Dvilypiai ir kreiviniai integralai

10. Apibrėžimas ir savybės

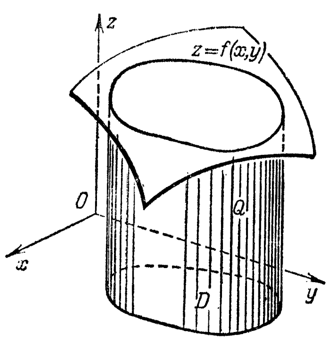
Šiame skyrelyje nagrinėjami kelių kintamųjų funkcijų integralai. Tokie integralai vadinasi daugialypiai integralai. Geometrijoje jie naudojami plotų, turių, paviršių plotų skaičiavimui, mechanikoje — plokščių figurų ir kunų masės, inercijos momentų, svorio centro skaičiavimui. Daugialypiai integralai taikomi daug plačiau nei apibrėžtiniai integralai.

Paprasčiausias iš daugialypių yra dvilypis integralas. Taigi, nagrinėjame tolydinę dviejų kintamųjų funkciją $z = f(x, y)$, apibrėžtą plokštumos xOy srityje D. Sritis D yra uždara, t. y. apribota uždara kreive L, kuri irgi priklauso sričiai D.

Apibrėžimas 10.1. Cilindroidu vadinamas kunas, kurį iš apačios riboja plokštumos xOy sritis D, iš viršaus — paviršius $z = f(x, y) \geq 0$, o iš šonų — cilindrinis paviršius su sudaromosiomis lygiagrečiomis Oz ašiai (žr. 1 pav.).

Pirmiausia sritį D suskaidome bet kokiu budu į n mažų dalių. Ir pačias dalis, ir jų plotelius žymėsime vienodai

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n.$$



Pav. 1.

Kiekvienoje iš jų parenkame po tašką P_i, $1 \le i \le n$, ir suskaičiuojame funkcijos reikšmes

$$f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n).$$

Suma

$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$$

vadinama funkcijos $z = f(x, y)$ integraline suma srityje D.

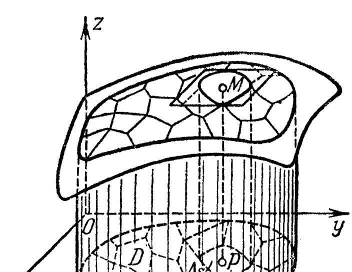
Jeigu $f(x, y) \ge 0$, tai kiekvieną sumos dėmenį galima interpretuoti kaip mažo cilindro turį, kurio pagrindo plotas Δs_i, o aukštis $f(P_i)$. Tada V_n reiškia visų n cilindrų turių sumą, kuri aproksimuoja cilindroido turį (žr. 2 pav.).

Tegu padalijimų skaičius n didėja, o ploteliai Δs_i mažėja taip, kad $\max \Delta s_i \to 0$, $n \to \infty$. Tada egzistuoja riba $\lim_{n\to\infty} V_n$, nepriklausanti nei nuo srities D padalijimo, nei nuo taškų P_i parinkimo (šis faktas įrodinėjamas platesniame aukštosios matematikos kurse). Ji vadinama funkcijos $z = f(x, y)$ dvilypiu integralu srityje D ir žymima $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ arba $\iint_D f(x, y)\, ds$, t. y.,

$$\iint_D f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i.$$

Jeigu $f(x, y) \ge 0$, tai smulkinant padalijimą, V_n tiksliau aproksimuoja kuno turį ir

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \iint_D f(x, y)\, ds.$$



Pav. 2.

Toliau suformuluosime kelias teoremas apie dvilypį integralą.

Teorema 10.1. *Dviejų funkcijų sumos dvilypis integralas srityje D yra lygus dvilypių intergalų sumai srityje D, t. y.,*

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,ds = \iint_D f(x,y)\,ds + \iint_D g(x,y)\,ds.$$

Teorema 10.2. *Pastovų daugiklį c, $c = \mathrm{const}$, galima iškelti prieš dvilypio integralo ženklą, t. y.,*

$$\iint_D cf(x,y)\,ds = c\iint_D f(x,y)\,ds.$$

Šių abiejų teiginių įrodymas lygiai toks pat, kaip ir atitinkamų teiginių įrodymas apibrėžtiniam integralui.

