1.3. Paprasti reguliarizavimo algoritmai

Šioje paskaitoje susipažinsime su nesudėtingais nekorektiškų uždavinių reguliarizavimo algoritmais, kurie dažnai naudojami sprenžiant įvairius taikomuosius uždavinius.

1.3.1. Funkcijos išvestinės skaičiavimas

Reikia rasti diferencijuojamos funkcijos $u_T(t)$ išvestinę, kai šią funkciją žinome tik su paklaida. Pirmoje paskaitoje įrodėme, kad toks uždavinys yra nekorektiškas.

Pažymėkime $v_T(t) = u_T'(t)$ tikslią išvestinę. Ją apskaičiuojame naudodami apibrėžimą

$$u'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

arba remiantis šia formule įrodytomis išvestinių skaičiavimo taisyklėmis.

Tarkime, kad vietoj funkcijos $u_T(t)$ turime tik jos artinį

$$u(t) = u_T(t) + \delta(t), \quad |\delta(t)| \le \delta.$$

Tada jau negalime išvestinės skaičiuoti naudodami jos apibrėžimą u', nes tokia funkcija egzistuoja tik tada, kai $\delta(t)$ yra pakankamai glodi funkcija. Jei u' ir galime apskaičiuoti, tai pirmoje paskaitoje įsitikinome, kad tokiam artiniui nepavyksta įrodyti išvestinės tolydžios prikausomybės nuo pradinių duomenų. Taigi paklaida $\delta(t)$ gali būti kiek norima maža (C normoje), tačiau $u'(t)$ nekonverguoja į tikslią išvestinės reikšmę $v_T(t) = u_T'(t)$.

Funkcijos $u(t)$ išvestinės artinį skaičiuosime naudodami paprastą skaitinio diferencijavimo formulę

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t)}{h}. \tag{1.9}$$

Įvertinsime gautojo artinio paklaidą

$$\Big|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u_T'(t)\Big| = \Big|\Big(\frac{u_T(t+h)-u_T(t)}{h} - u_T'(t)\Big) + \frac{\delta(t+h)-\delta(t)}{h}\Big|.$$

Panaudoję Teiloro skleidinį, įvertiname pirmojo nario paklaidą

$$\frac{u_T(t+h) - u_T(t)}{h} - u_T'(t) = \frac{h}{2}u_T''(t+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Taigi, jei $|u_T''| \le C$, tai

$$\frac{u_T(t+h) - u_T(t)}{h} \to u_T'(t), \quad \text{kai } h \to 0.$$

Tačiau apie matavimo paklaidas $\delta(t)$ žinome tik kad jos yra aprėžtos, todėl

$$\Big|\frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}\Big| \le \frac{2\delta}{h} \to \infty, \quad \text{kai } h \to 0.$$

Matome, kad netikslinga imti per daug mažą parametrą h, nes tada išvestinės artinio paklaida yra labai didelė dėl matavimo paklaidų poveikio (čia ir pasireiškia uždavinio nekorektiškumas).

Rasime tokį h_0, kada bendroji aproksimavimo paklaida

$$\varphi(h) = \frac{Ch}{2} + \frac{2\delta}{h}$$

yra mažiausia. Sprendžiame lygtį

$$\varphi'(h) := \frac{C}{2} - \frac{2\delta}{h^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = 2\sqrt{\frac{\delta}{C}}.$$

Gavome labai paprastą taisyklę: skaičiuodami išvestinę, imame žingsnį h_0, kurio dydis suderintas su matavimo paklaidomis. Mažesnio žingsnio naudojimas tik pablogina artinio tikslumą.

Imdami optimalų žingsnį h_0, funkcijos $u_T(t)$ išvestinę apskaičiuojame tikslumu

$$\varphi(h_0) = \frac{Ch_0}{2} + \frac{2\delta}{h_0} = 2\sqrt{C\delta} = \mathcal{O}(\sqrt{\delta}).$$

Taigi, jei matavimo paklaida $\delta = 10^{-6}$, tai išvestinę randame tik 10^{-3} tikslumu.

