

Kai kurios funkcionalinės analizės sąvokos, apibrėžimai, teoremos.

J. Kirjackis

Tegul E - bet kokia aibė.

Apibrėžimas. Aibė E vadinama *metrine erdve*, jei kiekvienai aibės E elementų porai (x, y) yra priskirtas realus skaičius $\rho(x, y)$, vadinamas *atstumu* tarp x ir y , kad būtų patenktos trys sąlygos (aksiomos):

1. $\rho(x, y) \geq 0$, be to $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – (simetrijos aksioma);
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ – "trikampio nelygybė".

Čia $x, y, z \in E$. Funkcija ρ vadinama erdvės E *metrika*.

Pavyzdys 1. Tegul R – realiųjų skaičių aibė. Aibė

$$R^n = R \times R \times \dots \times R = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\},$$

kurioje atstumas apibrėžiamas lygybe

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

yra metrinė erdvė. (Čia $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$).

Pavyzdys 2. Aibė R^n , kurioje atstumas ρ_1 apibrėžtas lygybe

$$\rho_1(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$$

irgi yra metrinė erdvė.

Pavyzdys 3. Kompleksinių skaičių aibė $\mathbb{C}$ yra metrinė erdvė, jei atstumą ρ apibrėžti lygybe

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Pavyzdys 4. Aibė $\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) : z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$ yra metrinė erdvė, jei atstumą tarp dviejų tos aibės elementų $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ir $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ apibrėžiame lygybe

$$\rho(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k - w_k|^2}.$$

Pavyzdys 5. Tolydžių intervale $[a, b]$ funkcijų aibė $C([a, b])$ yra metrinė erdvė, jei atstumas tarp dviejų šios aibės funkcijų f ir g apibrėžtas lygybe

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|.$$

Pavyzdys 6. Tolydžiai k kartų diferencijuojamų intervale $[a, b]$ funkcijų aibė $C^k([a, b])$ yra metrinė erdvė, jei atstumas tarp dviejų šios aibės funkcijų f ir g apibrėžtas lygybe

$$\rho(f, g) = \sum_{i=0}^k \max_{a \leq x \leq b} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|.$$

Čia $\varphi^{(0)}(x) \equiv \varphi(x)$.

Pavyzdys 7. Integruojamų (pvz., tolydžių) aibėje A ($A \subset \mathbb{R}$), funkcijų aibė $L_1(A)$ yra metrinė erdvė, jei

$$\rho(f, g) = \int_A |f(x) - g(x)| dx$$

ir laikoma $f = g$, kai $f(x) = g(x)$ beveik visur aibėje A .

Pavyzdys 8. Aibė $L_p(a, b)$ funkcijų $\varphi(x)$, kurioms $\int_a^b |\varphi(x)|^p dx < \infty$, yra metrinė erdvė, jei

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

ir laikoma kad $f = g$, kai $f(x) = g(x)$ beveik visur intervale (a, b) .

Tegul $p = 2$. Aibėje $L_2(a, b)$ metriką galima apibrėžti lygybe

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Pavyzdys 9. Visų aprėžtų sekų $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < \infty$ aibė l yra metrinė erdvė, jeigu metriką įvesti lygybę

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|,$$

čia $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$.

Pavyzdys 10. Visų begalinių sekų $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$, kurioms $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$ metrizuojama lygybe

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tokia metrinė erdvė paprastai žymima l^p .

Pavyzdys 11. Visų aprėžtų sekų aibėje galima įvesti metriką lygybe

$$\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|,$$

$x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$. Tokia metrinė erdvė dažnai žymi raide m .

Pavyzdys 12. Aibėje visų begalinių skaičių sekų galima įvesti atstumą tarp elementų $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ ir $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$ formule

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}.$$

Tokia metrinė aibė dažnai žymi raide s .

Erdvė X vadinama *tiesine* (arba *vektorine*), jeigu $\lambda u + \mu v \in X$ bet kuriems skaliarams λ ir μ ir $u, v \in X$.

