Turinys

1 skyrius

Ryškiosios ir neryškiosios aibės

1.1. Aibės (ryškiosios) sąvoka

> ***Aibė*** *matematikoje suvokiama kaip vientisa gerai atskiriamų vienas nuo kito mūsų intuicija arba mintimi objektų visuma.*

Tai yra viena iš pirminių matematikos sąvokų, kurios nėra griežtai apibrėžtos, bet aprašomos, paaiškinamos pavyzdžiais. Tarkime, į maišą sudėti tam tikri daiktai – objektai, jie vadinami aibės ***elementais***, o maišas šiuo atveju yra tų daiktų aibė.

Teiginį, kad elementas a priklauso aibei A užrašome $a \in A$, o, kad b nepriklauso aibei (nėra jos elementas) užrašome $b \notin A$ (arba $b\overline{\in}A$).

Apibrėžti[1] t.y. aprašyti aibę A reiškia nurodyti visus jos elementus, kurių gali būti ne tik baigtinis skaičius, bet ir begalo daug.

Pavyzdžiui, penkių didžiausių Lietuvos miestų aibę galime užrašyti taip:

$$\mathfrak{LM}_5 = \big\{\text{Vilnius, Kaunas, Klaipėda, Panevėžys, Šiauliai}\big\}\,.$$

Bendruoju atveju baigtinės aibės A elementus galima sunumeruoti ir užrašyti

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\,.$$

Susitarkime nerašyti to pačio elemento du kartus ir nelaikyti skirtingomis aibių, kurios skiriasi tik elementų tvarka.

[1] Čia kalbame apie konkrečią aibę, o ne apie aibės sąvoką!

Pavyzdžiui, trijų elementų aibę galima užrašyti 6 būdais:

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_3, a_2\} = \{a_2, a_1, a_3\} = \{a_2, a_3, a_1\} = \{a_3, a_1, a_2\} = \{a_3, a_2, a_1\}.$$

Visų begalinės aibės elementų surašyti neįmanoma, tačiau dažnai pavyksta nurodyti taisyklę, kuri leidžia atsakyti į klausimą, ar tam tikras objektas yra aibės elementas.

Pavyzdžiui, natūraliųjų ir sveikųjų skaičių aibės užrašomos taip:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
ir čia paminėtos taisyklės laikomos intuityviai suprantamomis.[2]
Kitas aibės apibrėžimo (aprašymo) būdas yra nurodyti tam tikrą jos elementus ribojančią (išskiriančią) iš kitos bendresnės, platesnės, pagrindinės aibės savybę.

Pavyzdžiui, pirminių skaičių aibę sudaro tokie (didesni už 1) natūralieji skaičiai, kurie dalinasi tik iš 1 ir iš savęs. Pažymėkime $D(n)$ skaičiaus n daliklių aibę: $D(1) = \{1\}$, $D(2) = \{1, 2\}$, $D(3) = \{1, 3\}$, $D(4) = \{1, 2, 4\}$, $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Tada pirminių skaičių aibę galima apibrėžti taip:

$$\mathfrak{P} = \{n \in \mathbb{N} : n > 1, D(n) = \{1, n\}\}.$$

Susitarkime, kad anksčiau paminėtą bendresnę, platesnę, pagrindinę aibę vadinsime ***universaliąja***[3] ir žymėsime U. Tarkime, kad visiems elementams $u \in U$ apibrėžta funkcija[4] $a : U \to \{0, 1\}$. Tada aibę A apibrėžiama taip:

$$A = \{u \in U : \mu_A(u) = 1\}.$$

Taip apibrėžtos aibės A elementai yra tik kai kurie (nors atskirais atvejais gali būti ir visi) aibės U elementai (žr. 1.1 pav.). Taigi A yra dalis arba poaibis aibės U (rašome $A \subset U$ arba $U \supset A$).

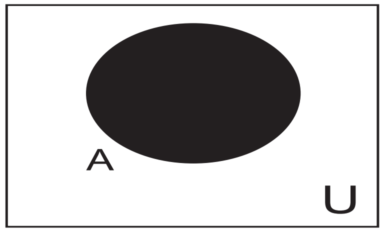
Funkciją $\mu_A(u)$ vadinsime aibės A ***charakteristine*** arba priklausomumo funkcija. Pastebėkime, kad jei[5] $(\forall u \in U)\ \mu_A(u) = 0$ (t.y. charakteristinė

[2] Jas galima įsivaizduoti kaip algoritmą, pagal kurį iš tam tikro elemento gaunami kiti, pvz., turime 1 ir žinome kas yra $1 + 1$, tada $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ ir t.t.

[3] Ši aibė visada priklauso nuo konteksto ir negali aprėpti visų atvejų, pvz., būti visų aibių aibe (žr. Raselo paradoksą). Pvz., pirminių skaičių pavyzdyje U yra natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N}$.

[4] Funkcija matematikoje vadinama taisyklė, pagal kurią vienos aibės (ji vadinama funkcijos apibrėžimo sritimi) kiekvienam elementui priskiriamas vienas (ir tik vienas) kitos aibės elementas (ji vadinama funkcijos reikšmių sritimi). Mūsų pavyzdyje funkcijos μ_A apibrėžimo sritis yra U, o reikšmių sritis – aibė $\{0, 1\}$.

[5] Ženklas $\forall$ vadinamas bendrumo (visuotinumo), keičia žodžius „kiekvienas“, „bet kuris“. Kitas kvantorius $\exists$ – egzistavimo kvantorius, keičia žodžius „yra“, „egzistuoja“.



1.1 pav.. Aibė A yra universalios aibės U poaibis

funkcija yra konstanta) gausime aibę, kuri neturi elementų (nė vienas universaliosios aibės elementas neturi savybės μ_A, t.y. reikalavimai aibės A elementams labai griežti). Tokią aibę vadiname *tuščiąja* ir žymime $\varnothing$.

