

1.5. Variacinio regularizavimo algoritmo sudarymas Lagranžo metodu

Dar kartą suformuluosime variacinio regularizavimo metodo algoritmą. Jame naudojame tik realius eksperimento duomenis: dešiniąją lygties pusę u_δ ir informaciją apie paklaidos dydį δ , taigi toks algoritmas gali būti sėkmingai taikomas realių praktinių uždavinių sprendimui. Tiksliojo sprendinio artinį randame sprenddami minimizacijos uždavinį

$$\Omega(v_\delta) = \inf_{v \in V_\delta} \Omega(v), \quad (1.22)$$

o leistinieji elementai priklauso aibei

$$V_\delta = \{v \in V_1 : \rho_U(Av, u_\delta) \leq \delta\}.$$

Aibė V_δ apibrėžiama nelygybės tipo apribojimais. Tokių uždavinių sprendimo algoritmai yra sudėtingesni už sąlyginės minimizacijos uždavinių sprendimo algoritmus, kai papildomos sąlygos apibrėžiamos lygybių forma. Todėl šioje paskaitoje rasime sąlygas, kada leistinų elementų aibę V_δ galima modifikuoti taip, kad ji būtų apibrėžiama tik lygybių tipo apribojimais.

Tarkime, kad stabilizuojančio funkcionalo $\Omega(v)$ nesąlyginio minimizavimo visoje aibėje V_1 uždavinys

$$\Omega(v_0) = \inf_{v \in V_1} \Omega(v)$$

turi vienintelį sprendinį $v_0 \in V_1$. Tada nagrinėsime du galimus atvejus:

1. Elementas $v_0 \in V_\delta$, t.y. teisinga nelygybė

$$\rho_U(Av_0, u_\delta) \leq \delta.$$

2. Elementas $v_0 \notin V_\delta$, t.y. teisinga nelygybė

$$\rho_U(Av_0, u_\delta) > \delta.$$

Pirmojo atvejo analizė

Kadangi $\rho_U(Av_0, u_\delta) \leq \delta$, tai variacinio regularizavimo uždavinio (1.22) sprendinys $v_\delta = v_0$. Įsitikinsime, kad toks sprendinys yra stabilus elemento u_δ mažų pokyčių atžvilgiu. Imkime kitą elementą $\tilde{u}_\delta$, kuris nedaug skiriasi nuo u_δ :

$$\rho_U(\tilde{u}_\delta, u_\delta) \leq \delta_0.$$

Jeigu vis dar išpildyta sąlyga $\rho_U(Av_0, \tilde{u}_\delta) \leq \delta$, tai variacinio reguliarizavimo uždavinio sprendinys nesikeičia $\tilde{v}_\delta = v_0$. Taigi sprendinys yra stabilus tokių pokyčių atžvilgiu.

Dabar nagrinėkime situaciją, kai $\rho_U(Av_0, \tilde{u}_\delta) > \delta$. Tada jau $\tilde{v}_\delta \neq v_0$, todėl reikia įsitikinti, kad ir šis sprendinys tolydžiai priklauso nuo pradinių duomenų mažų pokyčių. Pastebėsime, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ elementas v_0 priklauso kompaktiškai erdveje V aibei

$$D_\varepsilon = \{v \in V_1 : \Omega(v) \leq \Omega(v_0) + \varepsilon\}.$$

Operatorius A yra tolydus ir abipus vienareikšmis, todėl, remiantis 1.1 teorema, atvirkštinis atvaizdis yra tolydus. Taigi įrodėme tolydžią sprendinio priklausomybę nuo pradinių duomenų pokyčių.

Antrojo atvejo analizė

Mus domina, kada galime funkcionalo $\Omega(v)$ minimizavimo aibėje V_δ uždavinį suvesti į sąlyginės minimizacijos uždavinį, kai nagrinėjame tik tokius elementus $v \in V_1$, kuriems

$$\rho_U(Av, u_\delta) = \delta.$$

Apibrėžimas. Stabilizuojantį funkcionalą $\Omega(v)$ vadiname *kvazimonotonišku*, jeigu visiems $v \in V_1$, tokiems kad $v \neq v_0$, kiekvienoje elemento v aplinkoje $O(v)$, pvz.

$$B_\varepsilon(v) = \{w \in V_1 : \rho_U(w, v) \leq \varepsilon\},$$

egzistuoja toks elementas $v_1 \in O(v) \cap V_1$, kad išpildyta nelygybė:

$$\Omega(v_1) < \Omega(v).$$

Taigi kvazimonotoniškas stabilizuojantis funkcionalas neturi lokalių minimumų aibėje $V_1 \setminus \{v_0\}$.