Teorema 10.3. *Jeigu sritis D suskaidyta į dvi sritis D_1 ir D_2, neturinčias bendrų vidinių taškų, $D = D_1 \cup D_2$, tai*

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \iint_{D_1} f(x,y)\,ds + \iint_{D_2} f(x,y)\,ds. \tag{10.1}$$

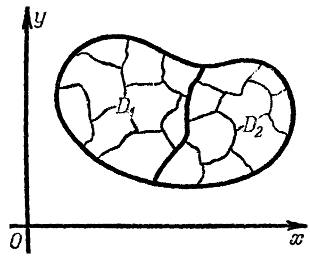
Įrodymas. Integralinę sumą srityje D galima sugrupuoti į dvi dalis. Pirmoji dalis turi dėmenis su ploteliais Δs_i, priklausančiais D_1, antroji dalis turi dėmenis su Δs_i iš srities D_2,

$$\sum_D f(P_i)\Delta s_i = \sum_{D_1} f(P_i)\Delta s_i + \sum_{D_2} f(P_i)\Delta s_i. \tag{10.2}$$

Kadangi dvilypis integralas nepriklauso nuo srities D suskaidymo, tai skaidykime taip, kad bendras konturas kartu butų plotelių Δs_i konturu (žr. 3 pav.). Skaičiuodami ribą, kai $n \to \infty$ ir $\max s_i \to 0$, kiekvienam dėmeniui atskirai, iš (10.2) gauname (10.1). $\square$

Teorema 10.4. *Tegu funkcijos $f(x,y)$ didžiausia ir mažiausia reikšmės srityje D yra atitinkamai M ir m, o S – srities plotas. Tada*

$$mS \le \iint_D f(x,y)\,ds \le MS. \tag{10.3}$$



Pav. 3.

Įrodymas. Pirmiausia įvertinkime integralinę sumą. Kadangi $m \leq f(x, y) \leq M$ ir $\sum \Delta s_i = S$, tai

$$m \sum \Delta s_i \leq \sum f(P_i)\Delta s_i \leq M \sum \Delta s_i,$$
$$mS \leq \sum f(P_i)\Delta s_i \leq MS.$$

Integralinių sumų seka yra aprėžta iš viršaus ir iš apačios. Todėl perėjus prie ribos, kai $n \to \infty$ ir $\max \Delta s_i \to 0$, gauname (10.3). □

Teorema 10.5. *Jeigu funkcija $f(x, y)$ yra tolydinė srityje D, kurios plotas S, tai srityje D egzistuoja taškas $P_0 = P_0(x_0, y_0)$ toks, kad*

$$\iint_D f(x, y)\, ds = f(P_0) \cdot S, \quad P_0 \in D.$$

Įrodymas. Iš nelygybių (10.3) gauname

$$m \leq \frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\, ds \leq M.$$

Taigi, skaičius $\frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\, ds$ patenka į intervalą $[m, M]$. Iš funkcijos tolydumo uždaroje srityje seka, kad funkcijos reikšmės užpildo visą intervalą $[m, M]$. Todėl srityje D egzistuoja taškas P_0 toks, kad

$$f(P_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\, ds$$

arba

$$\iint_D f(x, y)\, ds = f(P_0)S.$$ □

11. Dvilypio integralo skaičiavimas

Tegu cilindroido pagrindas yra stačiakampis, $D = [a, b] \times [c, d]$, o iš viršaus jį riboja paviršius $z = f(x, y)$.

Kertame kūną plokštuma $x = x_0$ ($x_0 \in [a, b]$ ir fiksuotas), lygiagrečia koordinačių plokštumai yOz. Pjuvyje gauname kreivinę trapeciją, kuri iš viršaus apribota vieno kintamojo funkcija $f(x_0, y)$, $c \leq y \leq d$ (žr. 4 pav.). Jos plotas išreiškiamas apibrėžtiniu integralu

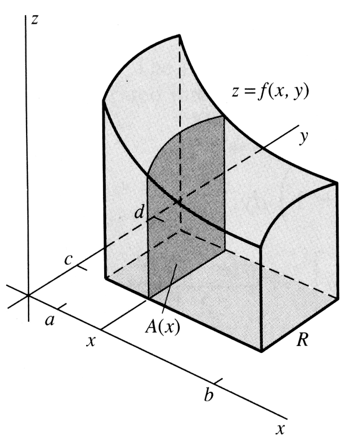
$$A(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)\, dy.$$

Kadangi x_0 yra bet kuris intervalo $[a, b]$ taškas, tai

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad a \leq x \leq b. \tag{11.1}$$

Apibrėžtiniu integralu, žinant skerspjuvio plotą $A(x)$, galima skaičiuoti kūno tūrį pagal formulę

$$V = \int_a^b A(x)\, dx. \tag{11.2}$$



Pav. 4.

