1.4. Reguliarizavimo metodas: teorija ir pavyzdžiai

Šioje paskaitoje susipažinsime su nekorektiškų uždavinių bendrąja reguliarizavimo teorija. Ji padeda išspręsti daugelį uždavinių, suformuluotų ankstesnėse paskaitose.

Spręsime uždavinį

$$Av = u, \quad v \in V, \ \ u \in U, \tag{1.20}$$

kai A yra tolydus ir abipus vienareikšmis operatorius, bet atvirkštinis operatorius A^{-1} nėra tolydus aibėje AV (t.y. galimų sprendinių aibė V nėra kompaktas).

Tarkime, kad u_T apibrėžia tikslius pradinius duomenis, o v_T yra uždavinio (1.20) sprendinys, kai $u = u_T$:

$$Av_T = u_T.$$

Dažniausiai vietoj u_T žinome tik jo artinį u_δ:

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \le \delta.$$

Reikia rasti tokį tikslaus sprendinio v_T artinį v_δ, kuris tolydžiai priklauso nuo u_δ. Aišku, kad negalime tokio artinio skaičiuoti naudodami formulę

$$v_\delta = A^{-1} u_\delta,$$

kadangi šis sprendinys egzistuoja ne visiems u_δ (nes u_δ gali ir nepriklausyti aibei AV). Be to toks sprendinys nėra stabilus pradinių duomenų mažų pokyčių atžvilgiu.

1.4.1. Reguliarizuojančio operatoriaus apibrėžimas

Nagrinėkime bet kokį algoritmą (taisyklę), apibrėžiančią sąryšį

$$v = R(u, \alpha), \quad R : U \to V,$$

čia α yra parametras, nuo kurio priklauso operatorius $R(u, \alpha)$. Sakysime, kad tai uždavinio $Av = u$ *reguliarizuojantis* operatorius (elemento u_T atžvilgiu), jei išpildytos tokios sąlygos

1. Egzistuoja skaičiai δ_1 ir α_1, kad operatorius $R(u, \alpha)$ apibrėžtas visiems $(\alpha,\, u) \in D$:

$$D = \{\, (\alpha,\, u) : \ \ 0 < \alpha < \alpha_1, \quad \rho_U(u, u_T) \le \delta_1 \,\}.$$

2. Egzistuoja funkcionalas $\alpha = \alpha(u, \delta)$, apibrėžtas aibėje
$$U_{\delta_1} = \{u : \ \ u \in U, \ \ \rho_u(u, u_T) \le \delta_1\},$$
kad bet kokiam $\varepsilon > 0$ galima parinkti $\delta(\varepsilon) \le \delta_1$, tokį, kad jei atstumas nuo elemento $\tilde{u} \in U$ iki u_T yra ne didesnis už $\delta(\varepsilon)$:
$$\rho_U(\tilde{u}, u_T) \le \delta(\varepsilon),$$
tai teisingas įvertis $\rho_V(v_\alpha, v_T) \le \varepsilon$, čia elementą v_α apskaičiuojame taip:
$$v_\alpha = R\big(\tilde{u}, \alpha(\tilde{u}, \delta)\big).$$

Dažnai naudojame atskirą šio apibrėžimo atvejį, kai $\alpha = \delta$, t.y. funkcionalas $\alpha = \alpha(\delta)$ nepriklauso nuo elemento u. Tada turime reguliarizuojantį operatorių $R(u, \delta)$. Pateiksime jo apibrėžimą:

1. Egzistuoja toks skaičius δ_1, kad operatorius $R(u, \delta)$ apibrėžtas aibėje:
$$D_1 = \{(\delta, \, u) : \ \ 0 < \delta < \delta_1, \quad \rho_U(u, u_T) \le \delta_1\}.$$

2. Bet kokiam $\varepsilon > 0$ galima parinkti tokį $\delta(\varepsilon) \le \delta_1$, kad jei atstumas nuo elemento $\tilde{u} \in U$ iki u_T yra ne didesnis už $\delta(\varepsilon)$:
$$\rho_U(\tilde{u}, u_T) \le \delta(\varepsilon),$$
tai teisingas įvertis $\rho_V(v_\delta, v_T) \le \varepsilon$, čia elementą v_δ apskaičiuojame taip:
$$v_\delta = R\big(\tilde{u}, \delta(\varepsilon)\big).$$

Taigi, jei sprendžiame nekorektišką uždavinį (1.20) ir vietoj tikslių pradinių duomenų turime tik jų artinį u_δ, tai tikslaus sprendinio v_T artiniu galime imti elementą
$$v_\alpha = R(u_\delta, \alpha_\delta),$$
čia parametras $\alpha_\delta = \alpha(u_\delta, \delta)$ yra suderintas su dešiniosios lygties pusės paklaidos dydžiu δ. Tokį elementą v_α vadiname uždavinio $Av_T = u_T$ *reguliarizuotu* sprendiniu, o parametrą α_δ reguliarizacijos parametru. Kai $\delta \to 0$, elementas v_α metrinės erdvės V metrikoje konverguoja į tikslų uždavinio sprendinį:
$$\rho_V(v_\alpha, v_T) \to 0, \quad \text{kai } \ \delta \to 0.$$

