3.3. Ekonomiški nestacionarių uždavinių sprendimo metodai

Srityje $Q = \{x = (x_1, x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$ spręskime dvimatį parabolinį uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k_1 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + k_2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad (x,t) \in Q \times (0,T]\,, \\ u(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \partial Q\,, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{Q}\,. \end{cases} \tag{3.30}$$

Uždavinį aproksimuokime baigtinių skirtumų metodu. Sritį Q pakeiskime diskrečiuoju tinklu:

$$\omega_h = \left\{\, x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j}):\ \ x_{1i} = ih,\ x_{2j} = jh, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant N-1 \,\right\},$$

taip pat apibrėžkime diskretųjį tinklą:

$$\omega_\tau = \left\{\, t^n:\ \ t^n = n\tau, \qquad n = 1,2,\dots,K,\ \ t^K = T \,\right\}.$$

Pažymėkime funkciją, apibrėžtą diskrečiojo tinklo $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ taškuose:

$$y_{ij}^n = y(x_{1i}, x_{2j}, t^n), \quad (x,t) \in \bar{\omega}_{h\tau}\,.$$

Baigtinių skirtumų schemą vadiname *ekonomiška*, jeigu tenkinamos tokios dvi sąlygos:

a) jos sprendinį eiliniame $(n+1)$-ajame laiko sluoksnyje apskaičiuojame atlikę $\mathcal{O}(N^2)$ aritmetinių veiksmų, t. y. aritmetinių veiksmų skaičius yra proporcingas diskrečiojo tinklo ω_h mazgų skaičiui;

b) baigtinių skirtumų schema yra nesąlygiškai stabili, t. y. parametro τ parinkimas priklauso tik nuo aproksimacijos tikslumo.

Išnagrinėsime kelis paprasčiausius baigtinių skirtumų schemų pavyzdžius ir ištirsime, ar šie metodai yra ekonomiški.

Išreikštinė baigtinių skirtumų schema

Aproksimuokime (3.30) diferencialinį uždavinį *išreikštine* baigtinių skirtumų schema:

$$\begin{cases} y_t = k_1 y_{\bar{x}_1 x_1} + k_2 y_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \\ y(x,t^n) = \mu(x,t^n), \quad x \in \partial\omega_h\,, \\ y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h\,. \end{cases} \tag{3.31}$$

Jeigu diferencialinio uždavinio sprendinys $u \in C^3_{4,4}(Q \times (0,T])$, tai, pasinaudoję funkcijos u Teiloro skleidiniais, nesunkiai įrodome, kad šios baigtinių skirtumų schemos aproksimavimo paklaida:

$$\psi = \mathcal{O}(\tau + h^2)\,.$$

Kadangi schema yra išreikštinė, tai jos sprendinį $(n+1)$-ajame laiko sluoksnyje randame atlikę $\mathcal{O}(N^2)$ aritmetinių veiksmų, taigi vieno sluoksnio realizacija yra ekonomiška.

Ištirsime išreikštinės baigtinių skirtumų schemos stabilumą. Užrašykime uždavinį, kurį tenkina schemos sprendinio globalioji paklaida

$$\begin{cases} z_t = k_1 z_{\bar{x}_1 x_1} + k_2 z_{\bar{x}_2 x_2} + \psi, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \\ z(x,t^n) = 0, \quad x \in \partial\omega_h\,, \\ z(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h\,. \end{cases}$$

Pažymėkime operatorių:

$$AY = \begin{cases} \dfrac{2y_1 - y_2}{h^2}, & i = 1\,, \\ -y_{\bar{x}x,i}, & 2 \leqslant i \leqslant N-2\,, \\ \dfrac{2y_{N-1} - y_{N-2}}{h^2}, & i = N-1\,, \end{cases}$$

apibrėžtą visoms funkcijoms $y(x_i)$, tokioms, kad $y_0 = 0$, $y_N = 0$. Tegul V_k yra šio operatoriaus ortonormuoti tikriniai vektoriai:

$$AV_k = \lambda_k V_k\,.$$

Priminsime, kad tikrinėms reikšmėms λ_k galioja nelygybės:

$$8 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{N-1} \leqslant \frac{4}{h^2}\,.$$

Baigtinių skirtumų schemos stabilumą tirsime spektriniu metodu. Panagrinėkime funkcijos z skleidinį, kuriame kintamieji yra atskirti:

$$z(x,t^n) = \sum_{k,l=1}^{N-1} c_{kl}(t^n)\, V_k(x_1)\, V_l(x_2)\,.$$

Tada globaliosios paklaidos L_2 normą galima apskaičiuoti ir taip:

$$\|Z\|^2 = \sum_{k,l=1}^{N-1} |c_{kl}|^2 .$$

Visiškai taip pat gauname ir aproksimavimo paklaidos skleidinį:

$$\psi_{ij} = \sum_{k,l=1}^{N-1} \tilde{\psi}_{kl}\, V_k(x_{1i})\, V_l(x_{2j}) .$$