1.2 lema. Jeigu $v_0 \notin V_\delta$, tai variacinio uždavinio

$$\Omega(v_\delta) = \inf_{v \in V_\delta} \Omega(v)$$

sprendinys v_δ tenkina sąlygą

$$\rho_U(Av_\delta, u_\delta) = \delta.$$

Irodymas. Tarkime priešingai, kad

$$\rho_U(Av_\delta, u_\delta) = \beta < \delta.$$

Kadangi $\rho_U(Av_0, u_\delta) > \delta$, tai $v_\delta \neq v_0$. Operatorius A yra tolydus erdvėje V , todėl aibėje V_1 egzistuoja tokia elemento v_δ aplinka $O(v_\delta)$, kad

$$\rho_U(Av, Av_\delta) < \frac{\delta - \beta}{2}, \quad v \in O(v_\delta).$$

Imkime $v \in O(v_\delta)$, tada naudodami trikampio nelygybę gauname įverčius

$$\rho_U(Av, u_\delta) \leq \rho_u(Av, Av_\delta) + \rho_u(Av_\delta, u_\delta) < \frac{\delta - \beta}{2} + \beta < \delta.$$

Taigi $O(v_\delta) \subset V_\delta$. Kadangi funkcionalas $\Omega(v)$ yra kvazimonotoniškas, tai aibėje $O(v_\delta)$ egzistuoja toks elementas $\tilde{v}_\delta \in V_1$, kad išpildyta nelygybė

$$\Omega(\tilde{v}_\delta) < \Omega(v_\delta).$$

Elementas $\tilde{v}_\delta$ priklauso abiejoms aibėms V_1 ir Q_δ , todėl jis priklauso ir aibei $V_\delta = V_1 \cap Q_\delta$. Taigi gavome prieštaravimą teiginiui, kad elementas v_δ minimizuoja $\Omega(v)$ aibėje V_δ . $\square$

Remdamiesi abiejų atvejų analize, 1.2 lema ir Lagranžo metodu suformuluojame variacinį reguliarizavimo algoritmą: reikia rasti elementą $v_\alpha \in V_1$, tenkinantį sąlygą

$$M_\alpha(v_\alpha, u_\delta) = \inf_{v \in V_1} M_\alpha(v, u_\delta), \quad M_\alpha(v, u_\delta) = \rho_U^2(Av, u_\delta) + \alpha \Omega(v).$$

Parametrą $\alpha = \alpha(\delta)$ parenkame taip, kad galiotų lygybė

$$\rho_U(Av_\alpha, u_\delta) = \delta.$$

Nesąlyginės minimizacijos uždavinio išsprendžiamumas

Suformuluosime pakankamas sąlygas, kada nesąlyginės minimizacijos uždavinys

$$M_\alpha(v_\alpha, u_\delta) = \inf_{v \in V_1} M_\alpha(v, u_\delta) \tag{1.23}$$

turi sprendinį visiems $\alpha \in (0, \alpha_1)$.

1.6 teorema. Tegul A yra tolydus operatorius, atvaizduojantis tiesinę metrinę erdvę V į metrinę erdvę U :

$$A : V \rightarrow U,$$

$\Omega(v)$ yra stabilizuojantis funkcionalas, apibrėžtas aibėje $V_1 \subset V$, šis funkcionalas generuoja Hilberto erdvę su mažoruojančia metrika. Tada visiems $u \in U$ ir $\alpha > 0$ egzistuoja bent vienas elementas $v_\alpha \in V_1$, kuris yra uždavinio

$$M_\alpha(v_\alpha, u) = \inf_{v \in V_1} M_\alpha(v, u)$$

sprendinys.