Taigi reguliarizavimo metodą sudaro du etapai:

1. Reguliarizuojančio operatoriaus $R(u, \alpha)$ parinkimas.

2. Parametro $\alpha = \alpha(u, \delta)$ reikšmės nustatymas, atsižvelgiant į pradinių duomenų paklaidos dydį δ ir pradinius duomenis u.

1.4.2. Reguliarizuojančių operatorių pavyzdžiai

3 paskaitoje nagrinėjome išvestinės skaičiavimo ir Furjė eilutės sumavimo algoritmus. Parodysime, kad abu algoritmai apibrėžia reguliarizuojančius operatorius.

Funkcijos išvestinės skaičiavimas

Reikia rasti diferencijuojamos funkcijos $u_T(t)$ išvestinę $v_T = \dfrac{du_T}{dt}$, kai žinome tik $u_T(t)$ artinį $u_\delta(t)$, tokį kad $\rho_U(u_\delta, u_T) \le \delta$. Nagrinėsime operatorių

$$R(u, \alpha) = \frac{u(t+\alpha) - u(t)}{\alpha}$$

ir įsitikinsime, kad šis operatorius yra reguliarizuojantis. Pirmoji apibrėžimo sąlyga trivialiai tenkinama, nes $R(u, \alpha)$ yra apibrėžtas visiems $u \in U$ ir $\alpha > 0$. Dabar patikrinsime antrąją sąlygą. Paklaidą tarp $v_\alpha = R(u_\delta, \alpha)$ ir v_T įvertiname taip (žr. analizę 3 paskaitoje):

$$\rho_V(v_\alpha, v_T) \le C\alpha + \frac{2\delta}{\alpha}.$$

Jeigu išpildytos sąlygos

$$\alpha = \alpha(\delta) \to 0, \quad \frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \text{kai } \delta \to 0,$$

tai gauname reguliarizuojantį operatorių.

Galime imti įvairias funkcijas $\alpha(\delta)$, tenkinančias šias sąlygas. Pavyzdžiui tinka funkcijos $\alpha(\delta) = \delta^{1/4}$, $\alpha(\delta) = \delta^{2/3}$, bet netinka funkcija $\alpha(\delta) = \delta$, nes tada

$$\frac{2\delta}{\alpha(\delta)} = \frac{2\delta}{\delta} = 2.$$

Aproksimavimo paklaidos viršutinis rėžis mažiausias, kai $\alpha(\delta) = \mathcal{O}(\sqrt{\delta})$.

Furjė eilutės sumavimas

Reikia rasti eilutės

$$v_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

sumą. Tarkime, kad vietoj tikslių koeficientų reikšmių a_n žinome tik jų artinius $\tilde{a}_n$, tokius, kad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - \tilde{a}_n)^2 \le \delta^2.$$

Tada galime skaičiuoti tik funkcijos

$$\tilde{v}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(nt)$$

reikšmes. Pažymėkime $\alpha = \dfrac{1}{N}$ ir nagrinėkime operatorių:

$$R(\tilde{a},\, \alpha) := R\big(\tilde{a},\, \frac{1}{N}\big) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n \cos(nt).$$

Įsitikinkime, kad šis operatorius yra reguliarizuojantis.

- Baigtinę sumą galime apskaičiuoti visiems $\{\tilde{a}_n, n = 0, \dots, N\}$, todėl pirmoji apibrėžimo sąlyga visada išpildyta.
- Įvertinsime paklaidą tarp $v_\alpha = R(\tilde{a},\, 1/N)$ ir v_T (žr. analizę 3 paskaitoje):
$$\rho_v(v_\alpha, v_T) \le \delta\sqrt{N+1} + \frac{C \ln{(N+1)}}{(N+1)^m}, \quad m \ge 1.$$
Jeigu tenkinamos sąlygos
$$N = N(\delta) \to \infty, \;\; \delta\sqrt{N(\delta)} \to 0, \quad \text{kai } \delta \to 0,$$
tai gauname reguliarizuojantį operatorių.