Įrašę šias išraiškas į paklaidų uždavinį, gauname lygtis:

$$\frac{c_{kl}^{n+1} - c_{kl}^{n}}{\tau} = -(\lambda_k k_1 + \lambda_l k_2)\, c_{kl}^{n} + \tilde{\psi}_{kl} ,$$

iš kurių randame skleidinio koeficientus:

$$c_{kl}^{n+1} = \big(1 - \tau(\lambda_k k_1 + \lambda_l k_2)\big)\, c_{kl}^{n} + \tau\tilde{\psi}_{kl} .$$

Išreikštinė baigtinių skirtumų schema yra stabilioji, jei galioja sąlyga:

$$\max_{1\leqslant k,l\leqslant N-1} \big|1 - \tau(\lambda_k k_1 + \lambda_l k_2)\big| \leqslant 1 .$$

Išsprendę šias nelygybes, gauname sąlygą parametrui τ:

$$\tau \leqslant \frac{2}{\lambda_k k_1 + \lambda_l k_2} ,$$

arba, atsižvelgę į tikrinių reikšmių įverčius, turime sąlygą:

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{2(k_1 + k_2)} .$$

Todėl diskrečiojo tinklo ω_τ sluoksnių skaičius $K = \mathcal{O}\big((k_1 + k_2)N^2\big)$, o bendra apimtis aritmetinių veiksmų, atliekamų realizuojant išreikštinę baigtinių skirtumų schemą, yra $\mathcal{O}\big((k_1 + k_2)N^4\big)$.

Išreikštinės baigtinių skirtumų schemos vieno laikinio sluoksnio realizavimas yra ekonomiškas, nes aritmetinių veiksmų skaičius proporcingas diskrečiojo tinklo ω_h taškų skaičiui, bet dėl sąlyginio stabilumo atsiranda apribojimai parametrui τ (ekonomiškoms schemoms imsime $\tau \sim h$).

Kitas išreikštinės baigtinių skirtumų schemos trūkumas yra tai, kad diskrečiojo tinklo ω_τ taškų skaičius K esmingai priklauso nuo diferencialinio uždavinio koeficientų.

3.2 pavyzdys. Išreikštinės baigtinių skirtumų schemos realizavimo išlaidos. Tegul diskrečiojo tinklo ω_h taškų skaičius pagal kiekvieną iš koordinačių yra $N = 100$, o parabolinio uždavinio koeficientai:

$$k_1 = 1000, \quad k_2 = 1000\,.$$

Tada naudodami ekonomišką baigtinių skirtumų schemą (t. y. kai vieno žingsnio realizavimo išlaidos yra $Q_0 = \mathcal{O}(N^2)$, o žingsnių skaičius $K = N$), sprendinį gautume atlikę

$$Q = \mathcal{O}(N^3) = \mathcal{O}(10^6)$$

aritmetinių veiksmų. Spręsdami šį uždavinį išreikštine baigtinių skirtumų schema, atliksime

$$Q = \mathcal{O}\big((k_1 + k_2)N^4\big) = \mathcal{O}\big(10^{11}\big)$$

aritmetinių veiksmų, t. y. maždaug 10^5 kartų daugiau, nei taikydami ekonomišką metodą.

Visiškai neišreikštinė baigtinių skirtumų schema

(3.30) diferencialinę lygtį aproksimuokime *visiškai neišreikštine* baigtinių skirtumų schema:

$$\begin{cases} y_t = k_1 y^{n+1}_{\bar{x}_1 x_1} + k_2 y^{n+1}_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,, \\ y(x,t^n) = \mu(x,t^n), \quad x \in \partial\omega_h\,, \\ y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h\,. \end{cases} \tag{3.32}$$

Ir šios schemos aproksimavimo paklaida yra $\mathcal{O}(\tau + h^2)$ eilės dydis.

