3.6. Daugiatinklis metodas

Šiame poskyryje susipažinsime su dar vienu iteraciniu baigtinių skirtumų schemų sprendimo metodu. Vėl panagrinėkime baigtinių skirtumų schemą, aproksimuojančią dvimatį Puasono uždavinį:

$$\begin{cases} -\big(y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}\big) = f_{ij}, \quad x_{ij} \in \omega_h, \\ y(x) = 0, \quad x \in \partial\omega_h\,. \end{cases} \tag{3.47}$$

Tarkime, kad ω_h yra tolygusis tinklas ir $h_1 = h_2 = h$. Tada (3.47) apibrėžia tiesinių lygčių sistemą:

$$A^h Y^h = F^h\,. \tag{3.48}$$

Šio uždavinio sprendinį apskaičiuokime Zeidelio (*Seidel*) metodu. Tarkime, kad jau suradome $(n-1)$-ąjį artinį, tada apskaičiuojame naują artinį:

$$y^n_{ij} = \frac{1}{4}\left(y^n_{i-1,j} + y^{n-1}_{i+1,j} + y^n_{i,j-1} + y^{n-1}_{i,j+1} + h^2 f_{ij}\right),$$
$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, N-1\,.$$

Svarbi Zeidelio metodo savybė yra tai, kad artinių y^n paklaida $z^n = y^n - y$ darosi vis glodesnė, t. y. paklaidų vektoriaus spektriniame skleidinyje

$$z^n_{ij} = \sum_{k,l=1}^{N-1} c^n_{kl} \sin(\pi k x_{1i}) \sin(\pi l x_{2j})$$

koeficientai esant aukštoms harmonikoms greitai mažėja. Tačiau tai, kad paklaida greitai tampa glodžia, dar nereiškia, kad ši paklaida greitai ir mažėja.

3.4 pavyzdys. Zeidelio metodo konvergavimo analizė. Zeidelio metodo savybes išnagrinėkime spręsdami vienmatį Laplaso uždavinį. Gauname tokią skaičiavimo formulę:

$$\begin{cases} y^n_i = \dfrac{y^n_{i-1} + y^{n-1}_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1\,, \\ y^n_0 = 0, \quad y^n_N = 0\,. \end{cases} \tag{3.49}$$

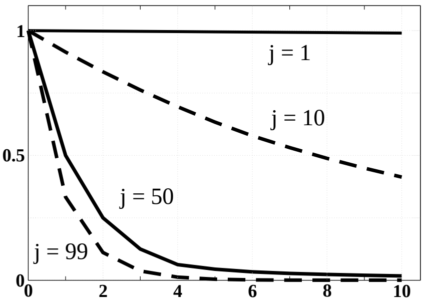
Pradiniu artiniu imkime tiesinės lygčių sistemos matricos j-ąjį tikrinį vektorių:

$$y^0_i = \sin(\pi j x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N\,.$$

3.7 pav. pavaizduoti artinio y^n globaliosios paklaidos normos

$$\|Z^n\|_\infty = \max_{0\leqslant i\leqslant N} |y_i^n - y_i|$$

priklausomybės nuo iteracijų skaičiaus grafikai, kai $j = 1, 10, 50$ ir 99, o diskrečiojo tinklo ω_h taškų skaičius $N = 100$.



3.7 pav. Zeidelio metodo artinių paklaidos priklausomybė nuo iteracijos numerio

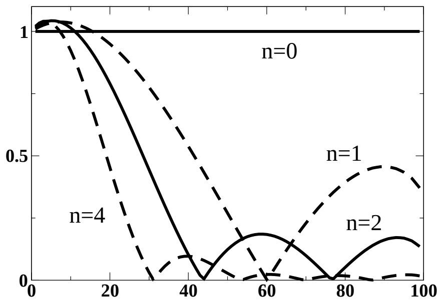
Matome, kad Zeidelio artinio paklaida labai greitai mažėja, kai pradiniu artiniu imame aukštą harmoniką (tiesinių lygčių sistemos matricos tikrinių vektorių numeriai yra $j = 50$ ir 99), tačiau konvergavimas yra lėtas, kai pradinis artinys yra glodus (t. y. $j = 1$ ir 10).

Taip pat tirsime, kaip keičiasi artinio y^n paklaidos įvairių harmonikų koeficientai. 3.8 pav. pavaizduoti vektoriaus y^n spektrinio skleidinio

$$y_i^n = \sum_{j=1}^{N-1} c_j^n \sin(\pi j x_i)$$

koeficientų $|c_j^n|$ grafikai, kai $n = 0, 1, 2, 4$. Pradinio artinio koeficientai $c_j^0 = (-1)^{2j-1}$.