Kai $(\forall u \in U)\ \mu_A(u) = 1$, gauname $A = U$ (t.y. aibės A elementams nekeliami jokie reikalavimai).

Taigi gauname bet kuriai aibei A teisingas formules (aibių teorijos dėsnius)

$$\boxed{\varnothing \subset A, A \subset A}$$

Pavyzdys

Tarkime, kad universalioji aibė $U = \mathfrak{LM}_5$ – penki didžiausi Lietuvos miestai, [a]

$$m_x(u) = \begin{cases} 1, & \text{kai miesto } U \text{gyventojų skaičius didesnis už } x \\ 0, & \text{priešingu atveju .} \end{cases}$$

Tada aibė

$$\mathfrak{A}_x = \{u \in \mathfrak{LM}_5 : m_x(u) = 1\}$$

bus

$\mathfrak{A}_{1\text{mln.}} = \varnothing$,

$\mathfrak{A}_{500\text{tūkst.}} = \{\text{Vilnius}\}$,

$\mathfrak{A}_{100\text{tūkst.}} = \mathfrak{LM}_5$.

[a] Lietuvos statistikos departamento duomenimis 2013 m. pr. gyventojų skaičius Lietuvos didžiausiuose miestuose buvo: Vilnius – 526 356 , Kaunas – 306 888, Klaipėda – 158 541, Šiauliai – 106 470, Panevėžys – 97 343.

Pratimas

Ištirkite aibės $\mathfrak{A}_x$ priklausomybę nuo parametro x (reikia pateikti demografinius duomenis). Atkreipkite dėmesį, $\mathfrak{A}_x$ priklauso nuo laiko ir nuo demografinių duomenų tikslumo, taip pat nuo sąvokos „gyventojas " apibrėžimo. Bendruoju atveju $\mathfrak{A}_x$ apibrėžiama nevienareikšmiai.

Klausimas

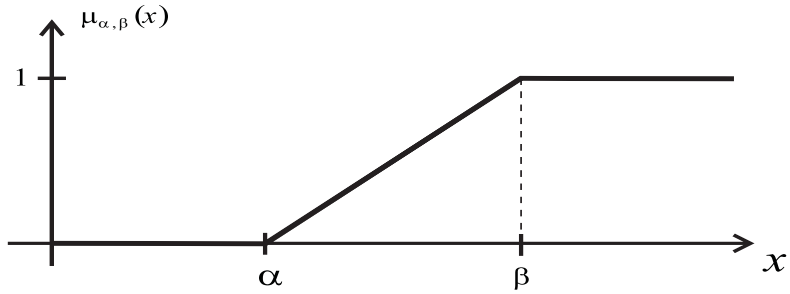
Kurie aprašyti studentų ir studenčių rinkiniai yra aibės?
(1) $\mathfrak{V}42$ – vadybos specialybės įstojusių 2004 metais antrosios grupės studentai;
(2) $\mathfrak{A}$ – aukšti mūsų universiteto studentai;
(3) $\mathfrak{G}$ – gražios mūsų universiteto studentės.

1.2. Neryškiosios aibės sąvoka

Atsakymas į pateiktą klausimą – tik $\mathfrak{V}42$ yra aibė (nes jos elementai – studentai apibrėžiami Universiteto Rektoriaus Įsakymu, kuriuo tvirtinamas grupės sąrašas). Kiti du rinkiniai apibrėžti (aprašyti) neaiškiai, nekonkrečiai, nevienareikšmiškai. Jie rodo, kad net paprastiems realiems atvejams modeliuoti reikia aibės sąvoką apibendrinti, praplėsti.

Tarkime, kad U yra universalioji aibė ir $\forall u \in U$ apibrėžta ***charakteristine*** (priklausomumo) funkcija $\mu_A(u) : U \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ (t.y. funkcijos reikšmių sritis yra realiųjų skaičių intervalas (atkarpa) $[0,1]$ – ne tik du skaičiai 0 ir 1).

Neryškiąja aibe *A (neryškiuoju aibės U poaibiu) vadinsime aibę $A = \{(u, a(u)), u \in U\}$, t.y. aibę, kurios elementai yra poros $(u, a(u))$; skaičius $a(u) \in [0,1]$ vadinamas elemento priklausomumo aibei A* ***laipsniu****.*



1.2 pav.. Funkcijos μ grafikas

Pavyzdys

Tarkime, kad x yra studento ūgis ir apibrėžkime priklausomumo aukštiems studentams charakteristinę funkciją $\mu_{\alpha,\beta}(x)$ kaip atkarpomis tiesinę funkciją, kuri įgyja reikšmes 0, kai $x \leq \alpha$ (studentas tikrai nėra aukštas) ir 1, kai $x \geq \beta$ (studentas tikrai yra aukštas). Funkcijos grafikas pavaizduotas 1.2 pav.:

Funkciją μ galima išreikšti formule

$$\mu_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leq \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{kai } \alpha < x < \beta, \alpha < \beta \\ 1, & \text{kai } x \geq \beta. \end{cases}$$

Tarkime, kad grupės studentų $U = \{JJ, JP, PJ, PP\}$ ūgis yra: 162,178,182,197. Tada aibė $\mathfrak{M} = \{(u, \mu_{180,190}(u))\}$ bus ši $\{(JJ, 0), (JP, 0), (PJ, 0.2), (PP, 1)\}$.

Neryškiosios aibės A ***atrama*** *vadinama aibė*

$$suppA = \{u \in U : \mu_A(u) > 0\}.$$

Pavyzdžiui, $supp\mathfrak{M} = \{PJ, PP\}$.

