Neapibrėžtiniai integralai

Funkcijos $f(x)$ pirmykšte vadinama tokia funkcija $F(x)$, kuriai teisinga lygybė $F'(x) = f(x)$.

Jei $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė ir C – bet kuris realusis skaičius, tai $F(x) + C$ irgi yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija. Funkcijos $f(x)$ neapibrėžtiniu integralu vadinama šios funkcijos visų pirmykščių funkcijų aibė $F(x) + C$. Rašoma:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Pagrindinės neapibrėžtinių integralų savybės

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$;
2. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$;
3. $\int \mathrm{d}f(x) = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$;
4. $\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$;
5. $\int \left(f(x) + g(x)\right)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$;
6. Jei $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ ir $u = u(x)$, tai

$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C = F(u(x)) + C$.

Pagrindinių integralų lentelė

1. $\int 0\,\mathrm{d}x = C$; 2. $\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C$;

3. $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$; 4. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$;

5. $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$; 6. $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$;

7. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$; 8. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;

9. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$; 10. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$;

11. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$; 12. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

13. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$; 14. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;

15. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C$; 16. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;

17. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;

18. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

19. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

20. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

21. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + C$.

Integravimo metodai

1. Tiesioginio integravimo metodas.
2. Įkėlimo už diferencialo ženklo metodas.
3. Kintamojo keitimo metodas.
4. Integravimo dalimis metodas.

Tiesioginio integravimo metodas

Šis metodas pagrįstas pagrindinių integralų lentelės ir savybių taikymu bei pointegralinės funkcijos tapačiaisiais pertvarkiais.

Pavyzdžiai

1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C$;

2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right| + C$;

3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$;

4) $\int \left(x+3x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x^3 + C$;

5) $\int \frac{x^2+2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\left(x^2+1\right)+1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} =$
$x + \operatorname{arctg} x + C$;

6) $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x =$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + C$.

Įkėlimo už diferencialo ženklo metodas

Šis metodas pagrįstas trijų įkėlimo už diferencialo ženklo taisyklių taikymu.

I taisyklė. Prie funkcijos, esančios už diferencialo ženklo, galima pridėti bet kurį skaičių: $du(x) = d(u(x) + a)$.

II taisyklė. Norint funkciją, esančią už diferencialo ženklo, padauginti iš kurio nors nelygaus nuliui skaičiaus, reikia iš šio skaičiaus padalyti diferencialą (integralą):

$$\mathrm{d}u(x) = \frac{1}{a}\cdot \mathrm{d}(a\cdot u(x)); \quad \int f(x)\,\mathrm{d}u(x) = \frac{1}{a}\int f(x)\,\mathrm{d}(au(x)).$$

III taisyklė (žr. antrąją neapibrėžtinių integralų savybę). Norint funkciją, esančią prieš diferencialo ženklą, nukelti už diferencialo ženklo, reikia ją suintegruoti: $g(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Kintamojo keitimo metodas

Tarkime, kad reikia apskaičiuoti integralą $\int f(x)\mathrm{d}x$. Norėdami gauti paprastesnį integralą, keičiame integravimo kintamąjį pagal lygybę $t = u(x)$ arba $x = \varphi(t)$. Tada

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int g(t)\mathrm{d}t = G(t) + C.$$

Integrale $\int g(u(x))\,\mathrm{d}u(x)$ paprasčiausia nauju kintamuoju pažymėti už diferencialo ženklo esančią funkciją: $t = u(x)$.

Pavyzdžiai

1) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}\frac{x^2}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1} =$

$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$;

2) $\int \mathrm{e}^{2\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2\cos x}\mathrm{d}(-\cos x) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2\cos x}\mathrm{d}(2\cos x) =$

$-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} + C = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\cos x} + C$;

3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{\mathrm{d}\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} =$ arscin $t + C =$

arcsin (ln$x$) + C;

4) $\int \cos(3x+5)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \cos(3x+5)\mathrm{d}(3x+5) =$

$\frac{1}{3}\int \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+5) + C$.

Integravimo dalimis metodas

Tai integralų apskaičiavimas taikant integravimo dalimis formulę:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u .$$

Šis metodas dažniausiai taikomas tada, kai reikia integruoti tokią dviejų funkcijų sandaugą:

$$P_n(x)\cdot f(x),$$

čia $P_n(x)$ yra n-ojo laipsnio daugianaris ($n \geq 0$), o $f(x)$ – rodiklinė, logaritminė, trigonometrinė arba atvirkštinė trigonometrinė funkcija. Funkciją v galima gauti keliant kurį nors dauginamąjį $P_n(x)$ ar $f(x)$ už diferencialo ženklo. Kai yra galimybė kelti už diferencialo ženklo rodiklinę, trigonometrinę ir laipsninę funkcijas, galima laikytis šio nurodyto pirmumo.