Spektriniu metodu ištirsime visiškai neišreikštinės baigtinių skirtumų schemos stabilumą. Koeficientai c_{kl} tenkina lygtį:

$$\frac{c^{n+1}_{kl} - c^n_{kl}}{\tau} = -(\lambda_k k_1 + \lambda_l k_2)\, c^{n+1}_{kl} + \tilde{\psi}_{kl}\,,$$

iš kurios išreiškiame:

$$c^{n+1}_{kl} = \frac{1}{1 + \tau(\lambda_k k_1 + \lambda_l k_2)}\,(c^n_{kl} + \tau\tilde{\psi}_{kl})\,.$$

Taigi baigtinių skirtumų schema yra visada stabili, nes

$$q = \frac{1}{1 + \tau(\lambda_k k_1 + \lambda_l k_2)} < 1\,.$$

Todėl skaičiuodami galime naudoti $\tau \sim h$, tada diskrečiojo tinklo ω_τ taškų skaičius $K = N$.

Tačiau dabar jau baigtinių skirtumų schemos realizavimas yra sudėtingesnis. Kiekviename žingsnyje reikia spręsti tiesinių lygčių sistemą, kurios matrica yra blokais triįstrižainė. Bendruoju atveju, kai

$$k_1 = k_1(x_1, x_2), \quad k_2 = k_2(x_1, x_2)\,,$$

schemos sprendinį apskaičiuojame matriciniu perkelties arba iteraciniais metodais. Esame įrodę, kad matriciniu perkelties metodu šią tiesinių lygčių sistemą išsprendžiame atlikę $Q_0 = CN^4$ aritmetinių veiksmų, todėl bendra aritmetinių veiksmų apimtis yra $Q = KQ_0 = CN^5$. Matome, kad toks algoritmas nėra ekonomiškas.

Neišreikštinė - išreikštinė schema

(3.30) diferencialinę lygtį aproksimuokime baigtinių skirtumų lygtimi:

$$y_t = k_1 y^{n+1}_{\bar{x}_1 x_1} + k_2 y^n_{\bar{x}_2 x_2}, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau}\,. \tag{3.33}$$

Kiekviename laiko žingsnyje funkciją y^{n+1} apskaičiuojame išsprendę $N - 1$ vienmatį uždavinį. Kadangi tokių tiesinių lygčių sistemų matrica yra triįstrižainė, tai perkelties metodu vieną tiesinių lygčių sistemą išsprendžiame atlikę $8N$ aritmetinių veiksmų, visas sistemas – atlikę $Q_0 = 8N^2$ aritmetinių veiksmų. Todėl neišreikštinės - išreikštinės schemos vieno žingsnio realizavimas yra ekonomiškas.

Spektriniu metodu ištirsime algoritmo stabilumą pradinės sąlygos atžvilgiu. Koeficientams c_{kl} galioja lygybė:

$$c^{n+1}_{kl} = q_{kl} c^n_{kl}, \quad q_{kl} = \frac{1 - \tau k_2 \lambda_l}{1 + \tau k_1 \lambda_k}\,.$$

Todėl neišreikštinė - išreikštinė schema yra stabilioji, jei

$$|q_{kl}| \leqslant 1\,,$$

arba

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{2(k_2 - 2k_1 h^2)} \approx \frac{h^2}{2k_2}\,.$$

Kai $k_1 \approx k_2$, tai diskrečiojo tinklo ω_τ taškų skaičius K yra perpus mažesnis už išreikštinės schemos taškų skaičių. Jei $k_2 \ll k_1$, tai šis skirtumas yra daug didesnis.

Paaiškinsime neišreikštinės - išreikštinės schemos nestabilumo priežastį. Iš stabilumo daugiklio q_{kl} formulės matome, kad x_1 kryptimi paklaida nedidėja, tačiau x_2 kryptimi paklaidos augimą tenka riboti specialiai parenkant parametrą τ. Todėl neišreikštinė - išreikštinė schema yra tik sąlygiškai stabili.

Kintamųjų krypčių metodas

(3.30) diferencialinę lygtį aproksimuokime taip: pirmajame žingsnyje neišreikštine - išreikštine schema apskaičiuokime pagalbinį sprendinį laiko momentu $t^{n+0,5}$:

$$\frac{y^{n+0,5} - y^n}{0,5\tau} = k_1 y^{n+0,5}_{\bar{x}_1 x_1} + k_2 y^n_{\bar{x}_2 x_2}\,, \tag{3.34}$$

antrajame žingsnyje sukeiskime išreikštinį ir neišreikštinį operatorius:

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+0,5}}{0,5\tau} = k_1 y^{n+0,5}_{\bar{x}_1 x_1} + k_2 y^{n+1}_{\bar{x}_2 x_2}\,. \tag{3.35}$$

Tokia baigtinių skirtumų schema vadinama *kintamųjų krypčių metodu.*

Schemos realizavimas yra ekonomiškas – iš viso reikia išspręsti $2(N-1)$ tiesinių lygčių sistemas su triįstrižaine matrica, todėl viename laiko sluoksnyje atliekame $Q_0 = 16N^2$ aritmetinių veiksmų.