Pastebėkime, kad $suppA$ yra ryškioji (įprastinė, klasikinė) aibė, ir jei charakteristinė funkcija $a(u)$ įgyja tik dvi reikšmes 0 ir 1, tai

$$supp\{(u, \mu_A(u)), u \in U\} = \{u \in U : a(u) = 1\}.$$

Taigi šiuo atveju $suppA = A$ ir todėl neryškiosios aibės sąvoka apibendrina aibės sąvoką (paprastoji yra jos atskiras atvejis).

Sakysime, kad neryškioji aibė $A = \{(u, \mu_A(u)), u \in U\}$ yra neryškiosios aibės $B = \{(u, \mu_B(u)), u \in U\}$ ***poaibis***, jei $(\forall u \in U)$ $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$.

Pavyzdys

Apibrėžkime priklausomumo aibei – artimų skaičiui s realiųjų skaičių – funkciją

$$\eta_{s,\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \le s-\alpha \text{ arba } x \ge s+\beta, \\ \frac{s-x}{s-\alpha}, & \text{kai } x \in [s-\alpha, s], \\ \frac{x-s}{\beta-s}, & \text{kai } x \in [s, s+\beta]. \end{cases}$$

Funkcijos η grafikas pavaizduotas 1.3 pav.

Parodykite, kad

$$A_{100,1,1} \subset A_{100,2,2}.$$

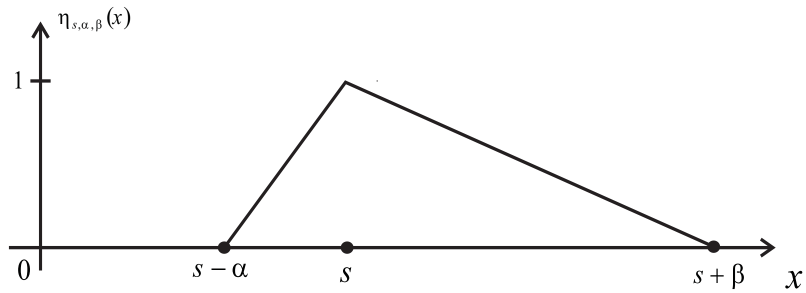
Neryškioji aibė $A_{s,\alpha,\beta}$ apibrėžta taip:

$$A_{s,\alpha,\beta} = \{(u, \eta_{s,\alpha,\beta}(u)), u \in \mathbb{R}\}.$$

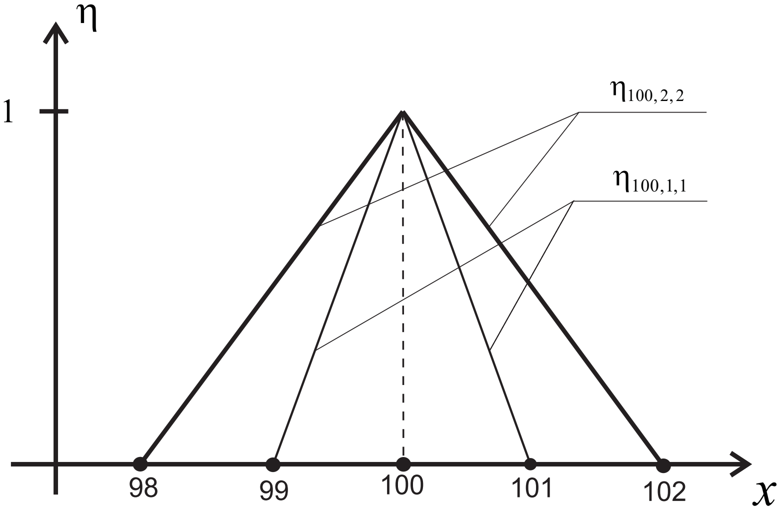
Funkcijos $\eta_{100,1,1}$ ir $\eta_{100,2,2}$ pavaizduotos 1.4 pav.

Matome, kad $\eta_{100,1,1}(x) \le \eta_{100,2,2}(x)$. Pastebėkime, dar, kad $suppA_{100,1,1} = [99, 101] \subset suppA_{100,2,2} = [98, 102]$, o $suppA_{100,0,0} = \{100\}$, t.y. funkcija $\eta_{s,0,0}(x)$ apibrėžia ryškiąją aibę $\{s\} \subset \mathbb{R}$ – skaičių [a] $s \in \mathbb{R}$.

[a] Atkreipkite dėmesį, kad $\{s\}$ – yra aibė, sudaryta iš vieno elemento (realiojo skaičiaus) s, todėl s yra realiųjų skaičių aibės $\mathbb{R}$ elementas (rašome $s \in \mathbb{R}$), o aibė $\{s\}$ yra aibės $\mathbb{R}$ poaibis (rašome $\{s\} \subset \mathbb{R}$).



1.3 pav.. Funkcijos η grafikas



1.4 pav.. Funkcijos $\eta_{100,1,1}$ ir $\eta_{100,2,2}$ grafikas

Pavyzdys

Priklausomumo funkcijos $\eta_{s,\alpha,\beta}$ yra atskiras atvejis $(L - R)$ – tipo[a] funkcijų, kurios bendruoju atveju turi 1.5 pav. pavaizduotą pavidalą Čia $a_L \leq t_L \leq t_R \leq a_R$, $L : [a_L, t_L] \to [0, 1]$ – nemažėjanti funkcija, $L(a_L) = 0$, $L(t_L) = 1$,
$R : [t_R, a_R] \to [0, 1]$ – nedidėjanti funkcija, $R(t_R) = 1$, $R(a_R) = 0$.

[a] Žymėjimas reiškia L – *angl.* left (kairysis), R – *angl.* right (dešinysis).