Pavyzdžiai

1) $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - \int x\mathrm{d}(\ln x) = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x =$

$x\cdot\ln x - x + C$;

2) $\int x\cdot\cos x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\sin x = x\cdot\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x =$

$x\cdot\sin x + \cos x + C$.

Racionaliųjų funkcijų integravimas

Racionaliąja funkcija $R(x)$ vadinamas daugianarių

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

ir

$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

santykis: $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Racionaliosios funkcijos integruojamos keliais etapais:

1) atkreipiame dėmesį į skaitiklio ir vardiklio daugianarių laipsnius n ir m. Jei $n \geq m$, racionaliojoje funkcijoje, kuri šiuo atveju vadinama netaisyklingąja, išskiriame sveikąją dalį;
2) atkreipiame dėmesį į vardiklio daugianario $Q_m(x)$ užrašymo formą. Trečiojo ar aukštesniojo laipsnio daugianaris turi būti išreikštas tiesinių ir kvadratinių (su neigiamais diskriminantais) dauginamųjų

sandauga. Jei $m = 2$, vardiklyje galima išskirti dvinario kvadratą ir gautąjį dvinarį pažymėti nauju kintamuoju;

3) taisyklingąją racionaliąją funkciją išreiškiame paprasčiausiųjų racionaliųjų funkcijų suma;

4) integruojame racionaliosios funkcijos $R(x)$ sveikąją dalį ir paprasčiausias racionaliąsias funkcijas.

1 pavyzdys. Apskaičiuokime integralą $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+3)}$. Matome, kad racionalioji funkcija yra taisyklingoji. Šią funkciją išreikšime dviejų paprasčiausiųjų racionaliųjų funkcijų suma:

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+Bx}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}.$$

Iš tapatybės $(A+B)x+3A \equiv 1$, gautos sulyginus trupmenų skaitiklius, rasime neapibrėžtuosius koeficientus A ir B arba įrašę į tapatybę vietoj x dvi reikšmes, arba sulyginę vienodų x laipsnių koeficientus. Įrašę $x = 0$, gauname $A = \frac{1}{3}$; įrašę $x = -3$, gauname $B = -\frac{1}{3}$. Sulyginę vienodų x laipsnių koeficientus, gauname sistemą

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 3A=1. \end{cases}$$

Iš šios sistemos irgi gauname: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$.

Tada

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+3)} = \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+3} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+3| + C =$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuokime integralą $\int \frac{x^2+x+12}{(x+1)(x^2-9)}\mathrm{d}x$. Pointegralinę funkciją išreikšime trijų paprasčiausiųjų racionaliųjų funkcijų suma ir jas suintegruosime.

$$\frac{x^2+x+12}{(x+1)(x^2-9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3}.$$

Neapibrėžtuosius koeficientus A, B, C rasime iš tapatybės:

$$x^2+x+12 \equiv A(x-3)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-3).$$

Turėdami tapatybę, sulyginame vienodų x laipsnių koeficientus arba parenkame tris x reikšmes, pavyzdžiui,

$x = 0$; $x = 3$; $x = -3$. Gauname: $A = -\frac{3}{2}$; $B = 1$; $C = \frac{3}{2}$.

Tada

$$\int \frac{x^2+x+12}{(x+1)(x^2-9)}\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \int\frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+3} =$$

$$-\frac{3}{2}\ln|x+1| + \ln|x-3| + \frac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuokime integralą $\int \frac{x^5}{x^2+4}\mathrm{d}x$.

Pastebime, kad pointegralinė funkcija yra netaisyklingoji. Todėl joje reikėtų išskirti sveikąją dalį, padalijus kampu skaitiklį iš vardiklio. Tada

$$\int \frac{x^5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int\left(x^3 - 4x + \frac{16x}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x =$$

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x^2 = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 8\ln(x^2+4) + C.$$

4 pavyzdys. Apskaičiuokime racionaliosios funkcijos

$$R(x) = \frac{9x^4 - 88x^3 + 300x^2 - 515x + 510}{x^5 - 13x^4 + 65x^3 - 171x^2 + 270x - 200}$$

integralą, kai žinome, kad vardiklis $Q(x)$ turi tris natūraliąsias šaknis $x_1 < x_2 < x_3$.