1.4.3. Variacinis metodas

Priminsime, kad sprendžiame uždavinį $Av = u_T$, kai A yra tolydus ir abipus vienareikšmis operatorius. Tarkime, kad uždavinys $Av = u_T$ turi vienintelį sprendinį, tačiau vietoj u_T žinome tik elementą $u_\delta \in U$, kuris skiriasi nuo u_T ne daugiau kaip dydžiu δ:

$$\rho_u(u_\delta, u_T) \le \delta.$$

Tada apytikslį sprendinį ieškosime aibėje

$$Q_\delta = \{v \in V : \;\; \rho_u(Av, u_\delta) \le \delta\}.$$

Tačiau ankstesnėse paskaitose jau įsitikinome, kad tokia aibė yra per daug didelė. Tikslaus sprendinio artiniu negalime imti bet kokį elementą $v_\delta \in Q_\delta$, nes toks sprendinys nėra stabilus pradinių sąlygų mažų pokyčių atžvilgiu.

Todėl reikia nurodyti elementų v_δ parinkimo taisyklę, garantuojančią, kad gautieji sprendiniai tolydžiai priklauso nuo lygties dešiniosios pusės.

Erdvės V poaibis V_1 yra tirštas, jei bet kokiam $\varepsilon > 0$ ir bet kokiam aibės V elementui $v \in V$ egzistuoja toks aibės V_1 elementas $w = w(\varepsilon) \in V_1$, kad teisinga nelygybė $\rho_V(v, w) \le \varepsilon$.

Pateiksime *variacinį* nekorektiško uždavinio sprendinio parinkimo algoritmą. Nagrinėkime funkcionalą $\Omega(v)$, apibrėžtą metrinės erdvės V tirštame poaibyje V_1. Jis vadinamas *stabilizuojančiu* funkcionalu, jei išpildytos tokios trys sąlygos

1. Funkcionalas $\Omega(v)$ yra neneigiamas, t.y. $\Omega(v) \ge 0,\ v \in V_1$.
2. Uždavinio su tiksliomis pradinėmis sąlygomis sprendinys $v_T = A^{-1}u_T$ priklauso funkcionalo apibrėžimo sričiai, t.y. $v_T \in V_1$.
3. Kiekvienam skaičiui $d > 0$ aibė

$$V_{1,d} = \{v \in V_1 : \ \ \Omega(v) \le d\}$$

yra kompaktiška erdvėje V.

Tarkime, kad turime stabilizuojantį funkcionalą $\Omega(v)$. Tada nagrinėkime aibę $V_\delta = V_1 \cap Q_\delta$:

$$V_\delta = \{v \in V_1 : \ \ \rho_U(Av, u_\delta) \le \delta\}$$

ir ieškokime tokio šios aibės elemento $v_\delta \in V_\delta$, kuris minimizuoja funkcionalą $\Omega(v)$:

$$\Omega(v_\delta) = \inf_{v \in V_\delta} \Omega(v). \tag{1.21}$$

Tokiu būdu apibrėžėme operatorių

$$v_\delta = R(u_\delta, \delta).$$

1.4 teorema. *Tarkime, kad kiekvienam $\delta > 0$ ir $u_\delta \in U$ egzistuoja uždavinio* (1.21) *sprendinys, tada $R(u_\delta, \delta)$ yra uždavinio $Av = u$ reguliarizuojantis operatorius.*

Įrodymas. Iš teoremos sąlygos seka, kad operatorius $R(u_\delta, \delta)$ yra apibrėžtas kiekvienam $\delta > 0$ ir $u_\delta \in U$. Taigi užtenka patikrinti antrąją reguliarizuojančių operatorių apibrėžimo sąlygą. Kadangi v_δ minimizuoja funkcionalą $\Omega(v)$ aibėje V_δ ir $v_T \in V_\delta$, tai teisinga nelygybė

$$\Omega(v_\delta) \le \Omega(v_T).$$

Taigi v_δ priklauso komapktiškai erdvėje V aibei

$$V_T = \{v \in V_1 : \quad \Omega(v) \le \Omega(v_T)\,\}.$$

Tegul duota seka $\{u_n\}$, tokia, kad $\rho_u(u_n, u_T) \le \delta_n$, o $\{\delta_n\}$ yra seka teigiamų skaičių, artėjančių prie nulio:

$$\delta_n \to 0, \quad \text{kai } \ n \to \infty.$$

Kiekvienam δ_n apibrėžiame aibę $V_{\delta_n} = V_1 \cap Q_{\delta_n}$, čia

$$Q_{\delta_n} = \{v \in V : \quad \rho_U(Av, u_{\delta_n}) \le \delta_n\,\}.$$

Remiantis teoremos sąlyga, kiekvienoje aibėje V_{δ_n} egzistuoja uždavinio

$$\Omega(v_{\delta_n}) = \inf_{v \in V_{\delta_n}} \Omega(v)$$

sprendinys v_{δ_n}. Gautoji seka $\{v_{\delta_n}\}$ priklauso kompaktiškai aibei V_T, todėl iš jos galime išskirti konverguojantį erdvės V metrikoje posekį $\{v_{\delta_{n_k}}\}$

$$\tilde{v} = \lim_{n_k \to \infty} v_{\delta_{n_k}}.$$

Tai, kad egzistuoja tokia riba ir yra svarbiausia stabilizuojančio funkcionalo panaudojimo išvada. Lieka ištirti ar $\tilde{v}$ sutampa su tiksliu sprendiniu v_T.

