumos laidumo lygties sprendinys. Todėl

$$\frac{2\pi in}{T}\, u_n\,(x) = a^2\, u_n''\,(x)\,.$$

Bendrasis lygties sprendinys

$$u_n(x) = A_n e^{(1\pm i)q_n x} + B_n e^{-(1\pm i)q_n x},\ q_n = \sqrt{\frac{|n|\pi}{a^2 T}}$$

bus aprėžtas tik, kai $A_n = 0$.

Iš pradinių sąlygų gauname, kad $u_n(0) = 1$. Pastebėkime, kad $f_n = f_{-n} = |f_n|\, e^{-i\gamma_n}$. Todėl

$$u(t,x) = f_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\, e^{-q_n x} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} + \gamma_n - q_n x\right).$$

Furjė eilutės koeficientas f_0 turi ilgametės vidutinės temperatūros prasmę. Pavyzdžiui, šiaurės kraštuose $f_0 < 0$ ir tai reiškia amžinąjį įšalą.

skyrius 5

Elipsinės lygtys

5.1 Procesai, aprašomi elipsinėmis lygtimi

5.1.1 Bendrosios sąvokos

Šilumos lygties $u_{tt} = a^2 \Delta u$ stacionarus (nepriklausantis nuo laiko t) sprendinys tenkina Laplaso lygtį

$$\Delta u = 0. \tag{5.1}$$

Kai yra šilumos šaltinių, užrašoma Puasono lygtis

$$\Delta u = -f. \tag{5.2}$$

Tarkime, kad T yra tam tikra aprėžta sritis erdvėje x, y, z ir paviršius Σ – jos siena. (5.1) arba (5.2) lygtys papildomos kraštinėmis sąlygomis.

Pirmasis kraštinis uždavinys (Dirichlė uždavinys)

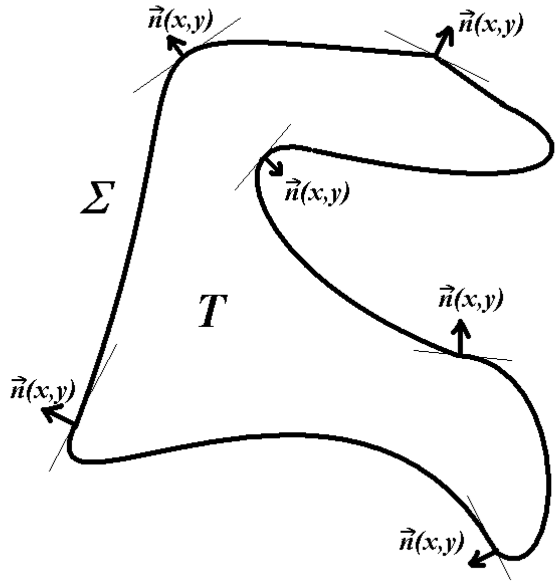
$$(u = \varphi)\big|_{(x,y,z)\in\Sigma}$$

Antrasis kraštinis uždavinys (Noimano uždavinys)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \varphi\right)\Bigg|_{(x,y,z)\in\Sigma}$$

Trečiasis kraštinis uždavinys

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h(u - \varphi)\right)\Bigg|_{(x,y,z)\in\Sigma}$$



5.1 pav.: Sritis T ir jos siena Σ

Čia $\vec{n}$ – paviršiaus Σ išorinės normalės vektorius.

Pastebėkime, kad gali būti sprendžiami ir vidiniai, ir išoriniai kraštiniai uždaviniai.

5.1.2 Normalioji išvestinė

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial \vec{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+hn_x, y+hn_y, z+hn_z) - u(x,y,z)}{h} =$$

$$n_x \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + n_y \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + n_z \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = (\vec{n}, \operatorname{grad} u),$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \ |\vec{n}| = 1.$$

5.1.3 Adamaro pavyzdys

Parodykime, kad Koši uždavinys

$$\Delta u = 0, \ u(0,y) = \varphi(y), \ \frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = \psi(y)$$

yra nekorektiškas.

Paimkime, $\varphi(y) = 0$, $\psi(y) = \dfrac{1}{r}\sin(ry)$. Kai $r \to \infty$ gauname $u(x,y) \equiv 0$. Tačiau, kai r yra baigtinis skaičius uždavinio sprendinys yra

$$u(x,y) = \frac{\mathrm{sh} rx}{r^2}\sin ry = \frac{e^{rx} - e^{-rx}}{2r^2}\sin ry.$$

Matome, kad funkcija yra neaprėžta, kai $x \neq 0$, $y \neq 0$ ir $r \to \infty$.