Įstačius (11.1), gauname

$$V = \iint_D f(x, y)\, ds = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{11.3}$$

Skliaustai nurodo veiksmų atlikimo tvarką. Taip gaunami du vienas po kito einantys (arba vienas kitame esantys) apibrėžtiniai integralai. Kiekvienas iš jų skaičiuojamas pagal jau išdėstytas taisykles. Skliausteliuose esantis integralas vadinamas vidiniu ir skaičiuojamas pirmiau, likęs — vadinamas išoriniu ir skaičiuojamas paskiau.

Taigi, vidiniame integrale y kinta, x yra pastovus. Gauta funkcija dar kartą jau išoriniame integrale integruojama pagal x intervale $[a, b]$. Tokia operacija vadinama kartotiniu integravimu, o reiškinys — kartotiniu integralu.

Cilindroidą galima iš pradžių kirsti plokštumomis $y = y_0$, $y_0 \in [c, d]$, lygiagrečiomis xOz plokštumai. Skerspjuvyje gaunama trapecija, kurios plotas skaičiuojamas apibrėžtiniu integralu

$$B(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \quad c \le y \le d.$$

Tada visas turis, o tuo pačiu ir dvilypis integralas yra

$$V = \iint_D f(x, y)\, ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{11.4}$$

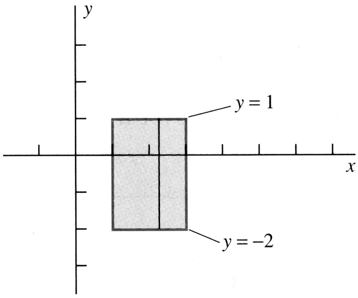
Sugretinus (11.3) ir (11.4) gaunama formulė dvilypiam integralui skaičiuoti stačiakampės srities D atveju:

$$\iint_D f(x, y)\, ds = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{11.5}$$

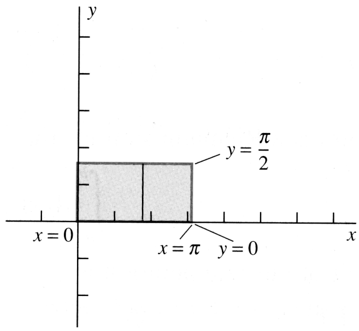
Akivaizdu, kad integravimo tvarka nesvarbi: vidiniu kintamuoju gali buti bet kuris iš dviejų funkcijos $f(x, y)$ argumentų, išoriniu — taip pat.

Pavyzdys 11.1. Suskaičiuoti dvilypį funkcijos $f(x, y) = 4x^3 + 6xy^2$ integralą I stačiakampėje srityje $D = [1, 3] \times [-2, 1]$.

Sprendimas 11.1. Sritis pavaizduota 5 pav.



Pav. 5.



Pav. 6.

Jeigu išoriniu kintamuoju pasirinksime x, tai

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \left(\int_{-2}^1 \left(4x^3 + 6xy^2\right) dy \right) dx = \int_1^3 dx \int_{-2}^1 \left(4x^3 + 6xy^2\right) dy \\
&= \int_1^3 \left(4x^3 y + 2xy^3\right)\Big|_{y=-2}^1 dy = \int_1^3 \left(\left(4x^3 + 2x\right) - \left(-8x^3 - 16x\right)\right) dx \\
&= \int_1^3 \left(12x^3 + 18x\right) dx = \left(3x^4 + 9x^2\right)\Big|_1^3 = 312.
\end{aligned}$$

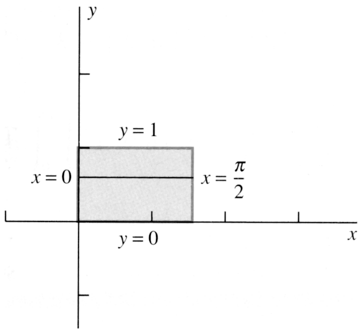
Sukeitus integravimo tvarką, išoriniu kintamuoju laikysime y. Gauname