Artinio paklaidos įvertį sudaro dvi dedamosios, optimalaus žingsnio h_0 atveju jos yra vienodos. Norėdami sumažinti matavimo paklaidų poveikį turime didinti žingsnį h, bet tada aproksimavimo paklaidą galime sumažinti tik imdami tikslesnę išvestinės aproksimaciją didesnio tikslumo baigtinių skirtumų formule. Imkime centrinių skirtumų formulę

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}. \tag{1.10}$$

Įvertinsime gautojo išvestinės artinio paklaidą

$$\Big|\frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h} - u_T'(t)\Big| = \Big|\frac{u_T(t+h) - u_T(t-h)}{2h} - u_T'(t) + \frac{\delta(t+h) - \delta(t-h)}{2h}\Big|.$$

Panaudoję Teiloro skleidinį, įvertiname baigtinių skirtumų formulės aproksimacijos paklaidą

$$\Big|\frac{u_T(t+h)-u_T(t-h)}{2h}-u_T'(t)\Big| = \frac{h^2}{6}\Big|\frac{u_T'''(t+\theta_1 h)+u_T'''(t+\theta_2 h)}{2}\Big|,$$

čia $0<\theta_1,\theta_2<1$. Jei $|u_T'''|\le C$, tai centrinių skirtumų formulės bendroji paklaida yra ne didesnė už

$$\varphi_2(h)=\frac{C}{6}h^2+\frac{\delta}{h}.$$

Surasime tokį h_0, kada ši paklaida yra mažiausia. Sprendžiame lygtį

$$\varphi_2'(h):=\frac{C}{3}h-\frac{\delta}{h^2}=0 \quad\Rightarrow\quad h_0=\Big(\frac{3\delta}{C}\Big)^{1/3}=\mathcal{O}(\delta^{1/3}).$$

Naudodami centrinių skirtumų aproksimacijos formulę išvestinę skaičiuojame su didesniu žingsniu, nei imdami (1.9) formulę. Tai sumažina matavimo paklaidų poveikį, o kartu ir bendrąją paklaidą iki tokio dydžio:

$$\varphi_2(h_0)=\frac{C}{2}h_0^2+\frac{\delta}{h_0}=\mathcal{O}(\delta^{2/3}).$$

Pavyzdžiui, jei matavimo paklaida $\delta=10^{-6}$, tai išvestinę apskaičiuojame 10^{-4} tikslumu.

1.3.2. Furjė eilutės sumavimas

Skaičiuojme eilutės

$$f(t):=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nt),\qquad 0\le t\le 2\pi$$

sumą. Tegul ši eilutė konverguoja visoms t reikšmėms iš funkcijos apibrėžimo intervalo.

Nagrinėkime uždavinį, kai vietoj tikslių koeficientų reikšmių a_n žinome tik jų artinius $\tilde{a}_n$ ir teisingas paklaidos įvertis

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-\tilde{a}_n)^2\le\delta^2.$$

Tada galime apskaičiuoti tik funkciją

$$\tilde{f}(t):=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_n\cos(nt).$$

Pirmoje paskaitoje įsitikinome, kad nors koeficientai L_2 normoje skiriasi kiek norima mažai, kai $\delta \to 0$, funkcijos $\tilde{f}(t)$ reikšmės C normoje gali ir nekonverguoti į $f(t)$. Todėl ieškodami $f(t)$ reikšmės taške $t = t_0$ jos artiniu negalime imti $\tilde{f}(t_0)$ reikšmės.

Nagrinėkime dalinę eilutės sumą, kai sumuojame tik pirmuosius $(N+1)$ narius:

$$\tilde{f}_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n \cos(nt).$$

Įvertinsime tokio artinio paklaidą:

$$\big|\tilde{f}_N(t) - f(t)\big| \le \big|\sum_{n=0}^{N} (\tilde{a}_n - a_n)\cos(nt)\big| + \big|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos(nt)\big|.$$

Kadangi trigonometrinė eilutė konverguoja, tai antroji nelygybės suma (ji apibrėžia eilutės liekaną) konverguoja į nulį, kai $N \to \infty$:

$$\big|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos(nt)\big| \le \frac{C \ln(N+1)}{(N+1)^m} \to 0, \quad \text{kai } N \to \infty, \ \ m > 0.$$

Konvergavimo greitis m priklauso nuo funkcijos $f(t)$ glodumo, kuo daugiau kartų ši funkcija diferencijuojama, tuo didesnis yra m. Pakankama tokio įverčio egzistavimo sąlyga yra, kad m-oji funkcijos $f(t)$ išvestinė būtų aprėžta, t.y. $|f^{(m)}(t)| \le C$.