5.2 Harmoninės funkcijos

Nagrinėsime dvimatį atvejį $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Tarkime, kad

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

yra kompleksinio kintamojo $z = x+iy$ funkcija. Priminkime, kad jei funkcija w yra analizinė, ji turi išvestinę

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

kuri nepriklauso nuo reiškino $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ artėjimo į 0 būdo.

Kad funkciją $w = f(z)$ būtų analizinė, yra būtinos ir pakankamos Koši ir Rymano sąlygos:

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x. \end{cases} \tag{5.3}$$

Iš (5.3) lygybių gauname, kad analizinės funkcijos realioji ir menamoji dalis yra **harmoninės** funkcijos:

$$\Delta u = 0, \;\; \Delta v = 0.$$

Harmoninėmis funkcijomis trimačiu atveju vadiname Laplaso lygties sprendinius:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

5.2.1 Maksimumo principas

5.1 teorema. Tarkime, kad $u(x,y,z)$ yra harmoninė uždaroje aprėžtoje srityje $T \cup \Sigma$. Tada jos reikšmė bet kuriame vidiniame taške (x_0, y_0, z_0) yra ne didesnė už $\max\limits_{(x,y,z)\in\Gamma} u(x,y,z)$ – funkcijos maksimumą sienos taškuose.

Įrodymas. Pažymėkime

$$m = \max_{(x,y,z)\in\Gamma} u(x,y,z), \ M = \max_{(x,y,z)\in T\setminus\Gamma} u(x,y,z).$$

Tarkime, kad (x_0, y_0, z_0) yra toks vidinis taškas, kad $u(x_0, y_0, z_0) = M$. Darome prielaidą, kad $M > m$ ir sudarome pagalbinę funkciją

$$v = u(x,y,z) + \frac{M-m}{2d^2}\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right).$$

Čia

$$d = \max_{(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in T\cup\Sigma} \|(x_1,y_1,z_1) - (x_2,y_2,z_2)\|$$

yra srities T skersmuo.

Visiems taškams $(x,y,z) \in T \cup \Sigma$ galioja nelygybė

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \leqslant d^2.$$

Todėl bet kuriame srities sienos taške $(x,y,z) \in \Gamma$:

$$v(x,y,z) \leqslant m + \frac{M-m}{2d^2} d^2 = \frac{M+m}{2} < M.$$

Antra vertus, vidiniame taške (x_0, y_0, z_0):

$$v(x_0, y_0, z_0) = u(x_0, y_0, z_0) = M.$$

Taigi funkcija v įgyja maksimumą tam tikrame vidiniame taške (x_0, y_0, z_0). Bet kuriame maksimumo taške visada galioja:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0.$$

Iš čia gauname, kad

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0.$$

Tačiau

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{M-m}{2d^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 =$$

$$0 + \frac{M-m}{2d^2}(2+2+2) > 0.$$

Taigi gavome prieštaravimą, kad $M > m$.

5.3 Puasono formulė

Tarkime, kad harmoninės funkcijos $u(x, y)$ reikšmės apskritimo $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ taškuose apibrėžtos funkcija $\varphi(\theta)$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Tada funkcija u išreiškiama Puasono integralu:

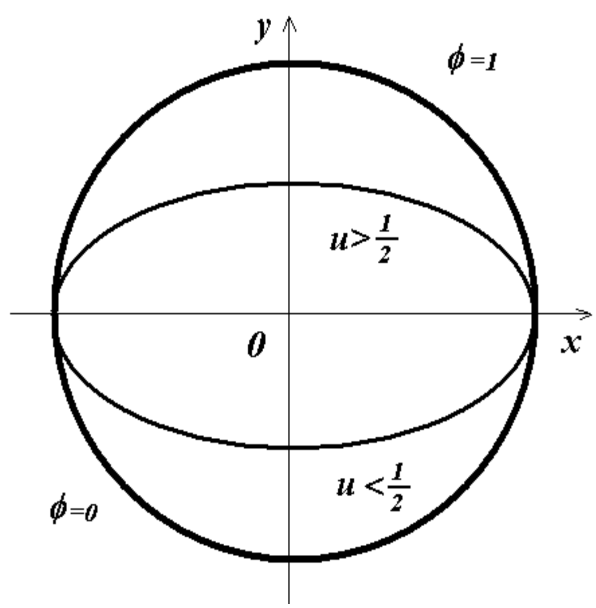
$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - x^2 - y^2}{R^2 - 2R(x\cos\theta + y\sin\theta) + x^2 + y^2} \varphi(\theta)\, d\theta. \tag{5.4}$$