Irodymas. 1.1 lemoje pažymėkime $B = V_1$, $f(v) = \rho_u^2(Av, u)$, tada iš karto gauname teoremos teiginį. $\square$

1.5 pavyzdys. Integralinės lygties sprendimas. Spręsimė tiesinę integralinę lygtį

$$Av := \int_a^b K(x, s)v(s) ds = u(x), \quad c \leq x \leq d,$$

kai metrinė V erdvė sutampa su tolydžių funkcijų erdve $C[a, b]$, o pradiniai duomenys $u(x)$ priklauso erdvei $L_2[c, d]$. Pirmoje paskaitoje įrodėme, kad toks uždavinys yra nekorektiškas, nes jis nestabilus pradinį duomenų mažų pokyčių atžvilgiu. Jeigu branduolys $K(x, s)$ yra tolydi funkcija, tai operatorius A yra tolydus. Metrinė erdvė $C[a, b]$ yra tiesinė. Stabilizuojančiu funkcionalu $\Omega(v)$ imsime funkcionalą

$$\Omega(v) := \int_a^b \left(q(s)v^2(s) + p(s) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right) ds,$$

funkcijos $q(s), p(s) \in C[a, b]$ tenkina sąlygas

$$q(s) \geq 0, \quad p(s) \geq p_0 > 0.$$

Patikrinkite, kad šiam funkcionalui išpildyti visi reikalavimai, kuriuos suformulavome nagrinėdami variacinį reguliarizavimo metodą.

Naudodami variacinį reguliarizavimo metodą, ieškome funkcijos $v_\alpha \in V_1$, kuri minimizuoja funkcionalą:

$$M_\alpha(v_\alpha, u_\delta) = \inf_{v \in V_1} M_\alpha(v, u_\delta),$$

čia funkcionalas $M_\alpha(v, u_\delta)$ apibrėžtas taip

$$M_\alpha(v, u_\delta) = \rho_U^2(Av, u_\delta) + \alpha\Omega(v).$$

Parametrą α parenkame taip, kad galiotų lygybė

$$\rho_U(Av_\alpha, u_\delta) = \delta.$$

Erdvėje $L_2(c, d)$ apibrėžiame metriką

$$\rho_U^2(Av, u_\delta) = (Av - u_\delta, Av - u_\delta),$$

čia $(\cdot, \cdot)$ yra dviejų funkcijų $u_{1,2} \in L_2(c, d)$ skaliarinė sandauga

$$(u_1, u_2) := \int_c^d u_1(x)u_2(x) dx.$$

Nagrinėkime bendresnį funkcionalą

$$J(v) = \int_a^b \pi(x, v(x), v'(x)) dx.$$

Rasime lygtį, kuri apibrėžia variacinio uždavinio

$$J(\tilde{v}) = \inf_{v \in V_1} J(v) \tag{1.24}$$

būtinąją ekstremumo sąlygą. Tarkime, kad funkcija $\pi = \pi(x, y, z) \in C^2(R^3)$, t.y. ji yra tolydi ir turi tolydžias išvestines iki antrosios eilės intinai. Insime funkcijų aibę

$$D = \{v : v \in C^1(a, b), v(a) = v_a, v(b) = v_b\},$$

t.y. darome prielaidą, kad žinome funkcijos v reikšmes intervalo galuose. Panašiai nagrinėjame ir kito tipo kraštines sąlygas. Tada apibrėžiame elemento $\tilde{v}$ lokaliąją aplinką

$$N(\tilde{v}) = \{v : v = \tilde{v} + \gamma\eta, \eta(a) = 0, \eta(b) = 0\},$$

čia $\eta(x)$ yra bet kokia tolydi funkcija, tenkinanti nurodytas kraštines sąlygas, γ yra mažas parametras. Imdami vis kitas funkcijas $\eta(x)$ ir keisdami parametro γ reikšmes apibrėžiame funkcijos $\tilde{v}$ lokaliąją aplinką. Apskaičiuojame funkcionalo reikšmę

$$J(v) = \int_a^b \pi(x, \tilde{v}(x) + \gamma\eta(x), \tilde{v}'(x) + \gamma\eta'(x)) dx.$$