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^1 \left(\int_1^3 \left(4x^3 + 6xy^2\right) dx \right) dy = \int_{-2}^1 dy \int_1^3 \left(4x^3 + 6xy^2\right) dx \\
&= \int_{-2}^1 \left(x^4 + 3x^2 y^2\right)\Big|_{x=1}^3 dy = \int_{-2}^1 \left(\left(81 + 27y^2\right) - \left(1 + 3y^2\right)\right) dy \\
&= \int_{-2}^1 \left(80 + 24y^2\right) dy = \left(80y + 8y^3\right)\Big|_{-2}^1 = 312.
\end{aligned}$$

Pavyzdys 11.2. Suskaičiuoti dvilypį integralą $I = \iint_D \cos x \cos y \, dx \, dy$. Integravimo sritis D pavaizduota 6 pav.

Sprendimas 11.2.

$$I = \iint_D \cos x \cos y \, dx \, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos y \, dy$$



Pav. 7.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \cos x \, dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy \\
&= \sin x \big|_0^{\pi} \cdot \sin y \big|_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Pavyzdys 11.3. Suskaičiuoti funkcijos $f(x, y) = \mathrm{e}^y + \sin x$ dvilypį integralą srityje D (žr. 7 pav.).

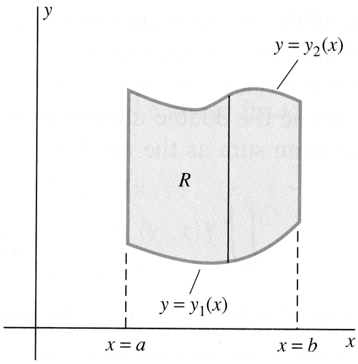
Sprendimas 11.3.

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (\mathrm{e}^y + \sin x) \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{e}^y + \sin x) \, dx \\
&= \int_0^1 dy \big(x\mathrm{e}^y - \cos x\big)\big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^y + 1\right) dy \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^y + y\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e} - 1) + 1.
\end{aligned}
$$

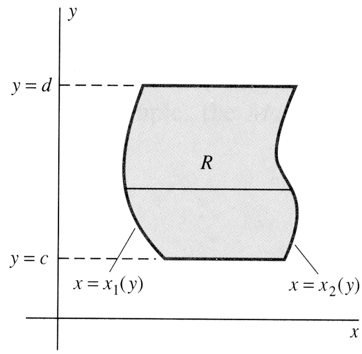
Tegu integravimo sritis D yra apribota tiesėmis, lygiagrečiomis Oy ašiai — $x = a$, $x = b$ — ir dviejų funkcijų $y = y_1(x)$ ir $y = y_2(x)$ grafikais.

Kaip ir anksčiau, kuną pjausime plokštuma $x = x_0$. Tada funkcijos $f(x_0, y)$ antrasis argumentas kinta nuo $y_1(x_0)$ iki $y_2(x_0)$ (žr. 8 pav.). Taip pjuvyje gaunama kreivinė trapecija, iš viršaus ribojama

$$
f(x_0, y), \quad y_1(x_0) \le y \le y_2(x_0).
$$



Pav. 8.



Pav. 9.

Jos plotas yra $A(x_0) = \int_{y_1(x_0)}^{y_2(x_0)} f(x_0 y)\,dy$. Imdami bet kurį x_0, $x_0 \in [a, b]$, ir panaudoję formulę turiui skaičiuoti, gauname

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y)\,ds = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \end{aligned}$$

Tegu integravimo sritis D yra apribota tiesėmis, lygiagrečiomis Ox ašiai — $y = c$, $y = d$ — ir dviejų funkcijų $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$ grafikais (žr. 9 pav.).

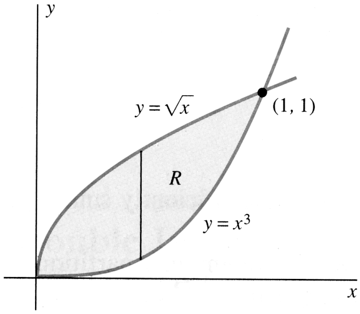
Tada analogiškai gauname

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y)\,ds = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx \right) dy \\ &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \end{aligned}$$

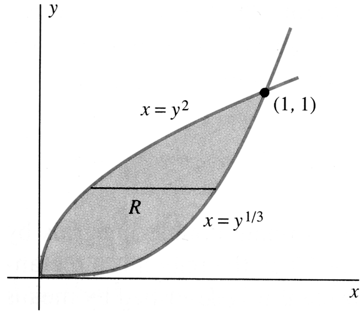
Pavyzdys 11.4. Suskaičiuoti dvilypį integralą

$$\iint_D xy^2\,ds$$

srityje, apribotoje kreivėmis $y = \sqrt{x}$ ir $y = x^3$ (pirmas ketvirtis).