Pateiksime kitą (5.4) formulės pavidalą:

$$u(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta - \omega) + \rho^2} \varphi(\theta)\, d\theta. \tag{5.5}$$

5.3.1 Temperatūros pasiskirstymas apvalioje plokštelėje

Darome prielaidą, kad plokštelė yra plona ir jos kraštuose (apskritime) palaikoma temperatūra $\varphi(x, y)$. Tarkime, kad sprendžiamas Dirichlė už-



5.2 pav.: Temperatūros pasiskirstymas

davinys $\Delta u = 0,\ u|_\Sigma = \varphi|_\Sigma$ ir

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kai } y \geqslant 0 \\ 0, & \text{kai } y < 0,\ x^2+y^2=R^2. \end{cases}$$

Taikome Puasono formulę (5.5):

$$u(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2}\,\varphi(\theta)\,d\theta.$$

Kai $0 < \omega < \pi$ turime viršutinę pusplokštumę ir keičiame kintamąjį $\tan\dfrac{\theta-\omega}{2} = t$, $\cos(\theta-\omega) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\theta = \dfrac{2dt}{1+t^2}$:

$$u(\rho,\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\tan\frac{\omega}{2}}^{\cot\frac{\omega}{2}} \frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^2+(R+\rho)^2t^2}\,dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\,t\right)\Bigg|_{-\tan\frac{\omega}{2}}^{\cot\frac{\omega}{2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\cot\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\tan\frac{\omega}{2}\right)\right).$$

Pertvarkome reiškinį taip

$$\tan u\pi = \frac{\frac{R+\rho}{R-\rho}\cot\frac{\omega}{2} + \frac{R+\rho}{R-\rho}\tan\frac{\omega}{2}}{1-\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\right)^2} =$$

$$\frac{R^2-\rho^2}{-4R\rho}\left(\cot\frac{\omega}{2}+\tan\frac{\omega}{2}\right) = -\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\omega}.$$

Kadangi reiškinys dešinėje pusėje yra neigiamas, turime $\dfrac{1}{2} < u < 1$ (5.2 pav). Pastebėję, kad

$$\tan(\pi - u\pi) = \frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\omega},$$

gauname

$$u = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\omega},\ \ 0 < \omega < \pi.$$

Kai $\pi < \omega < 2\pi$ keičiame kintamąjį $\cot\frac{\theta-\omega}{2} = t$.

5.1 pratimas. Įrodykite formulę

$$u = -\frac{1}{\pi}\arctan\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\omega},\ \ \pi < \omega < 2\pi.$$

5.4 Grino funkcijų metodas

Tarkime, kad $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ yra fiksuotas srities T taškas. Pažymėkime šio taško atstumą nuo bet kurio srities T taško $M(x, y, z)$:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Patikrinkime, kad funkcija $w(x, y, z) = \dfrac{1}{r}$ yra harmoninė, t. y. Laplaso lygties $\Delta w = 0$ sprendinys.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x_0}{r},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{x - x_0}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\,(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2}{r^5},$$

Pažymėkime $\tilde{w}$ harmoninę funkciją esant kraštinėms sąlygoms:

$$\tilde{w}|_{\Sigma} = w|_{\Sigma}\,.$$

Grino G funkcija vadinamas funkcijų $\tilde{w}$ ir w skirtumas:

$$G\,(x, y, z; x_0, x_0, x_0) = \tilde{w} - \frac{1}{r}.$$

Pastebėkime, kad $G|_{\Sigma} = 0$.