Intervalas (atkarpa) $[t_L, t_R]$ *vadinamas* ***tolerancijos intervalu****.*

Kai funkcijos L ir R yra tiesinės, priklausomumo funkcija M_{a_L,t_L,t_R,a_R} vadinama ***trapecine****, jos atskiras atvejis* $(t_L = t_R)$ *– trikampinė funkcija* $\eta_{s,\alpha,\beta}$ $(s = t_L = t_R, \alpha = s - a_L, \beta = a_R - s)$.

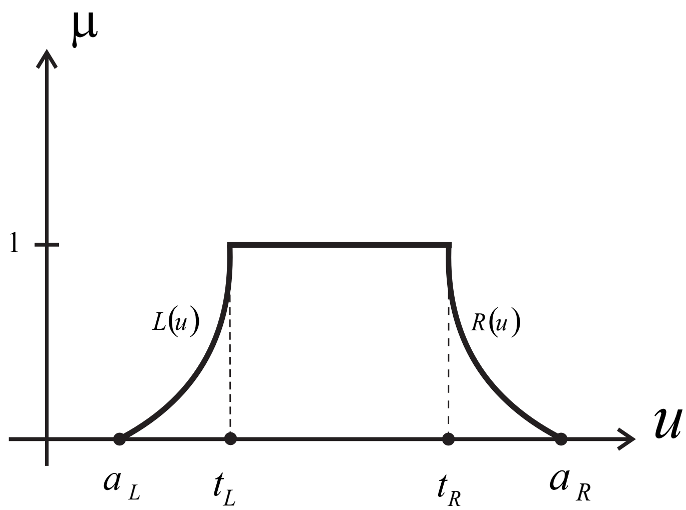
Uždavinys. Išreiškite trapecinę funkciją formule.

Pratimas

Sudarykite neryškiąją aibę D_{a_L,t_L,t_R,a_R} – dideli Lietuvos miestai. Ištirkite aibės priklausomybę nuo parametrų $t_L, t_R \in [100$ *(tūkst.)* $; 300$ *(tūkst.)* $]$, $a_L = 50$ *(tūkst.)*, $a_R = 400$ *(tūkst.)*.

Atkreipkime dėmesį, kad charakteristinė funkcija $\mu_A : U \to [0, 1]$ nėra vienintelis būdas apibrėžti neryškiąją aibę A. Formalus matematinis apibendrinimas – nagrinėti funkcijas $\mu_A : U \to \mathfrak{M}$, kai $\mathfrak{M}$ tam tikra priklausomumo aibė[6]. Priklausomumo aibės $[0, 1]$ atveju atsiranda natūrali teorijos interpretacija: 0 – reiškia absoliutų elemento nepriklausomumą, 1 – absoliutų priklausomumą, kitos reikšmės iš intervalo $(0, 1)$ interpretuojamos kaip priklausomumo laipsnis. Kitų aibių M atveju interpretacijos gali būti kitokios, bet mes šioje knygoje jų nenagrinėsime.

[6] Neryškių aibių teorijos kūrėjas **Zadė** (Lotfi A. Zadeh gimė 1921 m.) nagrinėjo aibės tipų $n = 1, 2, \ldots$, kai pirmojo tipo atveju $\mathfrak{M} = [0, 1]$, antrojo – M yra pirmojo tipo neryškiosios aibės ir t.t. Sukurta paskutiniame praėjusio amžiaus dešimtmetyje neryškiųjų intuityviųjų aibių teorija nagrinėja priklausomumo funkcijas $\mu : U \to \{(x, y) \in R : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1\}$.



1.5 pav.. $(L - R)$– tipo priklausomumo funkcijos

Sakysime, kad neryškioji aibė A yra ***normalioji*** *, kai*[7]

$$sup_{u\in U}\mu_A(u) = 1.$$

Kai neryškioji aibė A nėra normalioji, ją vadinsime ***subnormaliąja****.*

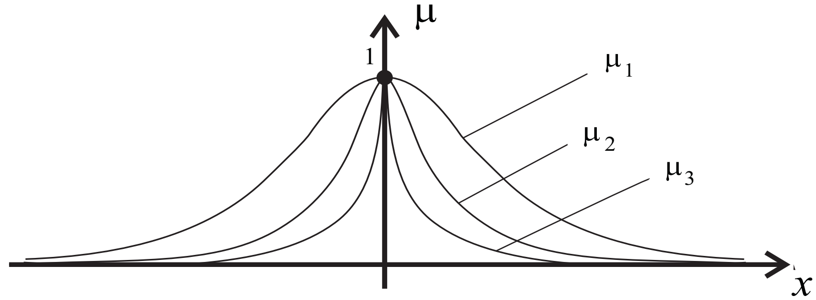
Pavyzdžiui, aibė $\mathfrak{N}_\nu = \left\{(x, \mu_\nu(x)), x \in \mathbb{R}, \mu_\nu(x) = e^{-\nu x^2}, \nu > 0\right\}$ yra normalioji, o aibė $\mathfrak{S} = \{(1, 0.9), (2, 0.8), (3, 0.3)\}$ – subnormalioji.

Funkcijos $\mu_\nu(x)$ grafikai, esant skirtingoms parametro ν reikšmėms, pavaizduoti 1.6 pav.