Pav. 10.



Pav. 11.

Sprendimas 11.4. Pirmiausia yra braižoma integravimo sritis D. Tada galima pasirinkti integravimo tvarką, t. y., kurį kintamąjį laikyti vidiniu, o kurį išoriniu. Šį pavyzdį suskaičiuosime abiem budais.

Suprojektuojame sritį D į Ox ašį (žr. 10 pav.). Gautas intervalas $[0, 1]$ yra išorinio kintamojo x kitimo ribos. Taigi,

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy = \int_0^1 dx \left(\frac{1}{3}xy^3\right)\Bigg|_{y=x^3}^{\sqrt{x}}$$

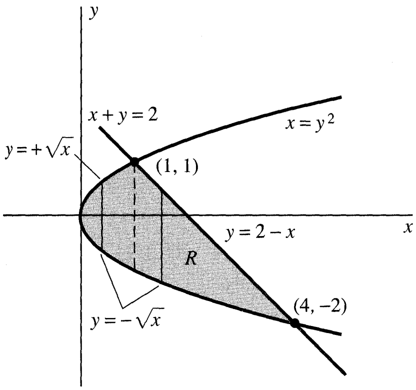
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^{10}\right) dx = \frac{2}{21} - \frac{1}{33} = \frac{5}{77}.$$

Dabar sukeisime kintamuosius x ir y vaidmenimis. Tos pačios sritį D ribojančios kreivės aprašomos lygtimis $x = y^2$ ir $x = y^{\frac{1}{3}}$. Projektuodami į Oy ašį, gauname $y \in [0, 1]$ (žr. 11 pav.). Tai išorinio kintamojo kitimo ribos. Vidiniu kintamuoju lieka x. Taigi, gauname

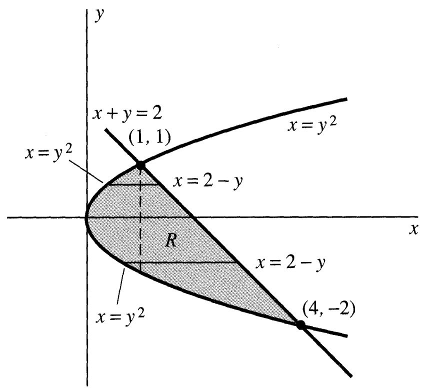
$$\iint_D f(x,y)\,ds = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y^{\frac{1}{3}}} xy^2\,dx = \int_0^1 dy \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_{x=y^2}^{y^{1/3}}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^{\frac{8}{3}} - \frac{1}{2}y^6\right) dy = \frac{3}{22} - \frac{1}{14} = \frac{5}{77}.$$

Pavyzdys 11.5. Suintegruoti $\iint_D (6x + 2y^2)\,ds$, kai sritis D ribojama parabole $x = y^2$ ir tiese $x + y = 2$.



Pav. 12.



Pav. 13.

Sprendimas 11.5. Iš tikrųjų dvilypį integralą keičiant kartotiniu integravimo tvarka nesvarbi. Norint sritį D suprojektuoti į koordinačių ašis, reikia rasti kreivių susikirtimo taškus. Todėl sprendžiame sistemą

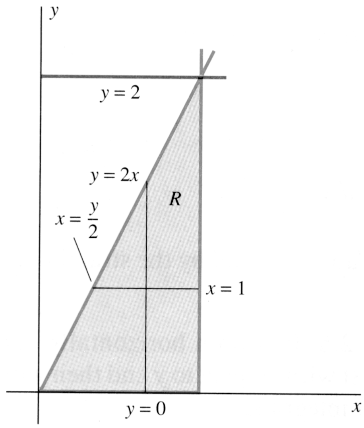
$$\begin{cases} x = y^2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Kreivės kertasi dviejuose taškuose $(1, 1)$ ir $(4, -2)$. Projektuojant į Ox ašį gaunami du intervalai $[0, 1]$ ir $[1, 4]$. Taip yra todėl, kad iš viršaus sritį ribojanti kreivė taške $(1, 1)$ keičia analizinę išraišką. Viršutinė kreivė yra $y = \sqrt{x}$ intervale $x \in [0, 1]$ ir $y = 2 - x$ intervale $x \in [1, 4]$. Dvilypis integralas keičiamas dviem kartotiniais

$$\iint_D f(x, y)\, ds = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy + \int_1^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} f(x, y)\, dy.$$