Pirmąją sumą įvertiname naudodami Koši-Švarco nelygybę ir trivialų įvertį $|\cos(nt)| \le 1$, tada gauname:

$$\big|\sum_{n=0}^{N} (\tilde{a}_n - a_n)\cos(nt)\big| \le \Big(\sum_{n=0}^{N} (\tilde{a}_n - a_n)^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{N} \cos^2(nt)\Big)^{1/2} \le \delta\sqrt{N+1}.$$

Taigi Furjė eilutės sumos apytikslės reikšmės $\tilde{f}_N(t)$ paklaidą įvertiname taip:

$$\psi(N) := \max_{0 \le t \le 2\pi} \big|\tilde{f}_N(t) - f(t)\big| \le \delta\sqrt{N+1} + \frac{C \ln(N+1)}{(N+1)^m}.$$

Paklaida mažiausia, kai

$$\frac{\delta}{2\sqrt{N+1}} + \frac{C}{(N+1)^{m+1}} - \frac{Cm \ln(N+1)}{(N+1)^{m+1}} = 0.$$

Išsprendę šią lygtį randame optimalų sumos narių skaičių N_0. Vėl gavome paprastą taisyklę: sumuojame tik baigtinį skaičių eilutės narių, $N_0 = N_0(\delta)$ priklauso nuo paklaidų dydžio, kuo tos paklaidos didesnės, tuo mažiau narių imsime.

1.3.3. Lygties pakeitimo metodas

Nagrinėkime nekorektišką matematinį uždavinį

$$Av = u, \quad u \in U, \ \ v \in V.$$

Tarsime, kad paėmus tikslius pradinius duomenis $u_T \in U$, uždavinys turi vienintelį sprendinį

$$v_T = A^{-1}u_T.$$

Tačiau, jei vietoj tikslaus elemento u_T žinome tik jo artinį u_δ:

$$\rho_u(u_\delta, u_T) \leq \delta,$$

tai sprendinio v_T artiniu jau negalime imti uždavinio

$$Av_\delta = u_\delta$$

sprendinio, nes

- toks sprendinys gali neegzistuoti, jei $u_\delta \notin AV$;
- jei $v_\delta = A^{-1}u_\delta \in V$ egzistuoja, tai gautasis sprendinys gali būti nestabiliu, t.y. atvirkštinis operatorius A^{-1} nėra tolydus. Tada mažus u_δ pokyčius gali atitikti dideli sprendinio v_δ pokyčiai.

Turime sudaryti tokį v_δ skaičiavimo algoritmą $v_\delta = R(u_\delta)$, kad

$$\rho_v(v_\delta, v_T) \to 0, \quad \text{kai} \quad \delta \to 0.$$

M.Lavrentjevas pasiūlė pakeisti duotąjį nekorektišką uždavinį jam artimu, bet korektišku uždaviniu

$$B_\alpha v_\alpha = u.$$

Atsižvelgdami į turimą informaciją apie pradinių duomenų paklaidą, parametrą $\alpha = \alpha(\delta)$ parenkame taip, kad galiotų sąlyga

$$\rho_v(v_{\alpha(\delta)}, v_T) \to 0, \quad \text{kai} \quad \delta \to 0.$$

Paprasčiausią tokio keitimo atvejį gauname, kai $V = U$ ir jos yra Hilberto erdvės, o operatorius A yra tiesinis ir teigiamai apibrėžtas, t.y.

$$(Ax, x) > 0, \quad \forall x \in V.$$

Tada prie lygties kairiosios pusės pridedame vienetinį operatorių, padaugintą iš konstantos α, gauname lygtį:

$$(A + \alpha I)v_\alpha = u_\delta, \quad \alpha > 0.$$

Pasinaudoję trikampio nelygybe, artinio v_α paklaidą įvertiname taip:

$$\rho_V(v_\alpha, v_T) \le \rho_V(v_\alpha, \tilde{v}_\alpha) + \rho_V(\tilde{v}_\alpha, v_T),$$

čia $\tilde{v}_\alpha$ yra sprendinys pakeistosios lygties su tiksliais pradiniais duomenimis

$$(A + \alpha I)\tilde{v}_\alpha = u_T.$$

Nesunku patikrinti, kad teisingas įvertis

$$\big((A + \alpha I)x, x\big) \ge \alpha(x, x), \quad \forall x \in V,$$

todėl galime įvertinti iš viršaus pirmąjį paklaidos narį

$$\rho_V(v_\alpha, \tilde{v}_\alpha) \le \frac{\delta}{\alpha}.$$

Kiekvienam konkrečiam uždaviniui reikia įrodyti (rasti tokią funkciją $\eta(\alpha)$), kad teisingas įvertis:

$$\rho_V(\tilde{v}_\alpha, v_T) \le \eta(\alpha) \quad \text{ir} \quad \eta(\alpha) \to 0, \ \text{kai} \ \alpha \to 0. \tag{1.11}$$