Pastebėkime, kad $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\mu_3 \leq \mu_2 \leq \mu_1$ *ir todėl*

$$\mathfrak{N}_3 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}_1.$$

Aibės $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ *galima interpretuoti, pavyzdžiui, taip*[8]*:*
$\mathfrak{N}_1$ *– realiųjų skaičių, pakankamai artimų nuliui, aibė;*



1.6 pav.. Funkcijos $\mu_\nu(x)$ grafikai

$\mathfrak{N}_2$ *– realiųjų skaičių, artimų nuliui, aibė;*
$\mathfrak{N}_3$ *– realiųjų skaičių, labai artimų nuliui, aibė.*
Tokios aibės vadinamos ***lingvistiniais kintamaisiais****. Suprantama, kad pavadinimai* ***pakankamai artimas****,* ***labai artimas*** *ir parametro reikšmės gali būti ir kiti.*

1.3. Veiksmai su neryškiomis aibėmis

1.3.1. Matematinės logikos pradmenys

Teiginiu *matematinėje logikoje vadinamas sakinys, tvirtinimas, reiškimas, kuris visada yra arba teisingas, arba klaidingas. Kaip ir aibė, taškas, plokštuma ir kt. – teiginys yra pirminė matematikos sąvoka.*

Pavyzdžiui, sakinys:
$\mathfrak{V}_1$– Vilnius yra Lietuvos sostinė yra teiginys; jis yra teisingas.

Sakinys
$\mathfrak{V}_2$– Vilnius yra didelis miestas, nėra teiginys, jei vienareikšmiškai neapibrėžta sąvoka "didelis".
Sakinys "$2 > 5$" yra klaidingas teiginys, o sakinys "$x > y$" nėra[9] teiginys,

[9]Tokie sakiniai vadinami predikatais (žr.). Pastebėkime, kad tokie reiškiniai su predikatais yra teiginiai: $(\forall x \in \mathbb{R})\ x > \pi$ (klaidingas), $(\exists x \in \mathbb{R})\ x > \sqrt{2}$ (teisingas).

nes jis gali būti ir teisingas, ir klaidingas, priklausomai nuo kintamųjų x, y reikšmių.

Nagrinėsime tam tikros universaliosios aibės U poaibius:

$$A = \{u \in U : \mu_A(u) = 1\},$$

$$B = \{u \in U : \mu_B(u) = 1\}.$$

Priklausomai nuo $u \in U$ reikšmės, predikatų "$\mu_A(u) = 1$" ir "$\mu_B(u) = 1$" (žymėsime a ir b)reikšmės gali būti 1, kai įrašius vietoje u konkretų elementą, gauname teisingą teiginį, ir 0 – priešingu atveju. Sakysime, kad a ir b yra loginiai[10] kintamieji.

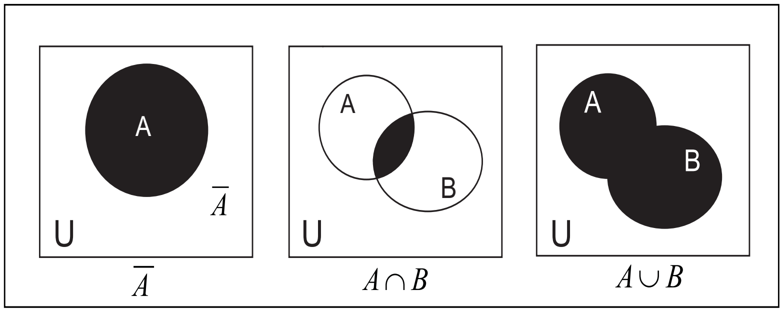
Su loginiais kintamaisiais atliekami loginiai veiksmai (operacijos):

Operacijos pavadinimas	Operandai (kintamieji)		Žymėjimai	Reikšmės
konjunkcija (dvivietė arba binarioji operacija)	a	b	$a\&b$ $a?b$ ab	$0\&0 =$ $= 0\&1 =$ $= 1\&0 = 0$ $1\&1 = 1$
disjunkcija (dvivietė arba binarioji operacija)	a	b	$a \vee b$	$0 \vee 0 = 0$ $0 \vee 1 =$ $1 \vee 0 =$ $= 1 \vee 1 = 1$
neigimas (vienvietė arba unarioji operacija)	a		$\overline{a}$ $\neg a$	$\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$

Loginės operacijos leidžia iš teiginių (kintamųjų) sudaryti naujus teiginius. Jos formalizuoja samprotavimus ir keičia junginius „ir “ („abu “, „ir vienas, ir kitas “) – konjunkcija (&), „arba “ („bent vienas “) – disjunkcija (∨), „ne “ („netiesa, kad “) – neigimas (¬).

Pavyzdžiui, jei raidėmis J ir P pažymėti teiginiai „Jonas yra mūsų universiteto studentas “ ir „Petras yra mūsų universiteto studentas “, tai
$J\&P$ – „Jonas ir Petras (abu) yra mūsų universiteto studentai“,
$J \vee P$ – „Jonas arba Petras (bent vienas iš jų, bet gal ir abu) yra mūsų

[10]Jie dar vadinami Buliniais arba Bulio kintamaisiais, nuo ... pavardės ...



1.7 pav.. Veiksmai su (ryškiomis) aibėmis

universiteto studentai“,
$\neg J$ – „Jonas nėra mūsų universiteto studentas (netiesa, kad Jonas yra mūsų universiteto studentas)“.

1.3.2. Operacijos su (ryškiomis) aibėmis

Aibių A ir B ***sąjunga*** *vadinama aibė*

$$A \cup B = \{u \in U : \mu_A(u) = 1 \vee \mu_B(u) = 1\},$$

t.y. aibė $A \cup B$ sudaryta iš visų (kurie priklauso bent vienai iš aibių) aibių A ir B elementų (žr. 1.7 pav.).

Pavyzdžiui,

$$\{1,2,3,4\} \cup \{0,2,4,6\} = \{0,1,2,3,4,6\}.$$

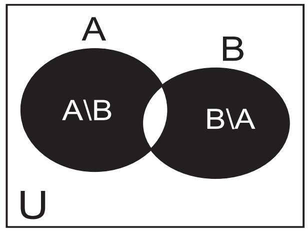
Aibių A ir B ***sankirta*** *vadinama aibė*

$$A \cap B = \{u \in U : \mu_A(u) = 1 \ \& \ \mu_B(u) = 1\},$$

t.y. aibė $A \cap B$ sudaryta iš bendrų (kurie priklauso abiems aibėms) aibių A ir B elementų (žr. 1.7 pav.)