Iš kitos pusės, projektuojant sritį D į Oy ašį gaunamas tik vienas intervalas $y \in [-2, 1]$ ir tik vienas kartotinis integralas (žr. 13 pav.). Todėl šis pasirinkimas reikalauja mažiau skaičiavimų ir yra patogesnis. Skaičiuojame

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(6x + 2y^2\right) ds &= \int_{-2}^{1} dy \int_{y^2}^{2-y} \left(6x + 2y^2\right) dx \\
&= \int_{-2}^{1} dy \left(3x^2 + 2xy^2\right)\Big|_{x=y^2}^{2-y} \\
&= \int_{-2}^{1} \left(3(2-y)^2 + 2(2-y)y^2 - 3\left(y^2\right)^2 - 2y^4\right) dy
\end{aligned}$$



Pav. 14.

$$= \int_{-2}^{1} \left(12 - 12y + 7y^2 - 2y^3 - 5y^4\right) dy$$

$$= \left(12y - 6y^2 + \frac{7}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4 - y^5\right)\Bigg|_{y=-2}^{1} = \frac{99}{2}.$$

Šis pavyzdys rodo, kaip integravimo tvarkos pasirinkimas kartotiniame integrale priklauso nuo srities D formos. Tik nubraižius brėžinį paaiškėja, kuris kelias patogesnis ir trumpesnis. Todėl (kartojame!) brėžinys yra butinas.

Kitas pavyzdys rodo, kad integravimo tvarkos pasirinkimas priklauso nuo integruojamos funkcijos $z = f(x, y)$.

Pavyzdys 11.6. Suskaičiuoti

$$\iint_D y e^{x^3}\, dx\, dy$$

trikampėje srityje D, ribojamoje tiesėmis $y = 0$ (Ox ašis), $x = 1$ (tiesė lygiagreti Oy ašiai) ir $y = 2x$ (žr. 14 pav.).

Sprendimas 11.6. Vidiniu kintamuoju negali buti x, nes $\int e^{x^3}\, dx$ nesuintegruojamas baigtiniu pavidalu elementariomis funkcijomis. Todėl pasirinkimo nebelieka. Sritį D projektuojame į Ox ašį. Tai reiškia, kad x tampa išoriniu kintamuoju, o y —

vidiniu. Gauname

$$\iint_D ye^{x^3}\,ds = \int_0^1 dx \int_0^2 ye^{x^3}\,dy = \int_0^1 dx \left(\frac{1}{2}y^2 e^{x^3}\right)\Bigg|_{y=0}^{2x}$$
$$= \int_0^1 2x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 e^{x^3}\,d\left(x^3\right)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(e-1).$$

12. Plotų ir turių skaičiavimas dvilypiu integralu

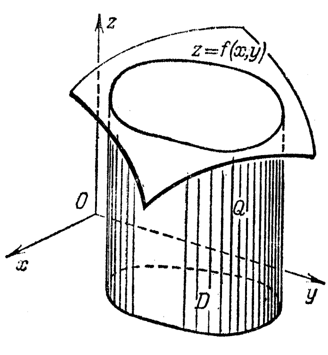
Dvilypis integralas apibrėžiamas kaip tam tikrų integralinių sumų V_n sekos riba. Nei su kunu, nei su jo turiu apibrėžimas nesusijęs. Iš kitos pusės dalinės sumos turi aiškią geometrinę interpretaciją. Tai cilindroido turio aproksimacija mažais "laiptuotais" cilindrais. Kai $n \to \infty$, tai $\lim_{n\to\infty} V_n = V$. Taip gaunama cilindroido turio formulė

$$V = \iint_D f(x, y)\,ds.$$

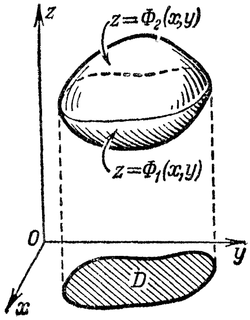
Nagrinėjame cilindroidą, apribotą iš viršaus paviršiumi $z = f(x, y) \geq 0$, ir su pagrindu D plokštumoje xOy (žr. 15 pav.). Tada

$$V = \iint_D f(x, y)\,ds. \tag{12.1}$$

Nagrinėjame kuną, kurį iš apačios riboja paviršius $z = z_1(x, y)$, iš viršaus kitas paviršius $z = z_2(x, y)$, o sritis D — jų abiejų bendra projekcija plokštumoje xOy



Pav. 15.