Tada gauname reikalingą paklaidos įvertinimą

$$\rho_V(v_\alpha, v_T) \le \eta(\alpha) + \frac{\delta}{\alpha}.$$

Parametrą $\alpha = \alpha(\delta)$ reikia parinkti taip, kad galiotų įverčiai:

$$\alpha(\delta) \to 0 \quad \text{ir} \quad \frac{\delta}{\alpha} \to 0, \ \text{kai} \ \delta \to 0.$$

Tada išpildyta sprendinio v_α stabilumo sąlyga

$$\rho_V(v_\alpha, v_T) \to 0, \quad \text{kai} \quad \delta \to 0.$$

Dažniausiai pasirenkame tokią parametro $\alpha = \alpha(\delta)$ priklausomybę nuo pradinių duomenų tikslumo, kad artinio v_α paklaidos viršutinis rėžis būtų mažiausias.

Šiame pavyzdyje nagrinėsime uždavinį, kurio analizei reikalingos ir matematinės fizikos lygčių teorijos žinios.

1.4 pavyzdys. Šilumos laidumo uždavinys su atvirkštine laiko tėkme. Šilumos laidumo uždavinyje nagrinėjame šilumos tvermės lygtį. Remiamės tokiomis prielaidomis:

1. Šiluminė energija niekur nedingsta ir nesukuriama srities viduje.

2. Šilumos srautas per bet kurios srities paviršių yra proporcingas temperatūros $u(x,t)$ gradientui, k yra difuzijos koeficientas.

Gauname diferencialinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T]. \tag{1.12}$$

Taip pat žinome temperatūrą strypo galuose (tarsime, kad po normavimo ji lygi 0):

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.13}$$

bei užduotas pradinis temperatūros pasiskirstymas

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{1.14}$$

Matematiniame modelyje nagrinėjame tiesioginę laiko tėkmę. Įrodysime, kad uždavinio sprendinį galime rasti Furjė metodu ir kad toks uždavinys yra korektiškas, t.y. tolydžiai priklauso nuo pradinių duomenų.

Priminsime, kad funkcijos $\{\sin(\pi nx),\ n = 1,2,\dots\}$ yra ortogonalios, t.y.

$$\big(\sin(\pi nx), \sin(\pi mx)\big) = 0, \quad n \ne m,$$

ir sudaro pilną funkcijų sistemą.

Pastebėsime, kad visos šios funkcijos tenkina kraštines sąlygas (1.13). Remdamiesi Furjė metodu atskiriame kintamuosius ir (1.12) lygties sprendinio ieškome tokia forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(\pi nx).$$

Įstatę šią eilutę į diferencialinę lygtį ir sukeitę sumavimo ir diferencijavimo veiksmų tvarką (tarkime, kad taip galima daryti, šią prielaidą vėliau nesunku patikrinti), gauname lygybę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{da_n(t)}{dt} + k(\pi n)^2 \, a_n(t) \Big) \sin(\pi n x) = 0.$$

Kadangi funkcijų sistema $\{\sin(\pi n x),\ n = 1, 2, \ldots\}$ yra tiesiškai nepriklausoma, tai tokia lygybė galima tik tada, kai

$$\frac{da_n(t)}{dt} + k(\pi n)^2 \, a_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Šių diferencialinių lygčių bendrąjį sprendinį randame kintamųjų atskirimo metodu:

$$a_n(t) = a_n \, e^{-k(\pi n)^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

čia a_n kol kas neapibrėžtos konstantos. Taigi suradome šilumos laidumo lygties bendrąjį sprendį, tenkinantį ir (1.13) kraštines sąlygas:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-k(\pi n)^2 t} \, \sin(\pi n x). \tag{1.15}$$

Koeficientus a_n apskaičiuojame skleisdami Furjė eilute uždavinio pradinę sąlygą (1.14)

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \sin(\pi n x)$$

ir pasinaudoję funkcijų sistemos $\{\sin(\pi n x),\ n = 1, 2, \ldots\}$ ortogonalumo savybe:

$$a_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin(\pi n x) \, dx, \quad n \geq 1.$$

Iš (1.15) formulės matome, kad kuo didesnio numerio n harmonika skleidinyje, tuo greičiau mažėja koeficientas $a_n \, e^{-k(\pi n)^2 t}$ prie $\sin(\pi n x)$, kai t didėja. Todėl sprendinys $u(x,t)$ tampa vis glodesniu, o lokalieji ekstremumai susilygina su gretimų taškų temperatūromis.