Aibės A papildinys

$$\overline{A} = \{u \in U : \neg(\mu_A(u) = 1)\},$$



1.8 pav.. Aibių skirtumas

t.y. aibė, sudaryta iš elementų $u \in A$, kurie nepriklauso aibei A (žr. 1.7 pav.).
Pastebėkime,kad $\neg(\mu_A(u) = 1) \Leftrightarrow \mu_A(u) = 0.$[11]

Aibių A ir B ***skirtumu*** $A \setminus B$ vadinama aibė, sudaryta iš tų aibės A elementų, kurie nepriklauso aibei B, t.y.

$$A \setminus B = \{u \in U : (\mu_A(u) = 1) \,\&\, (\mu_B(u) = 0)\}.$$

Pastebėkime, kad $A \setminus B \neq B \setminus A$ (žr. 1.8 pav.).
Aibės A papildinį $\overline{A}$ galima išreikšti taip

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Galioja tokie (ryškiųjų) aibių teorijos dėsniai[12]:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing,$$

$$A \cup \overline{A} = U,$$

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing.$$

Aibė $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ vadinama aibių A ir B ***simetriniu skirtumu*** ir žymima $A \Delta B$.

[11]Ženklas $a \Leftrightarrow b$ reiškia „tada ir tik tada, kai “ arba teiginiai a ir b ekvivalentūs (jie arba abu teisingi, arba abu klaidingi)
[12]žr. ...

Pavyzdys

$$A = \{1, 5, 7, 8, 10\},$$
$$B = \{1, 6, 7, 9, 10\},$$
$$A \cap B = \{1, 7, 10\},$$
$$A \cup B = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$
$$A \setminus B = \{5, 8\},$$
$$B \setminus A = \{6, 9\},$$
$$A \Delta B = \{5, 6, 8, 9\}.$$

Pastebėkime, kad

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1.1 testas

1.3.3. Neryškiųjų aibių sąjunga ir sankirta

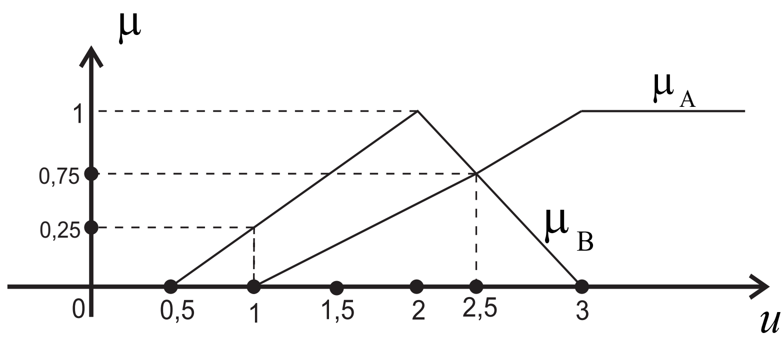
Neryškiosios aibės apibendrina aibės sąvoką. Todėl operacijos su neryškiomis aibėmis turi būti apibrėžtos taip, kad jei aibių charakteristinės funkcijos įgyja tik dvi reikšmes 0 ir 1, turime gauti apibrėžtas operacijas su (ryškiomis) aibėmis.

Tarkime, kad aibių A ir B charakteristinės funkcijos μ_A ir μ_B įgyja tik dvi reikšmes 0 ir 1. Tada aibių sąjunga apibrėžiama naudojant loginę disjunkcijos operaciją $\mu_A \vee \mu_B$, kurią galima išreikšti ir kitaip:

$$\mu_A \vee \mu_B = \max\{\mu_A, \mu_B\} = \begin{cases} \mu_A + \mu_B, & \text{kai } \mu_A + \mu_B < 1, \\ 1, & \text{kai } \mu_A + \mu_B \geq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Taigi, kai $\mu_A, \mu_B \in \{0, 1\}$ galioja visos (1.1) lygybės. Tačiau neryškiųjų aibių atveju μ_A, μ_B įgyja reikšmes iš intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, operacija $\mu_A \vee \mu_B$ dar[13] nėra apibrėžta, o antroji (1.1) lygybė bendru atveju negalioja.

[13]Neryškiosios logikos operacijos nagrinėjamos šio vadovėlio ... skyriuje.



1.9 pav.. Neryškiųjų aibių A ir B charakteristinės funkcijos

Neryškiųjų aibių $A = \{(u, \mu_A(u)), u \in U\}$ ir $B = \{(u, \mu_B(u)), u \in U\}$ ***sąjunga*** vadiname neryškiąją aibę

$$A \cup B = \{(u, \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}), u \in U\} \tag{1.2}$$

Neryškiųjų aibių A ir B charakteristinės funkcijos pavaizduotos **??** pav. Tada neryškiosios aibės $A \cup B$ charakteristinė funkcija $\mu_{A \cup B}$ pavaizduota 1.10 pav.