Pav. 16.

(žr. 16 pav.). Tokį kuną galima išreikšti dviem cilindroidais, o jo turį — dviejų cilindroidų turių skirtumu, t. y.,

$$V=\iint_D z_2(x,y)\,ds-\iint_D z_1(x,y)\,ds=\iint_D (z_2(x,y)-z_1(x,y))\,ds. \tag{12.2}$$

Ši formulė kuno turiui skaičiuoti teisinga ir tada, kai funkcijos $z_1(x,y)$ ir $z_2(x,y)$ yra bet kokio ženklo, tačiau tenkina nelygybę

$$z_2(x,y)\geq z_1(x,y).$$

Jeigu srityje D funkcija $z=f(x,y)$ keičia ženklą, tai sritį dalijame į dvi dalis, $D=D_1\cup D_2$. Tegu $f(x,y)\geq 0$, kai $(x,y)\in D_1$, ir $f(x,y)\leq 0$, kai $(x,y)\in D_2$. Tuo pačiu kunas padalinamas į dvi dalis. Kiekvienai iš jų turiui skaičiuoti taikoma formulė (12.1). Primename, kad xOy plokštuma aprašoma lygtimi $z=0$. Vienu atveju plokštuma xOy yra apatinis paviršius, kitu atveju — viršutinis paviršius.

Kai $f(x,y)\equiv 1$ visoje srityje D, tai cilindroidas virsta cilindru (nebutinai sukimosi cilindru), o cilindroido turis skaitine reikšme sutampa su srities D plotu S, t. y.,

$$S=\iint_D 1\,ds=\iint_D ds.$$

Šią formulę galima gauti betarpiškai iš integralinių sumų, nes

$$V_n=\sum f(P_i)\Delta s_i=\sum 1\cdot\Delta s_i=\sum \Delta s_i=S.$$

Pavyzdys 12.1. Dvilypiu integralu suskaičiuoti srities $D \subset xOy$ plotą, kai sritis ribojama parabole $y = x^2 - 2x$ ir pirmo ketvirčio pusiaukampine $y = x$ (žr. 17 pav.).

Sprendimas 12.1. Kreivių susikirtimo taškai ieškomi sprendžiant sistemą

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x. \end{cases}$$

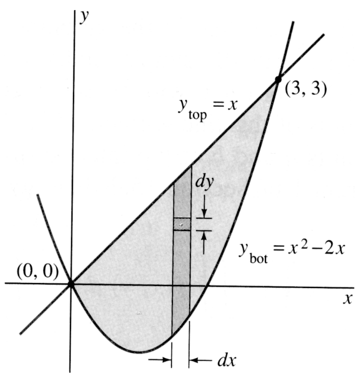
Todėl srities projekcija Ox ašyje yra intervalas $[0, 3]$. Tai išorinio kintamojo x kitimo ribos. Vidinis kintamasis yra y. Jis kinta nuo parabolės iki tiesės. Gauname

$$\begin{aligned} S &= \iint_D 1\,ds = \int_0^3 dx \int_{y=x^2-2x}^{x} dy = \int_0^3 y|_{y=x^2-2x}^{x}\,dx \\ &= \int_0^3 \left(3x - x^2\right) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

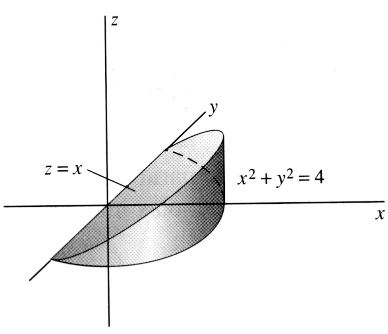
Pavyzdys 12.2. Rasti tūrį kūno, esančio tarp plokštumų xOy ir $z = x$ (lygiagreti Oy ašiai) ir apriboto iš šonų cilindru $x^2 + y^2 = 4$ (žr. 18 pav.).