Ištirsime ar sprendinys tolydžiai priklauso nuo pradinės sąlygos. Priminsime, kad bet kokios funkcijos $v(x) \in L_2(0,1)$ normą galima apskaičiuoti naudojant jos Furjė skleidinio koeficientus

$$\|v\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Todėl iš (1.15) formulės gauname nelygybę:

$$\|u(\cdot,t)\|^2 \ \le \ e^{-2k\pi^2 t}\,\|\varphi\|^2.$$

Funkcija $u(x,t)$ tolydžiai priklauso nuo pradinės sąlygos, todėl šilumos laidumo uždavinys yra korektiškas.

Dabar tarsime, kad žinome temperatūrą laiko momentu $t = T$

$$u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{1.16}$$

o reikia rasti temperatūros pasiskirstymą pradiniu laiko momentu, t.y. funkciją $\varphi(x)$. Taigi sprendžiame uždavinį (1.12), (1.13) su pradine sąlyga (1.16). Šiuo atveju laikas kinta atvirkščia, mažėjimo, kryptimi.

Toks uždavinys sprendžiams, kai atliekama gaisro ekspertizė: pagal duomenis, kuriuos randa ekspertai atvykę į gaisravietę reikia nustatyti gaisro priežastis, t.y. išsiaškinti, kokia buvo pradinė temperatūra, kur buvo gaisro židinys.

Ir uždavinio su atvirkščia laiko tėkme sprendinį randame Furjė metodu:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, e^{k(\pi n)^2(T-t)}\, \sin(\pi n x), \tag{1.17}$$

koeficientus b_n gauname skleisdami Furjė eilute funkciją $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, \sin(\pi n x), \quad b_n = 2\int_0^1 \psi(x)\sin(\pi n x)\,dx, \quad n \ge 1.$$

Jeigu vietoj tikslios funkcijos $\psi(x)$ turime tik jos artinį $\psi_\delta(x)$

$$\|\psi_\delta - \psi\| \le \delta,$$

tai gali neegzistuoti tokia tolydi funkcija $u(x,0) = \varphi_\delta(x)$, kad išsprendus šilumos laidumo uždavinį su tiesiogine laiko tėkme, būtų išpildyta lygybė

$$u(x,T) = \psi_\delta(x).$$

Jeigu tokia funkcija ir egzistuoja, tai neišpildyta sąlyga apie sprendinio tolydžią priklausomybę nuo pradinių duomenų. Tai matosi iš (1.17) formulės, nes maži koeficiento b_n pokyčiai δ_n padidėja iki labai didelių reikšmių $\delta_n e^{k(\pi n)^2 T}$ laiko momentu $t = 0$. Toks nestabilumas yra tuo didesnis, kuo aukštesnę sprendinio harmoniką nagrinėjame. Taigi šilumos laidumo uždavinys su atvirkštine laiko tėkme yra nekorektškas uždavinys ir jo sprendiniu negalime imti funkcijos

$$\varphi(x) = u_\delta(x, 0).$$

Naudosime lygties pakeitimo metodą. Vietoj šilumos laidumo lygties (1.12) spręsime lygtį

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^4 v_\alpha}{\partial x^4}, \quad (x,t) \in (0,1) \times [0,T), \tag{1.18}$$

kai laiko momentu $t = T$ užduota pradinė informacija (1.16) (taigi vėl nagrinėjame atvirkštinę laiko tėkmę). Parametro α dydis turi būti derinamas su pradinių duomenų tikslumu δ, t.y. $\alpha = \alpha(\delta)$. Funkcijos $\varphi(x)$ artiniu imsime pakeistojo uždavinio (1.18) sprendinį laiko momentu $t = 0$:

$$\varphi_\alpha(x) = v(x, 0).$$

Tokio lygties pakeitimo poveikį sprendinio stabilumui nesunku paaiškinti. Imkime Furjė metodu gautą sprendinį

$$v_\alpha(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \, e^{-(\pi n)^2(\alpha(\pi n)^2 - k)(T-t)} \, \sin(\pi n x). \tag{1.19}$$

Jei n pakankamai didelis skaičius, tai gauname nelygybę $\alpha(\pi n)^2 > k$. Tada nario $\tilde{b}_n e^{-(\pi n)^2(\alpha(\pi n)^2-k)(T-t)} \sin(\pi n x)$ įnašas į (1.19) sumą yra labai mažas, todėl pradinių duomenų paklaidos $(b_n - \tilde{b}_n)$ poveikis smarkiai sumažėja. Aišku netenkame ir dalies naudingos informacijos, tai įvertiname nariu $\eta(\delta)$ nelygybėje (1.11). Todėl reikia optimizuoti parametro α reikšmę taip, kad bendroji sprendinio paklaida būtų mažiausia.