5.4.1 Grino formulė Dirichlė uždaviniui

Tarkime, kad žinoma Grino funkcija ir $\varphi(x, y, z)$ harmoninės funkcijos $u(x, y, z)$ reikšmės srities T sienos Σ taškuose. Tada srities vidiniuose taškuose funkcijos u reikšmės lygios

$$u\,(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \oint\!\!\oint_{\Sigma} \varphi(x, y, z) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\, d\sigma$$

Plokštumoje Grino formulė užrašoma taip

$$u\,(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Sigma} \varphi(x, y) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\, d\sigma$$

skyrius 6

Kintamųjų atskyrimo metodas

6.1 Hiperbolinių lygčių sprendimas kintamųjų atskyrimo metodu

Spręsime kraštinį uždavinį

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ u(0,x) = \varphi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x),\ u(t,0) = u(t,l) = 0. \quad (6.1)$$

Ieškome atskirų sprendinių tokiu pavidalu:

$$u(t,x) = T(t)\,X(x). \quad (6.2)$$

Iš (6.1), (6.2) gauname

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \equiv \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Matome, kad funkcijos $X(x)$ turi būti šio uždavinio nenuliniai sprendiniai

$$X'' = \lambda X,\ X(0) = X(l) = 0.$$

Atitinkamos λ reikšmės vadinamos uždavinio **tikrinėmis reikšmėmis**, o atitinkamos funkcijos $X(x)$ – tikrinėmis funkcijomis.

Kai $\lambda \geqslant 0$ tikrinių funkcijų nėra. Neigiamas konstantas pažymėkime $(-\lambda^2)$. Tada tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos yra:

$$\lambda = \frac{n\pi}{l},\ X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l},\ n = 1, 2, 3, \ldots. \quad (6.3)$$

Iš čia gauname

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}.$$

Taigi

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x),$$

$$u_t(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x).$$

6.1 pavyzdys. Spręsime kraštinį uždavinį

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx} - u, \ 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = \pi x - x^2, \\ u_t\,(0,x) = 0. \end{cases}$$

Ieškome atskirų sprendinių $u(t,x) = T(t)\,X(x)$:

$$\frac{T'' + 2T' + T}{T} = \frac{X''}{X} = const = -\lambda^2.$$

Iš kraštinių sąlygų $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ gauname, kad $const = -\lambda^2$ ir $\lambda = n \in N$. Taigi $X(x) = \sin nx$ ir spendžiame lygtį

$$T'' + 2T' + \left(1 + n^2\right) T = 0.$$

Jos benrasis sprendinys

$$T_n\,(t) = e^{-t}\,(A_n \cos nt + B_n \sin nt)\,.$$

Užrašome funkciją

$$u(t,x) = e^{-t} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)\, \sin nx.$$

Iš pirmosios pradinės sąlygos gauname, kad

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = \pi x - x^2, \ 0 < x < \pi.$$

Apskaičiuojame Furjė koeficientus

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(\pi x - x^2\right) \sin nx \, dx =$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\frac{-2-\cos n\pi}{n^3}\right) = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3}, & \text{kai } n = 1, 3, \dots, \\ 0, & \text{kai } n = 2, 4, \dots . \end{cases}$$

Užrašome sąlygą funkcijos $u(t, x)$ išvestinei:

$$u_t\,(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n + nB_n) \sin nx = 0.$$

Taigi $B_n = \dfrac{A_n}{n}$ ir

$$u(t, x) = \frac{8e^{-t}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \left(\cos(2k-1)t + \frac{1}{(2k-1)} \sin(2k-1)t\right) \sin(2k-1)x.$$

Užrašykime apytikslę formulę

$$u(t, x) \approx \frac{8e^{-t}}{\pi} \left((\cos t + \sin t) \sin x + \frac{1}{9}\left(\cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t\right) \sin 3x\right).$$

6.2 Elipsinių lygčių sprendimas

6.2.1 Laplaso lygties sprendimas apskritime

Tarkime, kad γ yra apskritimas, kurio centras yra taške $O(0, 0)$ ir spindulys lygus a. Spręsime uždavinį

$$\Delta u = 0, \;\; u|_{(x,y)\in\gamma} = f(x, y).$$

Perrašome Laplaso operatorių polinėse koordinatėse (žr. 1.1, 8 p.):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \;\; u\,(\rho, \varphi)|_{\rho=a} = F(\varphi). \tag{6.4}$$