Iš pateiktų pavyzdžių matome, kad atlikę nedidelį skaičių Zeidelio iteracijų gauname glodų artinį, kurio paklaidos spektriniame skleidinyje visi koeficientai jau yra maži, kai harmonikų numeriai $j \geqslant N/2$. Šią sprendinio pataisą galime rasti baigtinių skirtumų schema, kurią sudarome naudodami diskretųjį tinklą ω_{2h} su dvigubai didesniu žingsniu. Tokioje tiesinių lygčių sistemoje yra keturis kartus mažiau nežinomųjų, o Zeidelio metodas irgi konverguoja keturis kartus greičiau (žr. paprastųjų iteracijų metodo konvergavimo greičio įvertį). Todėl skaičiavimų apimtis yra apytiksliai šešiolika kartų mažesnė nei sprendžiant pradinę tiesinių lygčių sistemą (3.48).



3.8 pav. Zeidelio iteracinio metodo artinių spektrinių skleidinių koeficientų grafikai

Pateiksime šio metodo realizavimo formules. Sakykime, kad yra apibrėžtas operatorius I_h^{2h}, vaizduojantis vektorių Y^h į vektorių Y^{2h}, apibrėžtą diskrečiojo tinklo ω_{2h} taškuose:

$$I_h^{2h} : \; Y^h \to Y^{2h} .$$

Jį vadinsime *projektavimo* operatoriumi. Taip pat sakykime, kad yra apibrėžtas *interpoliavimo* operatorius I_{2h}^h, vaizduojantis vektorių Y^{2h} į vektorių Y^h:

$$I_{2h}^h : \; Y^{2h} \to Y^h .$$

Dabar jau galime formuluoti *dvitinklio metodo* algoritmą. Vieną jo iteraciją sudaro tokie žingsniai:

1. Zeidelio metodu atliekame m iteracijų tiesinių lygčių sistemai:

$$A^h Y^h = F^h ,$$

gauname artinį V^h. Tada Y^h galime užrašyti kaip dviejų vektorių sumą:

$$Y^n = V^h + P^h .$$

Pažymėkime $R^h = F^h - AV^h$ gautojo artinio V^h netikties vektorių. Tada pataisa P^h tenkina tiesinių lygčių sistemą:

$$A^h P^h = R^h .$$

2. Pataisų uždavinį projektuojame į ω_{2h} tinklą. Gauname naują tiesinių lygčių sistemą:

$$I_h^{2h} A^h I_{2h}^h P^{2h} = I_h^{2h} R^h .$$

Ją galime užrašyti ir taip:

$$A^{2h}P^{2h} = R^{2h}, \quad x \in \omega_{2h}\,, \tag{3.50}$$

čia pažymėjome:

$$A^{2h} = I_h^{2h} A^h I_{2h}^h, \quad R^{2h} = I_h^{2h} R^h\,.$$

Matrica A^{2h} yra simetrinė, kai įvykdyta interpoliavimo ir projektavimo operatorių suderinamumo sąlyga:

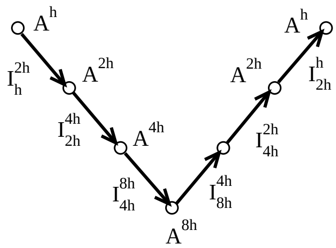
$$\left(I_{2h}^h\right)^T = I_h^{2h}\,. \tag{3.51}$$

3. Išsprendę (3.50) uždavinį, apskaičiuojame naują (3.49) tiesinių lygčių sistemos sprendinio artinį:

$$\tilde{Y}^h = V^h + I_{2h}^h P^{2h}\,.$$

Kadangi dėl interpoliavimo operatoriaus poveikio $\tilde{Y}^h$ paklaidoje gali vėl padidėti koeficientai esant aukštoms harmonikoms, tai Zeidelio metodu atliekame m iteracijų tiesinių lygčių sistemai (3.49).

Spręsdami (3.49) uždavinį vėl galime taikyti tą pačią strategiją: atlikti keletą Zeidelio metodo iteracijų ir projektuoti pataisų uždavinį į diskretųjį tinklą ω_{4h}. Tokį procesą kartojame tol, kol gauname tiesinių lygčių sistemą, kurią nesunkiai išsprendžiame tiksliai, pavyzdžiui, Gauso metodu. Visa skaičiavimų eiga pavaizduota 3.9 pav., o pats metodas vadinamas *daugiatinklio metodo V variantu.*



3.9 pav. Daugiatinklio metodo skaičiavimo schema

3.5 pavyzdys. Projektavimo, interpoliavimo operatoriai. Panagrinėkime vienmatį Puasono uždavinį:

$$\begin{cases} -y_{\bar{x}x} = f(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \\ y_0 = 0, \quad y_N = 0\,. \end{cases} \tag{3.52}$$