Spektriniu metodu ištirsime kintamųjų krypčių schemos stabilumą. Iš (3.34), (3.35) lygčių gauname tokias koeficientų lygybes:

$$c^{n+0,5}_{kl} = \frac{1 - \frac{1}{2}\tau\lambda_l}{1 + \frac{1}{2}\tau\lambda_k}\, c^n_{kl}\,,$$

$$c^{n+1}_{kl} = \frac{1 - \frac{1}{2}\tau\lambda_k}{1 + \frac{1}{2}\tau\lambda_l}\, c^{n+0,5}_{kl}\,,$$

todėl atlikus abu schemos žingsnius, koeficientas c^{n+1}_{kl} yra toks:

$$c^{n+1}_{kl} = \frac{(1 - \frac{1}{2}\tau\lambda_l)(1 - \frac{1}{2}\tau\lambda_k)}{(1 + \frac{1}{2}\tau\lambda_l)(1 + \frac{1}{2}\tau\lambda_k)}\, c^n_{kl}\,.$$

Kadangi stabilumo daugiklis $|q_{kl}| \leqslant 1$, tai kintamųjų krypčių schema yra nesąlygiškai stabili. Matome, kad sprendinio paklaida x_2 kryptimi gali padidėti pirmajame žingsnyje, tačiau šis padidėjimas yra kompensuojamas kitame žingsnyje. Taigi kintamųjų krypčių schema yra ekonomiška. Pirmieji ją sudarė Pismenas ir Rekfordas (*Peaceman – Rachford*), todėl ši schema dažnai vadinama jų vardais.

Įvertinsime kintamųjų krypčių schemos aproksimacijos tikslumą. Vienas iš paprasčiausių tokios analizės būdų yra užrašyti šią schemą ekvivalenčiu pavidalu be tarpinio sprendinio $y^{n+0,5}$. Atėmę (3.34) lygtį iš (3.35) lygties, gauname lygybę:

$$y^{n+0,5} = \frac{y^{n+1} + y^n}{2} - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(y^{n+1} - y^n)\,, \tag{3.36}$$

čia pažymėjome:

$$\Lambda_j y = k_j y_{\bar{x}_j x_j}\,, \quad j = 1, 2\,.$$

Įrašykime šią išraišką į (3.35) lygtį. Gauname ekvivalenčią baigtinių skirtumų lygtį:

$$y_t = \Lambda_1 \frac{y^{n+1} + y^n}{2} + \Lambda_2 \frac{y^{n+1} + y^n}{2} - \frac{\tau^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 y_t\,. \tag{3.37}$$

Tam, kad šis ekvivalentumas būtų įvykdytas ne tik skirtumų lygčiai, bet ir baigtinių skirtumų schemai, būtina, jog ir kraštinės sąlygos tarpiniame žingsnyje tenkintų (3.36) lygybę, t. y. spręsdami (3.34), (3.35) lygtis naudosime tokią papildomą kraštinę sąlygą:

$$y^{n+0,5} = \frac{\mu^{n+1} + \mu^n}{2} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n), \quad x \in \partial\omega_h\,.$$

Dabar jau aproksimavimo paklaidos įvertinimas nesudėtingas, nes iš (3.37) lygties matome, kad jei (3.30) diferencialinio uždavinio sprendiniui galioja įvertinimas:

$$\Big|\,\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2\,\partial t}\,\Big| \leqslant C\,,$$

tai kintamųjų krypčių schema skiriasi nuo simetrinės baigtinių skirtumų schemos tik $O(\tau^2)$ eilės nariu. Simetrinės schemos aproksimavimo paklaida yra $\mathcal{O}(\tau^2 + h^2)$ eilės dydis, todėl toks pat yra ir kintamųjų krypčių schemos aproksimacijos tikslumas. Taigi dvimačiam uždaviniui (3.30) sudarėme ekonomišką baigtinių skirtumų schemą.

3.3.1. Stabilizuojančios pataisos metodas

Ankstesniame poskyryje išnagrinėjome kintamųjų krypčių metodą. Deja, jis nėra efektyvus, kai sprendžiame uždavinius, turinčius daugiau negu dvi erdvines koordinates.