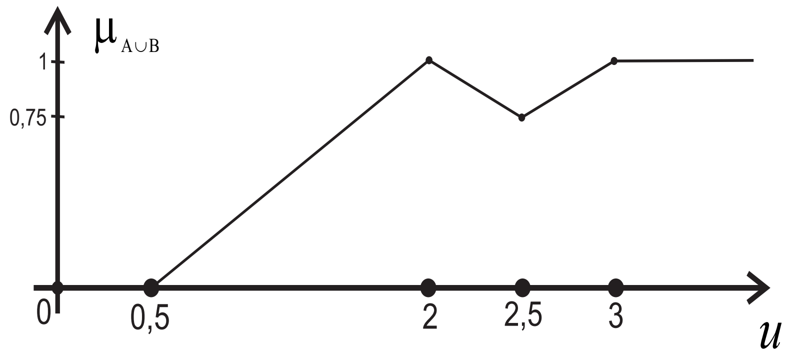
Neryškiųjų aibių sąjungą galima apibrėžti naudojant kitas formules sąjungos charakteristinei funkcijai rasti.
Žymėsime

$$A \tilde{\cup} B = \left\{ \left(u, \begin{cases} \mu_A(u) + \mu_B(u), & \text{kai } \mu_A(u) + \mu_B(u) < 1, \\ 1, & \text{priešingu atveju} \end{cases} \right), u \in U \right\} \tag{1.3}$$

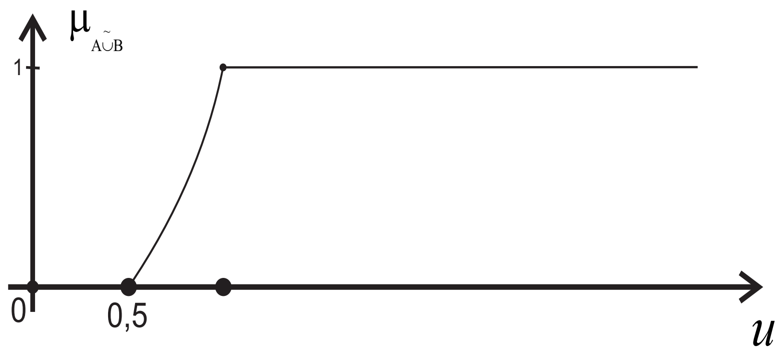
Charakteristinė funkcija $\mu_{A \tilde{\cup} B}$ pavaizduota 1.11 pav.

Apibrėžkime dar vieną neryškiųjų aibių sąjungos operaciją (ji dar vadinama algebrine suma ir kartais žymima $A \hat{+} B$

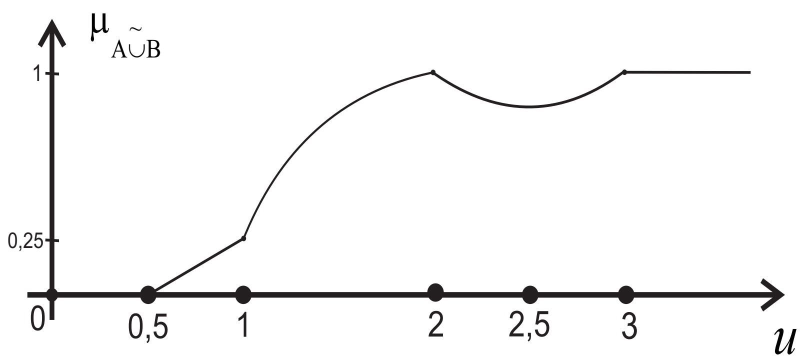
$$A \hat{\cup} B = \{(u, \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u) \cdot \mu_B(u)), u \in U\} \tag{1.4}$$



1.10 pav.. Neryškiosios aibės $A \cup B$ charakteristinė funkcija $\mu_{A \cup B}$



1.11 pav.. Charakteristinė funkcija $\mu_{A \tilde{\cup} B}$



1.12 pav.. Charakteristinė funkcija $\mu_{A\tilde{\cup}B}$

Charakteristinė funkcija $\mu_{A\hat{\cup}B}\,(u)$ pavaizduota 1.12 pav.

Pratimas

Išreikškite charakteristines funkcijas $\mu_A\,(u)$, $\mu_B\,(u)$ *(1.7 pav.),*$\mu_{A\cup B}\,(u)$, $\mu_{A\tilde{\cup}B}\,(u)$, $\mu_{A\hat{\cup}?B}\,(u)$ *formulėmis.*

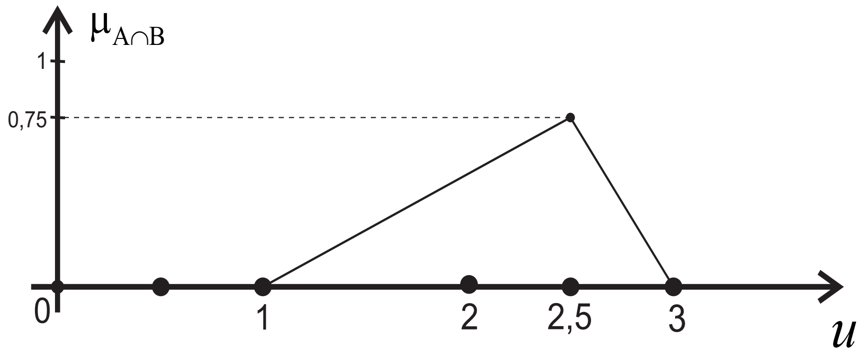
Neryškiųjų aibių A ir B ***sankirta*** *vadiname aibę*

$$A \cap B = \{(u, \min\{\mu_A\,(u)\,, \mu_B\,(u)\})\,, u \in U\} \tag{1.5}$$

Pavyzdžiui, 1.7 pav.? apibrėžtų charakteristinių funkcijų atveju funkcija $\mu_{A\cap B}$ pavaizduota 1.13 pav. Pastebėkime, kad šiuo atveju aibė $\mu_{A\cap B}$ nebus normalioji (žr. .psl).

Neryškiųjų aibių sankirtą galima apibrėžti ir taip (ši operacija vadinama ***algebrinė sandauga*** ir žymima $A \cdot B$)

$$A \dot{\cap} B = \{(u, \mu_A\,(u) \cdot \mu_B\,(u))\,, u \in U\} \tag{1.6}$$



1.13 pav.. Charakteristinė funkcija $\mu_{A\tilde{\cup}B}$

Pavyzdys

Neryškiosios aibės A ir B yra šios
$A = \{(1, 0.5), (2, 0.75), (3, 1), (4, 0.75), (5, 0.5)\}$,
$B = \{(2, 0.5), (3, 1), (4, 0.5)\}$.