Gauname tiesinių lygčių sistemą su triįstrižaine matrica:

$$A^h Y^h = F^h \,.$$

Diskrečiojo tinklo ω_{2h} taškuose apibrėžkime vektorių:

$$Y^{2h} = \big(y_0,\, y_2,\, y_4,\, \dots,\, y_N\big)^T .$$

Imkime tokį interpoliavimo operatorių:

$$\big(I_{2h}^h Y^{2h}\big)_j = \begin{cases} y_{2i}, & \text{kai } \; j = 2i \,, \\ \dfrac{y_{2i} + y_{2i+2}}{2}, & \text{kai } \; j = 2i + 1 \,. \end{cases} \tag{3.53}$$

Projektavimo operatorių I_{2h}^h apskaičiuosime iš (3.51) lygybės. Apibrėžkime skaliarines sandaugas:

$$\big(Y^{2h},\, V^{2h}\big) = 2 \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} y_{2j} v_{2j} h \,,$$

$$\big(Y^h,\, V^h\big) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j v_j h \,.$$

Pasinaudoję kraštinėmis sąlygomis $y_0 = y_N = 0$ ir $v_0 = v_N = 0$, gauname tokias lygybes:

$$\begin{aligned} \big(I_{2h}^h Y^{2h},\, V^h\big) &= \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} y_{2j} v_{2j} h + \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} \frac{y_{2j} + y_{2j-2}}{2}\, v_{2j-1} h \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} y_{2j} \Big(\frac{1}{2} v_{2j-1} + v_{2j} + \frac{1}{2} v_{2j+1}\Big) h \,, \end{aligned}$$

$$\big(Y^{2h},\, I_h^{2h} V^h\big) = 2 \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} y_{2j} \, \big(I_h^{2h} V^h\big)_{2j} \, h \,.$$

Todėl projektavimo operatorius I_h^{2h} yra apibrėžiamas taip:

$$\big(I_h^{2h} V^h\big)_{2j} = \frac{v_{2j-1} + 2v_{2j} + v_{2j+1}}{4} \,. \tag{3.54}$$

Projektavimo operatorių galime apibrėžti ir naudodami matricų savybes. Imkime $N = 6$. Tada vidiniuose tinklo taškuose:

$$I_{2h}^{h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Projektavimo operatorių rasime normuodami matricos

$$\left(I_{2h}^{h}\right)^{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

trečiąją ir penktąją eilutes. Naudodami interpoliavimo ir projektavimo operatorius sudarome baigtinių skirtumų schemą diskrečiojo tinklo ω_{2h} taškuose:

$$A^{2h}Y^{2h} = I_{h}^{2h}A^{h}I_{2h}^{h}Y^{2h} \,.$$

Kadangi teisingos lygybės:

$$\left(A^{h}I_{2h}^{h}Y^{2h}\right)_{j} = \begin{cases} -\dfrac{y_{2i+2} - 2y_{2i} + y_{2i-2}}{2h^2}, & \text{kai} \quad j = 2i\,, \\ 0, & \text{kai} \quad j = 2i - 1\,, \end{cases}$$

tai gauname tokią baigtinių skirtumų schemą:

$$\left(A^{2h}Y^{2h}\right)_{2i} = -\frac{y_{2i+2} - 2y_{2i} + y_{2i-2}}{(2h)^2}\,.$$

Galima įrodyti, kad daugiatinklio metodo konvergavimo greitis nepriklauso nuo diskrečiojo parametro h, todėl (3.47) baigtinių skirtumų schemos sprendinį randame atlikę $O(N^2)$ aritmetinių veiksmų.

3.6 pavyzdys. Daugiatinklio metodo konvergavimo analizė. Pateiksime skaitinio eksperimento rezultatus. Spręskime modelinį uždavinį:

$$\begin{cases} -y_{\bar{x}x} = 0, \quad x_i \in \omega_h, \\ y_0 = 0, \quad y_N = 0\,. \end{cases}$$

Pradiniu artiniu imkime vektorių

$$\overset{0}{y}_i = e^{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \,.$$

Kadangi tikslus tiesinės lygčių sistemos sprendinys yra $Y = 0$, tai daugiatinklio metodo sprendinys sutampa su paklaida. 3.1 lentelėje pateiktas daugiatinklio metodo ciklų skaičius, po kurio paklaida tapo mažesnė už $\varepsilon = 10^{-6}$.

3.1 lentelė. Daugiatinklio metodo ciklų skaičius

N	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
32	5	4	4	4
64	5	4	4	4
128	5	4	4	4