Srityje $Q = \{(x_1, x_2, x_3),\ 0 < x_1, x_2, x_3 < 1\}$ spręskime trimatį parabolinį uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{3} k_j \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + f, \quad (x,t) \in Q \times (0,T]\,, \\ u(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \partial Q\,, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{Q}\,. \end{cases} \tag{3.38}$$

Apibrėžkime diskretųjį tinklą:

$$\omega_h = \Big\{\, x_{ijk} = (x_{1i}, x_{2j}, x_{3k}) : \ x_{1i} = ih, \quad x_{2j} = jh, \\ x_{3k} = kh, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant N-1 \,\Big\}\,.$$

Pažymėkime operatorius:

$$\Lambda_j y = k_j y_{\bar{x}_j x_j}, \quad j = 1,2,3\,.$$

Kintamųjų krypčių metodas

Pirmiausia apibendrinkime kintamųjų krypčių metodą trimačiam paraboliniam uždaviniui. Tada gauname tokią baigtinių skirtumų schemą:

$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1/3} - y^n}{\tau/3} = \Lambda_1 y^{n+1/3} + \Lambda_2 y^n + \Lambda_3 y^n + f\,, \\ \dfrac{y^{n+2/3} - y^{n+1/3}}{\tau/3} = \Lambda_1 y^{n+1/3} + \Lambda_2 y^{n+2/3} + \Lambda_3 y^{n+1/3} + f\,, \\ \dfrac{y^{n+1} - y^{n+2/3}}{\tau/3} = \Lambda_1 y^{n+2/3} + \Lambda_2 y^{n+2/3} + \Lambda_3 y^{n+1} + f\,. \end{cases} \tag{3.39}$$

Kadangi kiekviename žingsnyje tik vienas iš operatorių yra neišreikštinis, tai kintamųjų krypčių schemos realizavimas yra ekonomiškas – atlikę $Q_0 = 24N^3$ aritmetinių veiksmų, išsprendžiame $3(N-1)^2$ tiesinių lygčių sistemas su triįstrižainėmis matricomis.

Spektriniu metodu tirdami kintamųjų krypčių metodo stabilumą, gauname tokią spektrinio koeficiento išraišką:

$$c_{klm}^{n+1} = \frac{\big(1 - \tau(\lambda_l + \lambda_m)\big)\big(1 - \tau(\lambda_k + \lambda_m)\big)\big(1 - \tau(\lambda_k + \lambda_l)\big)}{(1 + \tau\lambda_k)(1 + \tau\lambda_l)(1 + \tau\lambda_m)}\, c_{klm}^n\,,$$

todėl ši schema yra tik sąlygiškai stabili, kai galioja sąlyga:

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{2 \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 3} k_j} .$$

Nesunku paaiškinti, kodėl trimačiam uždaviniui kintamųjų krypčių schema yra tik sąlygiškai stabili. Šiuo atveju kiekvienas operatorius Λ_j schemoje tik vieną kartą yra neišreikštinis, o du kartus išreikštinis, todėl gauname stabilumo sąlygą, panašią į išreikštinių schemų stabilumo reikalavimą. Matome, kad kintamųjų krypčių schema nėra ekonomiška, kai diferencialinėje lygtyje erdvinių koordinačių yra daugiau nei dvi.

Stabilizuojančios pataisos algoritmas

Panagrinėkime kintamųjų krypčių schemos modifikaciją, kurioje kiekvienas operatorius Λ_j po vieną kartą yra neišreikštinis ir išreikštinis:

$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1/3} - y^n}{\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/3} + \Lambda_2 y^n + \Lambda_3 y^n + f^{n+1} , \\ \dfrac{y^{n+2/3} - y^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{n+2/3} - y^n) , \\ \dfrac{y^{n+1} - y^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 (y^{n+1} - y^n) , \\ y^{n+p/3}(x) = \mu(x, t^{n+1}), \quad p = 1, 2, 3, \quad x \in \partial\omega_h . \end{cases} \tag{3.40}$$

Kadangi visuose žingsniuose tik vienas iš operatorių Λ_j yra neišreikštinis, tai šios schemos realizavimas yra ekonomiškas, t. y. $Q_0 = 24N^3$.

Panagrinėkime (3.40) schemos stabilumą. Po pirmojo žingsnio gauname tokius skleidinio koeficientus:

$$c_{klm}^{n+1/3} = \frac{1 - \tau(\lambda_l + \lambda_m)}{1 + \tau\lambda_k} c_{klm}^n ,$$

t. y. x_1 kryptimi paklaida mažėja, tačiau ji gali didėti x_2 ir x_3 kryptimis. Įvertinkime antrojo schemos žingsnio poveikį:

$$\begin{aligned} c_{klm}^{n+2/3} &= \frac{1}{(1 + \tau\lambda_l)} \Big(\frac{1 - \tau(\lambda_l + \lambda_m)}{1 + \tau\lambda_k} + \tau\lambda_l \Big) c_{klm}^n \\ &= \frac{1 - \tau\lambda_m + \tau^2\lambda_k\lambda_l}{(1 + \tau\lambda_l)(1 + \tau\lambda_k)} c_{klm}^n . \end{aligned}$$