Sprendimas. Iš pradžių raskime vardiklio šaknis: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 5$. Tada, vardiklį padaliję iš sandaugos

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3) = (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-5) =$$

$$(x^2 - 6x + 8)\cdot(x-5) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40,$$

gauname paskutinį vardiklio dauginamąjį $x^2 - 2x + 5$.

Kai žinome vardiklio išskaidymą dauginamaisiais, racionaliąją funkciją $R(x)$ galime išreikšti paprasčiausiųjų racionaliųjų funkcijų suma:

$$R(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-5} + \frac{Dx+E}{x^2-2x+5}.$$

Apskaičiuojame neapibrėžtuosius koeficientus:

$$A = 4;\ B = 3;\ C = 1;\ D = 1;\ E = 2.$$

Tada

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{4}{x-2} + \frac{3}{x-4} + \frac{1}{x-5} + \frac{x+2}{x^2-2x+5}\right)\mathrm{d}x =$$

$$4\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \ln|x-5| + \int \frac{x+2}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Paskutiniajame integrale keičiame kintamąjį: $t = x - 1$.
Tada $x = t + 1$; $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$;

$$I = 4\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \ln|x-5| + \int \frac{t+3}{t^2+4}\,\mathrm{dt}.$$

Pažymėkime

$$I_1 = \int \frac{t+3}{t^2+4}\,\mathrm{dt}.$$

Tada

$$I_1 = \int \frac{t+3}{t^2+4}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+4\right) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x + 5\right) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Atsakymas.

$$I = 4\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \ln|x-5| + \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x + 5\right) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

5 pavyzdys. Gaukime rekurenčiąją formulę integralui

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

apskaičiuoti (bet kuris integralų sekos narys apskaičiuojamas žinant pirmesnius sekos narius).

Sprendimas. Integralą $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^n}$ integruokime dalimis:

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} - \int x\,\mathrm{d}\frac{1}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x,$$

arba

$$I_n = \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n\left(I_n - a^2 \cdot I_{n+1}\right).$$

Iš čia:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + (2n-1)\cdot I_n\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Kaip žinome (žr. Integralų lentelės 16 formulę),

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Iš rekurenčiosios formulės, kai $n = 1$, gauname:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{a^2 + x^2} + I_1\right).$$

Iš rekurenčiosios formulės, kai $n = 2$, gauname:

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{x}{(a^2 + x^2)^2} + 3I_2\right)$$

ir t. t.

6 pavyzdys. Gaukime rekurenčiąją formulę integralui

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 - x^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

apskaičiuoti.

Sprendimas. Integralą $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 - x^2)^n}$ integruokime dalimis:

$$I_n = \frac{x}{(a^2 - x^2)^n} + 2n\int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{(a^2 - x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x,$$

arba

$$I_n = \frac{x}{(a^2 - x^2)^n} + 2n\left(I_n - a^2 \cdot I_{n+1}\right).$$

Iš čia:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(a^2 - x^2)^n} + (2n-1)\cdot I_n\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Kaip žinome (žr. Integralų lentelės 17 formulę),

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\,.$$

Iš rekurenčiosios formulės, kai $n = 1$, gauname:

$$I_2 = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{a^2 - x^2} + I_1\right).$$

Iš rekurenčiosios formulės, kai $n = 2$, gauname:

$$I_3 = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{x}{(a^2 - x^2)^2} + 3I_2\right)$$

ir t. t.

Iracionaliųjų reiškinių integravimas

Šio tipo integraluose dažniausiai taikomas kintamojo keitimo metodas.

1) Jei pointegralinėje funkcijoje yra vien tik šaknys iš x arba šaknys iš tiesinės funkcijos $ax + b$, arba šaknys iš tiesinių funkcijų dalmens $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, naujas kintamasis įvedamas taip:

$$\sqrt[s]{x} = t\,, \quad \sqrt[s]{ax+b} = t\,, \quad \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t\,,$$

čia s – šaknų rodiklių mažiausiasis bendrasis kartotinis.

Pakeitę integravimo kintamąjį, gauname racionaliosios funkcijos integralą.

2) Norėdami apskaičiuoti integralus

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int (Ax+B)\sqrt{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,, \qquad \square\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

iš pradžių kvadratiniame trinaryje išskiriame dvinario kvadratą ir tą dvinarį pažymime nauju kintamuoju.