(6.4) lygties sprendinio ieškome pavidalu

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi).$$

Tada

$$u_{\rho\rho} = R''\Phi,\ u_\rho = R'\Phi,\ u_{\varphi\varphi} = R\Phi''.$$

Įrašę šiuos reiškinius į lygtį, gauname

$$\left(R'' + \frac{1}{\rho}\,R'\right)\Phi + \frac{R}{\rho^2}\,\Phi'' = 0.$$

Atskiriame kintamuosius:

$$\frac{1}{R(\rho)}\,\left(\rho^2\,R''\,(\rho) + \rho\,R'\,(\rho)\right) = -\frac{\Phi''\,(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Ieškome periodinių sprendinių:

$$\Phi''\,(\varphi) = -\alpha\,\Phi(\varphi).$$

Tada $\alpha = \lambda^2 > 0$ ir turime

$$\Phi(\varphi) = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi.$$

Iš antrosios lygybės išplaukia Oilerio tipo lygtis

$$\rho^2 R''\,(\rho) + \rho\,R'\,(\rho) - \lambda^2 R(\rho) = 0.$$

Lygtis turi atskirus sprendinius $R(\rho) = \rho^s$. Gauname $s = \lambda$, $s = -\lambda$. Aprėžtą skritulyje $\rho \leqslant a$ sprendinį gauname, kai $s = \lambda \geqslant 0$. Periodinį su periodu 2π sprendinį gausime, kai

$$\cos(\lambda\varphi + \lambda 2\pi) = \cos\lambda\varphi,\ \sin(\lambda\varphi + \lambda 2\pi) = \sin\lambda\varphi.$$

Todėl $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$. Taigi gauname uždavinio sprendinį

$$u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\, n\varphi + B_n \sin\, n\varphi\right)\,\rho^n.$$

Koeficientus A_n, B_n pasirinkime taip, kad patenkinti pradines sąlygas

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\, n\varphi + B_n \sin\, n\varphi\right)\,a^n = F(\varphi).$$

Skleidžiame funkciją $F(\varphi)$ Furjė eilute:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}\,f_0^c + \sum_{n=0}^{\infty} \left(f_n^c \cos\, n\varphi + f_n^s \sin\, n\varphi\right),$$

$$f_n^c = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\, \cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$f_n^s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\, \sin n\varphi\, d\varphi.$$

Gauname $A_n = \frac{1}{a^n} f_n^c,\ B_n = \frac{1}{a^n} f_n^s$ ir todėl

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\, d\varphi +$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \left(\cos\, n\varphi \int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\, \cos n\varphi\, d\varphi + \right.$$

$$\left. \sin\, n\varphi \int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, a\sin\varphi)\, \sin n\varphi\, d\varphi \right).$$

skyrius 7

Šturmo ir Liuvilio uždavinys

7.1 Bendroji kintamųjų atskyrimo metodo schema

7.1.1 Tiesinis diferencialinis operatorius

Pažymėkime

$$Lu \equiv \left(A(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - B(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + C(t)\frac{\partial}{\partial t} + D(x)\frac{\partial}{\partial x} + (E(t) + F(x)) \right) u, \tag{7.1}$$

čia $A(t) \geqslant A_0 > 0$, $B(x) \geqslant B_0 > 0$.

Homogeninės lygties

$$Lu = 0,\ t \in [0, +\infty]\,,\ x \in [a, b] \tag{7.2}$$

netrivialių (nenulinių) spendinių ieškosime pavidalu

$$u(t,x) = T(t)\,X(x). \tag{7.3}$$

Nagrinėsime (7.1), (7.2) lygtį esant kraštinėms sąlygoms:

$$\left(\alpha u(t,x) + \beta u'_x(t,x)\right)\big|_{x=a} = 0,\ \ \left(\delta u(t,x) + \gamma u'_x(t,x)\right)\big|_{x=b} = 0. \tag{7.4}$$

Gauname diferencialines lygtis funkcijoms T ir X rasti:

$$\frac{A(t)T''(t) + C(t)T'(t) + E(t)T(t)}{T(t)} = \tag{7.5}$$

$$\frac{B(x)X''(x) - D(x)X'(x) - F(x)X(x)}{X(x)} = const$$

ir kraštines sąlygas:

$$\alpha X(a) + \beta X'(a) = 0,\ \delta X(b) + \gamma X'(b) = 0. \tag{7.6}$$

Pažymėkime (7.5) lygčių konstanta $(-\lambda)$ ir užrašome diferencialinę lygtį funkcijai X:

$$-B(x)X'' + D(x)X' + F(x)X = \lambda X.$$

Padauginę abi lygybės puses iš $\frac{1}{B(x)}e^{-\int \frac{D}{B}\,dx}$ ir pažymėję

$$p(x) = e^{-\int \frac{D}{B}\,dx},\ q(x) = \frac{F(x)}{B(x)}e^{-\int \frac{D}{B}\,dx}, r(x) = \frac{1}{B(x)}e^{-\int \frac{D}{B}\,dx},$$

gauname diferencialinę lygtį, priklausančią nuo parametro λ:

$$L[X] \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X = -\lambda r(x)X. \tag{7.7}$$