Išskleidę pointegralinę funkciją Teiloro eilute ir imdami tik du pirmuosius skleidinio narius, gauname lygybę

$$J(v) = J(\tilde{v}) + \gamma \delta J(\tilde{v}) + \mathcal{O}(\gamma^2),$$

čia $\delta J(v)$ yra funkcionalo $J(v)$ pirmoji variacija

$$\delta J(v) := \frac{d}{d\gamma} J(v + \gamma\eta) \Big|_{\gamma=0}.$$

Funkcionalo (1.24) atveju

$$\delta J(v) = \int_a^b (\pi_v \eta(x) + \pi_{v'} \eta') dx,$$

čia pažymėjome dalines išvestines

$$\pi_v = \frac{\partial \pi}{\partial v}, \quad \pi_{v'} = \frac{\partial \pi}{\partial v'}.$$

Tada gauname, kad būtinoji ekstremumo sąlyga yra tokia:

$$\delta J(v) = 0.$$

Integruodami dalimis ir naudodami funkcijų $\eta(x)$ kraštines sąlygas, gauname lygybę

$$\delta J(v) = \int_a^b \eta(x) \left(\pi_v - \frac{d}{dx} \pi_{v'} \right) dx = 0.$$

Kadangi $\eta(x)$ yra bet kokia funkcija, tai funkcija $v \in V$ suteikia ekstremumą funkcionalui $J(v)$, jei ji yra diferencialinio kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} \pi_v - \frac{d}{dx} \pi_{v'} = 0, \\ v(a) = v_a, \quad v(b) = v_b \end{cases} \quad (1.25)$$

sprendinys.

Rasime funkcionalo $T_\alpha(v)$ pirmąją variaciją

$$\delta T_\alpha(v) = \delta \rho_u^2(Av, u_\delta) + \alpha \delta \Omega(v).$$

Funkcionalo $\Omega(v)$ pirmoji variacija tiesiogiai seka iš bendrosios formulės

$$\delta \Omega(v) = 2 \int_a^b \eta(s) \left(-\frac{d}{ds} \left(p(s) \frac{dv}{ds} \right) + q(s)v(s) \right) ds.$$

Funkcionalo $\rho_U^2(Av, u_\delta)$ pirmąją variaciją apskaičiuojame naudodami apibrėžimą

$$\rho_U^2(A(v + \gamma\eta, u_\delta)) = (Av - u_\delta, Av - u_\delta) + 2\gamma(Av - u_\delta, A\eta) + C\gamma^2.$$

Todėl gauname tokią išraišką

$$\delta\rho_U^2(Av, u_\delta) = 2(Av - u_\delta, A\eta) = 2(A^*Av - A^*u_\delta, \eta).$$

Parodysime, kaip apskaičiuojamas jungtinis operatorius A^* . Naudosime pagrindinę lygybę

$$(Av, u)_U = (v, A^*u)_V,$$

čia skaliarinių sandaugų apatinis indeksas nurodo, kurioje erdvėje skaičiuojama atitinkama skaliarinė sandauga

$$(u_1, u_2)_U = \int_c^d u_1(x)u_2(x) dx, \quad (v_1, v_2)_V = \int_a^b v_1(s)v_2(s) ds.$$

Sukeitę integravimo tvarką, gauname lygybę

$$\int_c^d \left(\int_a^b K(x, s)v(s)ds \right) u(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d K(x, s)u(x)dx \right) v(s)ds,$$

todėl jungtinis operatorius A^*u apibrėžiamas taip:

$$A^*u = \int_c^d K(x, s)u(x) dx.$$

Dabar galime apskaičiuoti operatorių A^*Av :

$$\begin{aligned} A^*Av &= \int_c^d K(x, s) \int_a^b K(x, t)v(t) dt dx = \int_a^b \tilde{K}(s, t)v(t) dt, \\ \tilde{K}(s, t) &= \int_c^d K(x, s)K(x, t) dx. \end{aligned}$$

Taigi funkcionalo $T_\alpha(v)$ ekstremumo funkciją randame spęsdami integralinį-diferencialinį kraštinį uždavinį:

$$\int_a^b \tilde{K}(s, t)v(t)dt + \alpha \left(-\frac{d}{ds} \left(p(s)\frac{dv}{ds} \right) + q(s)v(s) \right) = \int_c^d K(x, s)u_\delta(x)dx,$$

$$v(a) = v_a, \quad v(b) = v_b.$$