Tada aibės $A \cup B$,$A\tilde{\cup}B$,$A\hat{\cup}B$,$A \cap B$,$A\dot{\cap}B$ bus tokios
$A \cup B = \{(1, 0.5), (2, 0.75), (3, 1), (4, 0.75), (5, 0.5)\}$,
$A\tilde{\cup}B = \{(1, 0.5), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 0.5)\}$,
$A\hat{\cup}B = \{(1, 0.5), (2, 0.875), (3, 1), (4, 0.875), (5, 0.5)\}$,
$A \cap B = \{(2, 0.5), (3, 1), (4, 0.5)\}$,
$A\dot{\cap}B = \{(2, 0.375), (3, 1), (4, 0.375)\}$.

1.1 teorema. *Visos* (1.2)– (1.6) *formulėmis apibrėžtos operacijos* $\cup, \tilde{\cup}, \hat{\cup}, \cap, \dot{\cap}$ *turi komutatyvumo savybę*

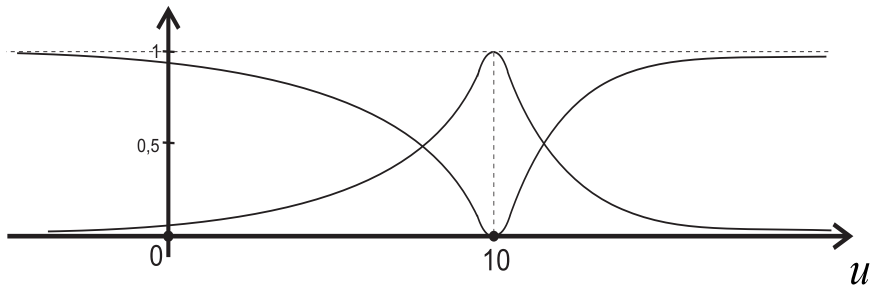
$$A \circ B = B \circ A, \tag{1.7}$$

čia $\circ$ *– bet kuri iš* 5 *operacijų:* $\cup$, $\tilde{\cup}, \hat{\cup}, \cap, \dot{\cap}$.

Pratimas 1.

Patikrinkite, kurios iš operacijų turi asociatyvumo savybę

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C).$$



1.14 pav.. Charakteristinė funkcija $\mu_{A\breve{\cup}B}$

Pratimas 2.

Patikrinkite, kurie distributyvumo dėsniai galioja neryškioms aibėms

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.8}$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1.9}$$

$$(A \dot{\cap} B)\, \tilde{\cup} C = (A \tilde{\cup} C)\, \dot{\cap}\, (B \tilde{\cup} C) \tag{1.10}$$

$$(A \dot{\cap} B)\, \hat{\cup} C = \left(A \hat{\cup} C\right) \dot{\cap} \left(B \hat{\cup} C\right) \tag{1.11}$$

Pastaba

Visi pratimų dėsniai galioja ryškioms aibėms, tačiau kai kurios iš šių formulių nėra teisingos neryškiosioms aibėms, pvz., algebrinei sandaugai ir sudėčiai.

1.3.4. Neryškiosios aibės papildinys

Neryškiosios aibės $A = \{(u, \mu_A(u)), u \in U\}$ ***papildiniu*** *vadinama aibė*

$$\overline{A} = \{(u, 1 - \mu_A(u)), u \in U\}.$$

1.14 pav. pavaizduotos charakteristinė funkcija ir funkcija $\mu_{\overline{A}} = 1 - \mu_A$.

Pastaba

Ryškiosioms aibėms galioja formulės $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$, kurios nėra teisingos neryškiųjų aibių atveju.

Pavyzdys

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$A = \{(1, 0.5), (2, 0.75), (3, 0.9), (4, 0.8), (5, 0.7)\}$,
$\overline{A} = \{(1, 0.5), (2, 0.25), (3, 0.1), (4, 0.2), (5, 0.3)\}$,
$A \cap \overline{A} = \{(1, 0.5), (2, 0.25), (3, 0.1), (4, 0.2), (5, 0.3)\}$,
$A \dot{\cap} \overline{A} = \{(1, 0.25), (2, 0.1875), (3, 0.09), (4, 0.16), (5, 0.21)\}$,
$A \cup \overline{A} = \{(1, 0.5), (2, 0.75), (3, 0.9), (4, 0.8), (5, 0.7)\}$,
$A \tilde{\cup} \overline{A} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$,
$A \hat{\cup} \overline{A} = \{(1, 0.75), (2, 0.8125), (3, 0.91), (4, 0.84), (5, 0.79)\}$.

Neryškiosioms, kaip ir ryškiosioms, aibėms galioja involiucijos dėsnis

$$\overline{(\overline{A})} = A, \tag{1.12}$$

nes $\mu_{\overline{(\overline{A})}} = 1 - \mu_{\overline{A}} = 1 - (1 - \mu_A) = \mu_A$.
Įrodykime, kad kaip ir ryškiųjų aibių atveju galioja de Morgano dėsniai

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{1.13}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.14}$$

Pirmosios (1.13) formulės atveju turime

$$\mu_{\overline{A \cup B}} = 1 - \mu_{A \cup B} = 1 - \max\{\mu_A, \mu_B\} =$$
$$\min\{1 - \mu_A, 1 - \mu_B\} = \min\left\{\mu_{\overline{A}}, \mu_{\overline{B}}\right\}.$$

Pratimas

Įrodykite ... formulę.

Pratimas

Patikrinkite, kurios iš (1.13),(1.14) *formulių galioja operacijų* $\tilde{\cup}$, $\hat{\cup}$, $\dot{\cap}$ *atveju.*

Rodyklė