3) Kai reikia apskaičiuoti integralą $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($n \in \mathbf{N}$), integravimo kintamąjį x keičiame nauju kintamuoju t pagal lygybę $t = \dfrac{1}{x-\alpha}$.

4) Kai pointegralinėje funkcijoje yra kvadratinės šaknys iš kvadratinių dvinarių, gali būti taikomi šie trigonometriniai keitiniai:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = a\sin t\,;$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x = \frac{a}{\sin t}\,;$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \quad x = a\,\mathrm{tg}\,t\,.$$

5) Diferencialiniu binomu vadinamas reiškinys $x^m \cdot \left(a+bx^n\right)^p$, čia m, n, p – racionalieji skaičiai, pavyzdžiui,

$$m=\frac{m_1}{m_2}, \quad n=\frac{n_1}{n_2}, \quad p=\frac{p_1}{p_2}.$$

Rusų mokslininkas P. Čebyšovas (1821–1894) 1853 m. įrodė, kad diferencialinis binomas suintegruojamas tik trimis atvejais:

a) p – sveikasis skaičius; šiuo atveju taikomas keitinys $x=t^s$, čia s – trupmenų m ir n bendrasis vardiklis: $s=[m_2, n_2]$;

b) $\frac{m+1}{n}$ – sveikasis skaičius; šiuo atveju taikomas keitinys $a+bx^n=t^{p_2}$, čia p_2 – trupmenos p vardiklis;

c) $\frac{m+1}{n}+p$ – sveikasis skaičius; šiuo atveju taikomas keitinys $a+bx^n=t^{p_2}\cdot x^n$.

6) Kai pointegraliniame reiškinyje yra kvadratinė šaknis iš kvadratinio trinario $\sqrt{ax^2+bx+c}$, galima taikyti vadinamuosius Oilerio keitinius *(L. Euler, 1707–1783)*:

a) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\cdot x$, kai $a>0$;

b) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$, kai $c>0$;

c) $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t$, kai diskriminantas $D>0$,
čia x_1 – viena trinario šaknis.

Pavyzdžiai

1) Apskaičiuokime integralą $\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\cdot\sqrt{x}}=I_1$.

Pakeiskime integravimo kintamąjį pagal lygybę: $t=\sqrt[4]{x}$.
Tada

$$x=t^4, \ \mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t;$$

$$I_1=\int\frac{4t^3\mathrm{d}t}{(1+t)t^2}=4\int\frac{t}{t+1}\mathrm{d}t=4\int\frac{(t+1)-1}{t+1}\mathrm{d}t=$$

$$4\left(t-\ln|t+1|\right)+C=4\left(\sqrt[4]{x}-\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|\right)+C.$$

2) Apskaičiuokime integralą $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+2x-x^2}}=I_2$.

Kvadratiniame trinaryje išskirkime dvinario kvadratą ir tą dvinarį pažymėkime nauju kintamuoju:

$$3+2x-x^2=4-(x-1)^2=4-t^2.$$

Tada

$$I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}=\arcsin\frac{t}{2}+C=\arcsin\frac{x-1}{2}+C.$$

3) Apskaičiuokime integralą $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{5x^2-2x+1}}=I_3$.

Keitinio lygybės: $t = \dfrac{1}{x}, \quad x = \dfrac{1}{t}, \quad \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Kai $x > 0$, gauname:

$$I_3 = \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - 2t + 5}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)^2 + 4}} = -\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 + 4}} =$$

$$-\ln\left|z + \sqrt{z^2 + 4}\right| + C = -\ln\left|t - 1 + \sqrt{t^2 - 2t + 5}\right| + C =$$

$$-\ln\left|\frac{1}{x} - 1 + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 5}\right| + C = \ln\frac{x}{1 - x + \sqrt{5x^2 - 2x + 1}} + C.$$

4) Apskaičiuokime integralą $\int \dfrac{\sqrt{1 + x^3}}{x}\mathrm{d}x = I_4$.

Laikydami pointegralinę funkciją diferencialiniu binomu $x^m \cdot \left(a + bx^n\right)^p$, matome, kad $\dfrac{m+1}{n} = 0$.

Todėl taikomas keitinys $1 + x^3 = t^2$. Tada $3x^2\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$;

$$I_4 = \int \frac{\sqrt{1 + x^3} \cdot x^2}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{t^2}{t^2 - 1}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{2}{3}\int \mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{1 + x^3} + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1 + x^3} - 1}{\sqrt{1 + x^3} + 1}\right| + C.$$

5) Apskaičiuokime integralą $\int \dfrac{\sqrt{1 + x^3}}{x^2 \cdot \sqrt{x}}\mathrm{d}x = I_5$.