Pastebėkime, kad

$$p(x) > 0,\ q(x) > 0, r(x) > 0.$$

7.2 Šturmo ir Liuvilio uždavinys

(7.7), (7.6) uždavinį, kai $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ir $\delta^2 + \gamma^2 \neq 0$ vadiname Šturmo ir Liuvilio uždaviniu. Reikia rasti tokias parametro λ reikšmes (jos vadinamos **tikrinėmis**), kad uždavinys turėtų netrivialių (nenulinių) sprendinių - **tikrinių** funkcijų.

skyrius 8

Apibendrintosios funkcijos

8.1 Pagrindinės ir apibendrintosios funkcijos

8.1.1 Bendrosios sąvokos

Tarkime, kad mažo spindulio ε rutulyje yra materialus taškas, kurio masė lygi 1. Užrašykime masės tankio funkciją

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & \text{kai } |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{kai } |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad $\iiint\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} f_\varepsilon(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = 1$.

Kai $\varepsilon \to 0$, gauname

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{kai } x = 0, \\ 0, & \text{kai } x \neq 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Tačiau taip apibrėžta funkcija $\delta(x)$ netenkina reikalavimo masės tankiui:

$$\int\limits_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{kai } 0 \in V, \\ 0, & \text{kai } 0 \notin V. \end{cases}$$

Paimkime bet kurią tolydžiąją funkciją $\varphi(x)$ ir apskaičiuokime **silpnąją ribą**

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int f_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

Įrodykime šią lygybę. Paimkime bet kurį $\nu > 0$. Kadangi $\varphi(x)$ yra tolydžioji funkcija, egzistuoja toks $\varepsilon_\nu > 0$, kad $\forall |x| \leqslant \varepsilon_\nu$: $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \nu$. Taigi

$$\left| \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} f_\varepsilon \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} (\varphi(x) - \varphi(0))\, dx \right| \leqslant$$

$$\nu \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} dx = \nu.$$

Matome, kad silpnoji riba yra **funkcionalas**: kiekvieną tolydžiąją funkciją $\varphi(x)$ atitinka jos reikšmė $\varphi(0)$. Šis funcionalas žymimas δ ir vadinamas Dirako δ-funkcija. Žymėsime

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int f_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx = (\delta, \varphi).$$

Jei taške $x = 0$ sukoncentruota masė m, tai tankį galima išreikšti taip: $m\delta(x)$. Bendruoju atveju, kai taškuose x_1, x_2, …, x_N sukoncentruotos masės m_1, m_2, …, m_N, tankio funkcija užrašome taip:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \delta(x - x_j).$$

8.1.2 Apibendrintų funkcijų erdvė $\mathcal{D}'$

Žymėsime $\mathcal{D} = \mathcal{D}\left(R^n\right)$ visų *finitinių* (turinčių baigtinę **atramą** – *supp*) be galo daug kartų diferencijuojamų funkcijų aibę (žymime C^∞). Šias funkcijas vadiname *pagrindinėmis*.

Tarkime, kad $U_R = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : \ \|\vec{x}\| \leqslant R\}$,

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ \alpha_j \geqslant 0, \ |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Apibrėžkime konvergavimą pagrindinių funkcijų aibėje $\mathcal{D}$. Tarkime, kad
1) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \in \mathcal{D}$;
2) $\exists R > 0 \ (\forall k \in N) \ supp\, \varphi_k \subset U_R$;
3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \in N : \ \forall \alpha, \, k \geqslant k_\varepsilon$

$$\max_{x\in U_R} \left| D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x) \right| < \varepsilon.$$

Rašysime $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi_k = \varphi$ arba $\varphi_k \to \varphi$, $k \to +\infty$.

8.1 apibrėžimas. Apibendrintąja funkcija f vadinsime bet kurį tiesinį tolydųjį funkcionalą $f : \mathcal{D} \to C$. Čia C – kompleksinių skaičių aibė.