Matome, kad po antrojo žingsnio paklaida gali didėti tik x_3 kryptimi. Po trečiojo žingsnio gauname spektrinius koeficientus:

$$c_{klm}^{n+1} = \frac{1 + \tau^2(\lambda_k\lambda_l + \lambda_l\lambda_m + \lambda_k\lambda_m) + \tau^3\lambda_k\lambda_l\lambda_m}{(1+\tau\lambda_k)(1+\tau\lambda_l)(1+\tau\lambda_m)}\, c_{klm}^n\,.$$

Kadangi $|q_{klm}| < 1$, tai schema yra nesąlygiškai stabili. Taigi (3.40) baigtinių skirtumų schema yra ekonomiška. Kadangi antrasis ir trečiasis schemos žingsniai yra skirti stabilumui pagerinti, tai ši baigtinių skirtumų schema vadinama *stabilizuojančios pataisos metodu.*

Rasime (3.40) schemos aproksimavimo paklaidą ir įvertinsime globaliosios paklaidos dydį. Pažymėkime globaliąją paklaidą:

$$\begin{aligned} &z^n = y^n - u^n\,,\\ &z^{n+p/3} = y^{n+p/3} - u^{n+1}, \quad p = 1,2,3 \end{aligned}$$

ir kiekvieno žingsnio aproksimavimo paklaidas:

$$\begin{aligned} \psi^{n+1/3} &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \Lambda_1 u^{n+1} - \Lambda_2 u^n - \Lambda_2 u^n - f^{n+1}\,,\\ \psi^{n+2/3} &= -\Lambda_2(u^{n+1} - u^n) = -\tau\Lambda_2 u_t\,,\\ \psi^{n+1} &= -\Lambda_3(u^{n+1} - u^n) = -\tau\Lambda_3 u_t\,. \end{aligned}$$

Pirmoji skirtumų lygtis (3.40) aproksimuoja (3.38) diferencialinę lygtį, o antroji ir trečioji lygtys aproksimuoja tapatybę:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0\,.$$

Todėl teisingos lygybės:

$$\psi^{n+1/3} = \mathcal{O}(\tau + h^2), \;\; \psi^{n+2/3} = \mathcal{O}(\tau), \;\; \psi^{n+1} = \mathcal{O}(\tau)\,.$$

Funkcijos $z^{n+p/3}$ tenkina tokią baigtinių skirtumų schemą:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{z^{n+1/3} - z^n}{\tau} = \Lambda_1 z^{n+1/3} + \Lambda_2 z^n + \Lambda_3 z^n + \psi^{n+1/3}\,,\\ &\frac{z^{n+2/3} - z^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2(z^{n+2/3} - z^n) + \psi^{n+2/3}\,,\\ &\frac{z^{n+1} - z^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3(z^{n+1} - z^n) + \psi^{n+1}\,. \end{aligned} \right. \tag{3.41}$$

Spektriniu metodu įrodome stabilumo nelygybę:

$$\|z^{n+1}\|^2 \leqslant \|z^n\|^2 + \tau \sum_{p=1}^{3} \|\psi^{n+p/3}\|^2 ,$$

iš kurios gauname globaliosios paklaidos įvertinimą:

$$\|z^n\| \leqslant t^n \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Big(\sum_{p=1}^{3} \|\psi^{k+p/3}\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C(\tau + h^2), \quad n = 1, 2, \dots, K .$$

Taigi stabilizuojančios pataisos metodas yra ekonomiškas ir jo sprendinio tikslumas yra $\mathcal{O}(\tau + h^2)$. Šis metodas gali būti apibendrintas diferencialiniams uždaviniams su bet kokiu erdvinių koordinačių skaičiumi.

3.3.2. Lokaliai vienmatės skirtumų schemos

Nagrinėkime baigtinių skirtumų schemą, kurią vadinsime *lokaliai vienmate* schema:

$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1/3} - y^n}{\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/3} + \frac{1}{3} f^{n+1}, \quad (x,t) \in \omega_{h\tau} , \\ \dfrac{y^{n+2/3} - y^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 y^{n+2/3} + \frac{1}{3} f^{n+1} , \\ \dfrac{y^{n+1} - y^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 y^{n+1} + \frac{1}{3} f^{n+1} , \\ y^{n+j/3}(x) = \mu(x, t^{n+1}) , \quad j = 1, 2, 3, \quad x \in \partial\omega_h . \end{cases} \tag{3.42}$$

Jos realizavimas yra ekonomiškas – kiekviename žingsnyje sprendžiame tik vienmačius uždavinius, sprendinį y^{n+1} randame atlikę $Q_0 = 24\,N^3$ aritmetinių veiksmų.