Laikydami pointegralinę funkciją diferencialiniu binomu $x^m \cdot \left(a + bx^n\right)^p$, matome, kad $\dfrac{m+1}{n} + p =$ 0.

Todėl taikomas keitinys $1 + x^3 = t^2 x^3$.
Iš čia gauname, kad

$$x^3 = \frac{1}{t^2 - 1}, \quad 3x^2\mathrm{d}x = \frac{-2t\mathrm{d}t}{(t^2 - 1)^2}.$$

Pointegralinį reiškinį pertvarkome taip:

$$\frac{\sqrt{1 + x^3}}{x^2 \cdot \sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{t^2 x^3}}{x^2 \cdot \sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{t}{x}\mathrm{d}x = \frac{tx^2}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\cdot\frac{t^2}{t^2 - 1}\mathrm{d}t.$$

Tada

$$I_5 = -\frac{2}{3}\int \frac{\left(t^2 - 1\right) + 1}{t^2 - 1}\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$-\frac{2}{3}\left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C.$$

Liko grįžti prie pradinio kintamojo x. Iš keitinio lygybės $1+x^3=t^2x^3$ gauname, kad $t=\dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x\sqrt{x}}$.

Todėl

$$I_5=-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^3}}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x\sqrt{x}}-1}{\dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x\sqrt{x}}+1}\right|\right)+C=$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^3}}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^3}-x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}+x\sqrt{x}}\right|\right)+C=$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^3}}{x\sqrt{x}}+\ln\left|\sqrt{1+x^3}-\sqrt{x^3}\right|\right)+C.$$

Trigonometrinių reiškinių integravimas

Integruojant trigonometrinius reiškinius, taikomi visi keturi integravimo metodai: tiesioginio integravimo, įkėlimo už diferencialo ženklo, kintamojo keitimo ir integravimo dalimis.

Pertvarkant pointegralinę funkciją, gali būti taikomos šios trigonometrinės formulės:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\quad \sin 2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};\quad \mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big);$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big);$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big).$$

Kintamojo keitimo metodas taikomas tokio tipo integraluose (R – racionalioji funkcija):

a) $\int R(\sin x)\cdot\cos x\mathrm{d}x=\int R(\sin x)\mathrm{d}\sin x$, $\sin x=t$;

b) $\int R(\cos x)\cdot\sin x\mathrm{d}x=-\int R(\cos x)\mathrm{d}\cos x$, $\cos x=t$;

c) $\int R(\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}x$, $\int R(\mathrm{tg}\,x)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int R(\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{d}(\mathrm{tg}\,x)$,

$$\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}\,,$$

$$\operatorname{tg} x = t;$$

d) $\int R(\operatorname{ctg} x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int R(\operatorname{ctg} x)\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\int R(\operatorname{ctg} x)\,\mathrm{d}(\operatorname{ctg} x)\,,$

$$\operatorname{ctg} x = t;$$

e) $\int R\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c}\,,$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \text{ (universalusis keitinys).}$$

Šiuo atveju:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,; \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}\,.$$

Pavyzdžiai

1) $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

2) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos x}\,\mathrm{d}x =$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^2 x} =$

$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - \frac{1}{\sin x} + C.$

3) $\int \sin 4x\cdot\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\sin 7x + \sin x)\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 7x}{7} - \cos x\right) + C.$

4) $\int\left(\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x\right)\mathrm{d}x = I.$ Pakeičiame integravimo kintamąjį, taikydami keitinį $\operatorname{tg} x = t.$ Tada $x = \operatorname{arctg} t,\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$

$I = \int \frac{t^3+2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int\left(t + \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C =$

$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) + C =$

$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$

5) $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\cdot\left(1-\cos^2 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\cdot\sin^2 2x\,\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{16}\int(1-\cos 2x)\cdot(1-\cos 4x)\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x - \cos 2x + \cos 4x\cdot\cos 2x)\mathrm{d}x =$

$$\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}\int(\cos 6x+\cos 2x)\mathrm{d}x\right)=$$

$$\frac{1}{16}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{\sin 2x}{2}\right)\right)+C=$$

$$\frac{1}{16\cdot 12}(12x-3\sin 4x-6\sin 2x+\sin 6x+3\sin 2x)+C=$$

$$\frac{1}{192}(12x-3\sin 4x-3\sin 2x+\sin 6x)+C.$$