Funkcionalo f reikšmes žymėsime (f, φ). Šios reikšmės yra (kompleksiniai) skaičiai. Apibendintoji funkcija yra *tiesinis* funkcionalas:

$$(f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 (f, \varphi_1) + \lambda_2 (f, \varphi_2) .$$

Apibendrintoji funkcija yra *tolydusis* funkcionalas:

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_k = \varphi \ \Rightarrow \ \lim_{k\to+\infty} (f, \varphi_k) = (f, \varphi) .$$

Apibendrintųjų funkcijų aibė yra tiesinė: jei f ir g yra tiesiniai tolydieji funkcionalai $\mathcal{D} \to C$, tai $(\forall\lambda, \mu \in C)$ $\lambda f + \mu g$ irgi yra tiesinis tolygusis funkcionalas.

Apibrėžkime **silpnąjį** konvergavimą apibendintojų funkcijų aibėje. Sakysime, kad apibendrintoji funkcija f yra apibendrintojų funkcijų $f_1,\ f_2,\ \cdots$ sekos riba, jei $(\forall\varphi \in D)$ $\lim\limits_{k\to+\infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi)$.

8.2 apibrėžimas. Visų apibendrintųjų funkcijų aibę su apibrėžtu silpnuoju konvergavimu žymėsime $\mathcal{D}'$.

8.1 teorema. Aibė $\mathcal{D}'$ yra pilnoji erdvė: jei seka $f_n \in \mathcal{D}'$ silpnai konveguoja $f_n \to f$, tai $f \in \mathcal{D}'$.

Pratimai

Įrodykite, kad $(\varepsilon \to +0)$

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}\, e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \to \delta(x)$;
2. $\dfrac{1}{\pi x} \sin \dfrac{x}{\varepsilon} \to \delta(x)$;
3. $\dfrac{1}{\pi}\, \dfrac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \to \delta(x)$.

8.1.3 Apibendrintųjų funkcijų diferencijavimas

Tarkime, kad $f(x) \in C^1 [a, b]$, $\varphi \in D [a, b]$. Tada

$$(f', \varphi) = \int_a^b f'(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, df(x) = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\, \varphi'(x)\, dx.$$

Kadangi $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, gauname

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi').$$

Taigi galime apibrėžti apibendintosios funkcijos išvestinę

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} \left(f, D^\alpha \varphi\right).$$

Pastebėkime, kad differencijuojamai funkcijai $f \in C^n$ gauname, kad

$$(D^\alpha f, \varphi) = \int_{R^n} D^\alpha \left(f(x)\right) \varphi(x)\, dx.$$

8.1 pavyzdys. Hevisaido funkcijos $H(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{kai } x > 0. \end{cases}$ išvestinė

$$H'(x) = \delta(x).$$

Delta funkcijos $\delta(x)$ pirmykštė funkcija yra $H(x) + C$, čia C – bet kuri konstanta.

skyrius 9

Fundamentalieji sprendiniai

9.1 Apibendrintieji sprendiniai

9.1.1 Tiesinis diferencialinis operatorius

Nagrinėsime tiesinę diferencialinę lygtį

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \ \ f \in D', \tag{9.1}$$

čia $a_\alpha \in C^\infty(R^n)$.

Pažymėkime diferencialinį operatorių

$$L(x, D) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

ir perrašykime (9.1) lygtį taip:

$$L(x, D)u = f(x) \tag{9.2}$$

(9.2) lygties **apibendrintuoju** sprendiniu vadiname funkciją $u \in D'$:

$$\forall \varphi \in D \ \ (L(x, D)u, \varphi) = (f, \varphi).$$

9.1 apibrėžimas. Jungtiniu operatoriui $L(x, D)$ operatorimi vadiname reiškinį

$$L^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

Pastebėkime, kad

$$(L(u, D)u, \varphi) = (u, L^*(x, D)\varphi).$$

9.1.2 Fundamentalusis sprendinys

9.2 apibrėžimas. Diferencialinio operatoriaus $L(x,D)$ **fundamentaliuoju sprendiniu** (įtakos funkcija) vadinama tokia apibendrintoji funkcija $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$, kad

$$L(x,D)\mathcal{E} = \delta(x).$$

9.1 pastaba. Jei $\mathcal{E}$ yra fundamentalusis sprendinys ir $\mathcal{E}_0$ – tiesinės homogeninės lygties $L(x,D)\mathcal{E}_0 = 0$ sprendinys, tai $\mathcal{E} + \mathcal{E}_0$ irgi yra fundamentalusis sprendinys.