Spektriniu metodu tirdami lokaliai vienmatės schemos stabilumą, gauname spektrinių koeficientų išraiškas:

$$c_{klm}^{n+1} = \frac{1}{(1+\tau\lambda_k)(1+\tau\lambda_l)(1+\tau\lambda_m)}\, c_{klm}^{n} ,$$

todėl lokaliai vienmatė schema yra nesąlygiškai stabili. Taigi ši schema yra ekonomiška.

Lokaliai vienmatės schemos konvergavimas

Įvertinsime globaliosios paklaidos konvergavimo greitį. Pažymėkime globaliąją paklaidą:

$$z^n = y^n - u^n, \qquad z^{n+p/3} = y^{n+p/3} - u^{n+1}, \quad p = 1, 2, 3\,.$$

Funkcijos $z^{n+p/3}$ tenkina tokią baigtinių skirtumų schemą:

$$\begin{cases} \dfrac{z^{n+1/3} - z^n}{\tau} = \Lambda_1 z^{n+1/3} + \psi^{n+1/3}, \quad x \in \omega_h\,, \\ \dfrac{z^{n+2/3} - z^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 z^{n+1/3} + \psi^{n+2/3}\,, \\ \dfrac{z^{n+1} - z^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 z^{n+1} + \psi^{n+1}\,, \\ z^{n+p/3} = 0, \quad p = 1, 2, 3, \quad x \in \partial\omega_h\,, \end{cases} \tag{3.43}$$

čia $\psi^{n+p/3}$ yra lokaliai vienmatės schemos p-ojo žingsnio aproksimavimo paklaida. Įvertinsime funkciją $\psi^{n+1/3}$:

$$\psi^{n+1/3} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \Lambda_1 u^{n+1} - -\frac{1}{3} f^{n+1}\,.$$

Ją užrašysime kaip dviejų funkcijų sumą:

$$\psi^{n+1/3} = e^{n+1/3} + \nu^{n+1/3}\,,$$

čia pažymėjome:

$$e^{n+1/3} = \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{3}\, f^{n+1}\,,$$

$$\nu^{n+1/3} = \mathcal{O}(\tau + h^2)\,.$$

Kadangi $e^{n+1/3} = \mathcal{O}(1)$, tai ir $\psi^{n+1/3} = O(1)$, todėl pirmoji skirtumų lygtis (3.42) neaproksimuoja diferencialinės lygties. Visiškai analogiškai įvertiname ir kitų dviejų skirtumų lygčių aproksimavimo paklaidas:

$$\psi^{n+p/3} = e^{n+p/3} + \nu^{n+p/3}, \quad p = 2, 3, \quad x \in \omega_h\,,$$

$$e^{n+2/3} = -\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3}\, f^{n+1}\,,$$

$$e^{n+1} = -\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{3}\, f^{n+1}\,,$$

$$\nu^{n+p/3} = \mathcal{O}(\tau + h^2), \quad p = 2, 3\,.$$

Nesunku patikrinti, kad

$$\sum_{p=1}^{3} e^{n+p/3} = \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} - \sum_{p=1}^{3} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x_p^2} - f^{n+1} = 0\,,$$

todėl lokaliai vienmatė schema aproksimuoja diferencialinę lygtį specialioje normoje, kurioje sumuojame paklaidų reikšmes (o ne jų modulius!):

$$\sum_{p=1}^{3} \psi^{n+p/3} = \sum_{p=1}^{3} e^{n+p/3} + \sum_{p=1}^{3} \nu^{n+p/3} = \mathcal{O}(\tau + h^2)\,. \tag{3.44}$$

Tokią aproksimaciją vadinsime *vidurkine.*

Norėdami įrodyti lokaliai vienmatės schemos sprendinio konvergavimą, turime gauti specialų stabilumo įvertinimą, leidžiantį išnaudoti vidurkinės aproksimacijos sąlygą, pavyzdžiui, netinka aproksimavimo paklaidos įvertinimas $\sum\limits_{p=1}^{3} |\psi^{n+p/3}|$, kadangi $\sum\limits_{p=1}^{3} |\psi^{n+p/3}| = \mathcal{O}(1)$.