Funkcionalas $F : X \rightarrow \Re$ vadinamas *tiesiniu*, jeigu

$$F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)$$

bet kuriems skaliarams λ ir μ ir $u, v \in X$.

Sakykime, X yra realioji vektorinė erdvė ir egzistuoja funkcija $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \Re$, tenkinanti sąlygas:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

3. $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$;
4. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$;

čia $x, y, z \in X$, $c \in \mathbb{R}$. Tokia erdvė X yra vadinama realiąja *euklidine erdve*, arba *erdve su skaliarine daugyba*; funkcija $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — *skaliarine daugyba*, skaičius $\langle x, y \rangle$ — elementų x ir y *skaliarinė sandauga*. Kartais euklidinėmis erdvėmis vadinamos tik baigtiniamatės erdvės su skaliarine daugyba (o pilnos begaliniamatės erdvės su skaliarine daugyba vadinamos *Hilberto erdvėmis*).

Sakykime, X yra kompleksinė vektorinė erdvė ir egzistuoja funkcija $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, tenkinanti sąlygas:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
3. $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$;
4. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$;

čia $x, y, z \in X$, $c \in \mathbb{R}$. Tokia erdvė X yra vadinama *kompleksine euklidine erdve*.

Tegul L — vektorinė (tiesinė) erdvė. Funkcionalas $p(x) : L \rightarrow \mathbb{R}$ vadinamas *norma* erdvėje L , jeigu jis tenkina šias sąlygas:

1. $p(x) \geq 0$, be to $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in L$;
3. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in L$.

Elemento $x \in L$ norma žymima simboliu $\|x\|$.

Jeigu $\langle x, y \rangle = 0$, tai elementai x ir y vadinami *ortogonaliais*. Jeigu egzistuoja tokia seka (x_n) erdvėje X , jog

1. $\langle x_i, y_j \rangle = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots$;
2. $x_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$,

tai ta seka yra vadinama *ortogonaliąja* seka erdvėje X .

Jeigu egzistuoja tokia seka (e_n) erdvėje X , jog

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$i, j, = 1, 2, \dots$, tai ta seka yra vadinama *ortonormuotąja* seka erdvėje X .

Jeigu erdvė X yra euklidinė, tai joje galima apibrėžti norma formule

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

(Tokia norma vadinama *euklidinė*). Aišku, kad jeigu (x_n) – ortogonalioji seka, tai $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)$ – ortonormuoti.

Euklidinė erdvė X paverčiama metrine erdve apibrėžus metriką

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

Ta metriką vadinama *euklidinė*.

Teorema. *Sakykime X yra realioji euklidinė erdvė. Tuomet teisinga Koši nelygybė*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad x, y \in X,$$

čia $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$ euklidinės normos elementų x ir y .

Pavyzdys. Tegul $X = \mathbb{R}^n$ – n -matė euklidinė erdvė. Tada

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Kiekvieną euklidinę erdvę galima paversti normuotąja erdve, tačiau atvirkštinis teiginys apskritai nėra teisingas. Euklidinėje erdvėje galima apibrėžti ir kitas normas.

Pavyzdys. Erdvėje $C([a; b])$ galima apibrėžti normą (neeuklidinę)

$$\|f\| := \max_{x \in [a; b]} |f(x)|.$$

Pavyzdys. Erdvėje $C([a; b])$ galima apibrėžti skaliarinę sandaugą

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

ir euklidinę normą

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Pavyzdys. Realių funkcijų klasėje $L_2(a, b)$, t.y. kai $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$, normą galima įvesti formule

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Koši (kartais vad. Koši-Buniakovskio) nelygybė čia atrodo taip

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Padauginus abi nelygybės puses iš dviejų ir pridėjus

$$\int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx$$

gausime Koši-Minkovskio nelygybę

$$\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \leq \left[\left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$$

arba

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Prisiminsime kompaktiškų aibių ir kompacto apibrėžimus.