Pažymėkime $F[\varphi]$ *pagrindinės* funkcijos $\varphi \in \mathcal{D}$ Furjė transformaciją:

$$F[\varphi](\xi) = \int \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx.$$

Apibendrintosios funkcijos $f \in \mathcal{D}'$ Furjė $F[f]$ transformaciją apibrėžkime taip:

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi])\,.$$

9.1 pavyzdys.

$$F\left[\delta\left(x - x_0\right)\right] = e^{i\left(\xi, x_0\right)}.$$

Iš čia gauname $F[\delta] = 1$ ir

$$\delta = F^{-1}\left[1\right] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1].$$

Taigi $F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi)$.

9.1 teorema. Apibendrintoji funkcija $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'$ yra operatoriaus $L(x,D)$ fundamentalusis sprendinys tada ir tik tada, kai jos Furjė transformacija $F[\mathcal{E}]$ yra lygties

$$L(\xi) F[\mathcal{E}] = 1$$

sprendinys. Čia $L(\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \xi^\alpha$.

9.1.3 Nehomogeninė lygtis

Nagrinėsime diferencialinę lygtį, turinčią dešinę pusę

$$L(x, D)u = f(x), \ \ f \in \mathcal{D}'. \tag{9.3}$$

9.3 apibrėžimas. Funkcijų f ir g **sąsūka**[1] (žymime $f * g$) vadiname funkciją

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy = \int g(y)f(x-y)\,dy = (g * f)(x).$$

Apibendrintųjų funkcijų *sąsūką* apibrėžiame kaip tiesinį funkcionalą

$$(f * g) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)).$$

9.2 pavyzdys. Jei f yra bet kuri apibendintoji funkcija, tai jos sąsūka su δ funkcija:

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

9.2 teorema. Jei 9.3 lygties funkcija turi sąsūką su fundamentaliuoju sprendiniu $u = \mathcal{E} * f \in \mathcal{D}'$, tai funkcija u yra vienintelis šios lygties sprendinys.

9.2 Fundamentaliųjų spendinių pavyzdžiai

9.2.1 Tiesinis diferencialinis operatorius su paprastosiomis išvestinėmis

$$L\mathcal{E} \equiv \left(\frac{d^n}{dx^n} + \cdots + a_{n-1}\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d}{dx} + a_n \right) \mathcal{E} = \delta(x).$$

Kai $n = 1$ turime $L \equiv \dfrac{d}{dt} + a$ ir $\mathcal{E}(t) = H(t)e^{-at}$, čia $H(t)$ – Hevisaido funkcija.

Antrosios eilės operatoriaus $\dfrac{d^2}{dt^2} + a^2$ fundamentalusis sprendinys $H(t)\,\dfrac{\sin at}{a}$.

9.2.2 Šilumos operatoriaus lygties fundamentalusis sprendinys

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(t, x).$$

$$\mathcal{E}(t, x) = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\, e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}.$$

[1] convolution – angl.; sviortka – rus.

9.2.3 Banginio operatoriaus fundamentalusis sprendinys

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(t, x).$$

$$\mathcal{E}_1(t, x) = \frac{1}{2a} H(at - |x|).$$

$$\mathcal{E}_2(t, x) = \frac{at - |x|}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}.$$

$$\mathcal{E}_3(t, x) = \frac{H(t)}{2\pi a} \delta\left(a^2 t^2 - |x|^2\right).$$

9.2 pastaba. Jei $\mathcal{E}_{n+1}(x, x_{n+1})$ yra operatoriaus $L(x, x_{n+1}, D)$ fundamentalusis sprendinys, tai operatoriaus $L(x, D)$ fundamentalusis sprendinys (*nusileidimo metodas*) $\mathcal{E}_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_{n+1}(t, x, x_{n+1})\, dx_{n+1}$. Pavyzdžiui,

$$\mathcal{E}_1(t, x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}_2(t, x, x_2)\, dx_2.$$

9.2.4 Laplaso operatoriaus fundamentalusis sprendinys

$$\Delta \mathcal{E}_n = \delta(x).$$

$$\mathcal{E}_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \;\; \mathcal{E}_3(x) = -\frac{1}{4\pi |x|}.$$