Panagrinėsime tik vieną iš stabilumo nelygybės įrodymo būdų. Užrašykime globaliąją paklaidą kaip dviejų funkcijų sumą:

$$\begin{aligned} &z^{n+p/3} = v^{n+p/3} + \eta^{n+p/3}, \quad p = 1,2,3\,,\\ &v^0 = 0, \quad \eta^0 = 0\,. \end{aligned}$$

Funkcija $\eta^{n+p/3}$ yra specialaus pradinio uždavinio sprendinys:

$$\frac{\eta^{n+p/3} - \eta^{n+(p-1)/3}}{\tau} = e^{n+p/3}, \quad p = 1,2,3, \quad x \in \bar{\omega}_h\,.$$

Užrašykime $\eta^{n+p/3}$ išreikštine forma:

$$\eta^{n+p/3} = \eta^n + \tau \sum_{j=1}^{p} e^{n+j/3}\,.$$

Iš vidurkinės aproksimacijos sąlygos gauname, kad:

$$\eta^{n+1} = \eta^n = \ldots = \eta^0 = 0\,,$$

o tarpiniuose laiko sluoksniuose galioja įvertinimai:

$$\eta^{n+p/3} = \mathcal{O}(\tau), \quad p = 1,2\,. \tag{3.45}$$

Tada funkcija $v^{n+p/3}$ yra tokios baigtinių skirtumų schemos sprendinys:

$$\begin{cases} \dfrac{v^{n+p/3} - v^{n+(p-1)/3}}{\tau} = \Lambda_p v^{n+p/3} + \tilde{\psi}^{n+p/3}, \quad x \in \omega_h \,, \\ v^{n+p/3} = -\eta^{n+p/3}, \quad x \in \partial\omega_h \,, \\ \tilde{\psi}^{n+p/3} = \nu^{n+p/3} + \Lambda_p \eta^{n+p/3} \,. \end{cases}$$

Jei diferencialinio uždavinio sprendinys yra glodžioji funkcija, tai iš aproksimavimo paklaidos $\nu^{n+p/3}$ ir funkcijos $\eta^{n+p/3}$ įvertinimų gauname nelygybę:

$$|\tilde{\psi}^{n+p/3}| \leqslant C(\tau + h^2) \,.$$

Baigtinių skirtumų schema tenkina maksimumo principo sąlygas, todėl:

$$\|v^{n+p/3}\|_{C(\omega_h)} \leqslant \max_{k,\alpha} |\eta^{k+\alpha/3}| + C\|\tilde{\psi}\|_{C(\omega_h)} \leqslant C(\tau + h^2) \,.$$

Pasinaudoję (3.45) įverčiu ir trikampio nelygybe, įvertiname globaliąją baigtinių skirtumų schemos paklaidą:

$$\|z^{n+p/3}\|_{C(\omega_h)} \leqslant \|v^{n+p/3}\|_{C(\omega_h)} + \|\eta^{n+p/3}\|_{C(\omega_h)} \leqslant C(\tau + h^2) \,.$$

3.3 pavyzdys. Oro užterštumo modelis. Spręskime uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{3} \Big(\alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - \dfrac{\partial (v_j u)}{\partial x_j} \Big) + f(x,t,u) \,, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in Q \,. \end{cases}$$

Aproksimuokime diferencialinį uždavinį paprastesnių uždavinių seka. Pirmajame žingsnyje sprendžiame difuzijos uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^{n+1/3}}{\partial t} = \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha \dfrac{\partial^2 U^{n+1/3}}{\partial x_j^2}, \quad t^n < t \leqslant t^{n+1} \,, \\ U^{n+1/3}(x,t^n) = U^n(x,t^n), \end{cases}$$

antrajame žingsnyje – konvekcijos uždavinį:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^{n+2/3}}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{3} \dfrac{\partial (v_j U^{n+2/3})}{\partial x_j} = 0, \quad t^n < t \leqslant t^{n+1} \,, \\ U^{n+2/3}(x,t^n) = U^{n+1/3}(x,t^n), \end{cases}$$

trečiajame žingsnyje – cheminės reakcijos uždavinį (paprastųjų diferencialinių lygčių sistemas):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^{n+1}}{\partial t} = f(x, t, U^{n+1}), \quad t^n < t \leqslant t^{n+1}\,, \\ U^{n+1}(x, t^n) = U^{n+2/3}(x, t^{n+1})\,. \end{cases} \tag{3.46}$$

Kiekvieną iš gautųjų uždavinių sprendžiame tokiu metodu, kuris yra efektyvus atitinkamų uždavinių klasėje. Pastebėsime, pavyzdžiui, kad trečiajame žingsnyje kiekviename taške x turime nepriklausomą paprastųjų diferencialinių lygčių sistemą. Visiems uždaviniams parenkame specialius integravimo parametrus τ, o sprendžiant (3.46) lygtis šis parametras gali būti skirtingas ir skirtingoms x reikšmėms.