Kadangi $v_{\delta_{n_k}} \in Q_{\delta_{n_k}}$, tai kiekvienam poaibio elementui galioja nelygybė

$$\rho_U(Av_{\delta_{n_k}}, u_{\delta_{n_k}}) \le \delta_{n_k}.$$

Imkime ribą, kai $n_k \to \infty$ ir pasinaudokime metrikos ρ_U ir operatoriaus A tolydumu, gauname lygybę

$$\rho_U(A\tilde{v}, u_T) = 0.$$

Tada iš metrikos apibrėžimo seka, kad teisinga lygybė $A\tilde{v} = u_T$. Kadangi toks sprendinys vienintelis, tai $\tilde{v} = v_T$. Įrodėme, kad

$$\lim_{n_k \to \infty} v_{\delta_{n_k}} = v_T.$$

Šis teiginys yra teisingas sekos $\{v_{\delta_n}\}$ kiekvienam konverguojančiam posekiui. Remdamiesi ribos apibrėžimu, gauname, kad seka $\{v_{\delta_n}\}$ konverguoja į elementą v_T (erdvės V metrikoje), kai $\delta_n \to 0$. Tai reiškia, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$ galime parinkti tokį $\delta(\varepsilon)$, kad iš nelygybės

$$\rho_U(u_\delta, u_T) \le \delta(\varepsilon)$$

seka įvertis $\rho_V(v_\delta, v_T) \leq \varepsilon$. Taigi išpildyta ir antroji reguliarizuojančio operatoriaus apibrėžimo sąlyga. $\square$

Teoremos formuluotėje padarėme prielaidą, kad visada egzistuoja elementas v_δ, aibėje V_δ minimizuojantis funkcionalą $\Omega(v)$. Dabar pateiksime paprastą pakankamąją sąlygą, kada toks sprendinys tikrai egzistuoja.

Apibrėžimas. Pažymėkime $\|v\|_1 := \Omega^{1/2}(v)$. Jei aibėje V_1 funkcionalas $\|v\|_1$ yra norma, tada galime apibrėžti naują metriką

$$\rho_1(v_1, v_2) := \|v_1 - v_2\|_1.$$

Sakysime, kad funkcionalas $\Omega(v)$ aibėje V_1 apibrėžia *mažoruojančią* metriką, jei išpildyta nelygybė

$$\rho_V(v_1, v_2) \leq \rho_1(v_1, v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V_1,$$

o norma $\|v\|_1$ generuoja Hilberto erdvę (t.y. šią normą galime apibrėžti naudodami tam tikrą skaliarinę sandaugą (v, w), kur $v, w \in V_1$).

Be įrodymo suformuluosime vieną svarbų pagalbinį teiginį.

1.1 lema. *Tegul V yra tiesinė metrinė erdvė su metrika $\rho_V(v_1, v_2)$ ir išpildytos šios sąlygos:*

- *B yra uždaras V poaibis $B \subset V$;*
- *$f(v)$ yra neneigiamas, tolydus funkcionalas, apibrėžtas erdvėje V;*
- *$\Omega(v)$ yra stabilizuojantis funkcionalas, apibrėžtas aibėje $V_1 \subset V$, generuojantis Hilberto erdvę su mažoruojančia metrika.*

Pažymėkime aibę $V_{1,B} = B \cap V_1$. Tada uždavinio

$$f(v_\alpha) + \alpha\Omega(v_\alpha) = \inf_{v \in V_{1,B}} \big(f(v) + \alpha\Omega(v)\big), \quad \alpha > 0$$

sprendinys v_α egzistuoja ir priklauso aibei V_1.

Vėl nagrinėkime variacinį reguliarizavimo metodą. Teisinga tokia teorema apie minimizuojančio elemento v_δ egzistavimą.

1.5 teorema. *Tegul V yra tiesinė metrinė erdvė, $\Omega(v)$ stabilizuojantis funkcionalas, apibrėžtas aibėje $V_1 \subset V$ ir generuojantis Hilberto erdvę su mažoruojančia metrika $\rho_1(v_1, v_2)$. Tada kiekvienam $\delta > 0$ egzistuoja $v_\delta \in V_1$, minimizuojantis funkcionalą $\Omega(v)$ aibėje V_δ.*

Įrodymas. 1.1 lemoje pažymėkime $B = \Omega_\delta$, $f(v) = 0$ ir $\alpha = 1$, tada iš karto gauname teoremos teiginį. $\square$