Apibrėžimas. Metrinės erdvės U aibė M , $M \subset U$, vadinama *kompaktiška erdveje* U , jeigu iš bet kokios jos elementų begalinės sekos galima išskirti posekį, konverguojantį į erdvės U elementą.

Apibrėžimas. Metrinės erdvės U aibė M vadinama *kompaktu*, jeigu iš bet kokios jos elementų begalinės sekos galima išskirti posekį, konverguojantį į aibės M elementą.

Apibrėžimas. Metrinės erdvės elementų seka (x_n) vadinama *fundamentaliąja* (arba Koši seka), jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja toks natūralus skaičius N , kad $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, jei $m, n > N$. Metrinė erdvė vadinama *pilnąja* metriniu erdve, jei kiekviena jos elementų fundamentalioji seka konverguoja (į koki nors tos erdvės elementą).

Apibrėžimas. Metrinės erdvės U aibė M vadinama *uždara*, jeigu ji sutampa su savo uždariniu (t.y. jai priklauso visi jos ribiniai taškai).

Taigi, kompaktas yra uždara kompaktiška erdvėje U aibė.

Uždarų aibių pavyzdžiai:

1. $[a, b] \subset \mathbb{R}$;
2. $M = \{f(x) \in C([a; b]) : |f(x)| \leq K\}$;
3. Bet kokia baigtinė aibė.

Teorema. Kad aibė $M \subset \mathbb{R}^n$ būtų kompaktiška, būtina ir pakankama, kad ji būtų uždara ir aprėžta erdvėje $\mathbb{R}^n$.

Teorema (Bolcano ir Vejerštraso). Iš bet kurios aprėžtos sekos baigtiniamatės euklidinės erdvės E_n galima išskirti konverguojanti posekį.

Taigi, iš aprėžtumo sekos taškų baigtiniamatės euklidinės erdvės išplaukia galimybė išskirti iš jos konverguojančio posekio. Tačiau šis teiginys galioja ne visoms metrinėms erdvėms.

Pavyzdys. Tegul

$$x_1(1, 0, 0, \dots),$$

$$x_2(0, 1, 0, \dots),$$

.....

seka taškų erdvėje m . Šita seka aprėžta metrikoje $\rho(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$ (Visi sekos nariai priklauso sferai vienetinio spindulio). Bet iš šios sekos neįmanoma išskirti konverguojančio posekio, kadangi atstumas tarp bet kurių skirtingų sekos taškų lygus $\rho(x_i, x_k) = 1$, $i \neq j$.

Apibrėžimas. Tarkime, $(\mathbb{X}, \rho)$ – metrinė erdvė. Aibė $M_\varepsilon \subset \mathbb{X}$ vadinama aibės $M \subset \mathbb{X}$ ε -tinklu, jei kiekvieną $x \in M$ atitinka toks $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$, kad

$$\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Teorema (Hausdorfo). Tarkime, $\mathbb{X}$ – pilna metrinė erdvė. Aibė $M \subset \mathbb{X}$

kompaktiška tada ir tik tada, kai su kiekvienu $\varepsilon > 0$ aibėi M egzistuoja baigtinis ε -tinklas.

Apibrėžimas. Aibė $A \subset C[a, b]$ vadinama lygialaipsniškai tolydžiąja, jei kiekvieną $\varepsilon > 0$ atitinka toks $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, kad bet kuriai funkcijai $f \in A$,

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon, \text{ kai } |s - t| < \delta.$$

Aibė $A \subset C[a, b]$ yra aprėžta tada ir tik tada, kai egzistuoja toks $M > 0$, kad kiekvienai funkcijai $f \in A$

$$|f(t)| \leq M, \text{ su visais } t \in [a, b].$$

Teorema (Arcelo-Askolio). Aibė $M \subset C[a, b]$ yra kompaktiška tada ir tik tada, kai ji aprėžta ir lygialaipsniškai tolydi.