Sprendimas 12.2. Kūno pagrindas (projekcija) plokštumoje xOy yra pusė skritulio. Dėl kūno simetrijos skaičiuosime pusę tūrio: $V = 2 \cdot V_{\text{pusė}}$. Integravimui pasirenkame skritulio dalį D_1, esančią pirmame ketvirtyje (žr. 19 pav.):

$$V = \iint_D z(x, y)\,ds = 2\iint_{D_1} z(x, y)\,ds = 2\int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,dx$$



Pav. 17.



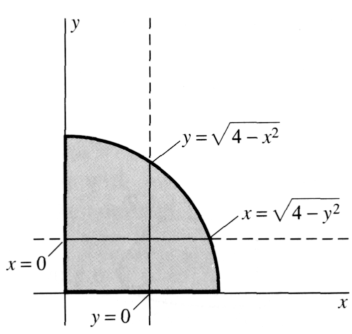
Pav. 18.

$$= 2\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^2 \left(4-y^2\right) dy = \left(4y - \frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

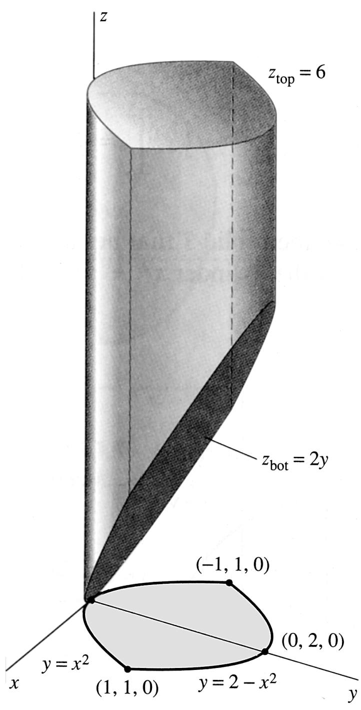
Pavyzdys 12.3. Rasti tūrį kūno, esančio tarp dviejų plokštumų $z = 6$ ir $z = 2y$ ir iš šonų apriboto dviem paraboliniais cilindrais $y = x^2$ ir $y = 2 - x^2$ (žr. 20 pav.).

Sprendimas 12.3. Kūno projekcija D yra plokštumoje xOy ir yra ribojama parabolėmis $y = x^2$ ir $y = 2 - x^2$ (žr. 21 pav.). Išoriniu kintamuoju pasirenkame x, priešingu atveju reikėtų dviejų kartotinių integralų. Išnaudojame kūno simetriją ir gauname

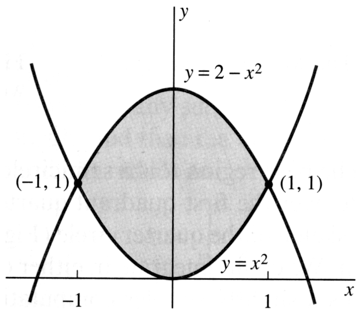
$$V = \iint_D \left(z_2(x,y) - z_1(x,y)\right) ds = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2-x^2} (6-2y)\, dy$$



Pav. 19.



Pav. 20.



Pav. 21.

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} (6-2y)\,dy = 2\int_0^1 \left(6y-y^2\right)\Big|_{y=x^2}^{2-x^2} dx \\
&= 2\int_0^1 \left(6\left(2-x^2\right)-\left(2-x^2\right)^2-\left(6x^2-x^4\right)\right) dx \\
&= 2\int_0^1 \left(8-8x^2\right) dx = 16\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

13. Dvilypis integralas polinėse koordinatėse

Nagrinėkime polinėje koordinačių sistemoje (r,θ) plokštumos taškų sritį D, apribotą dviem spinduliais $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ ir kreivėmis $r=f_1(\theta)$, $r=f_2(\theta)$. Tegu sritis yra taisyklinga, t. y., bet kuris spindulys, išeinantis iš poliaus P ir einantis per vidinį srities tašką, kerta srities konturą ne daugiau kaip dviejuose taškuose. Priešingu ateju sritį butų galima padalinti į kelias taisyklingas sritis. Todėl šis reikalavimas nesiaurina bendrumo.

Tarkime, kad srityje D apibrėžta tolydinė funkcija $z=F(r,\theta)$. Kaip ir stačiakampių koordinačių atveju, dvilypio integralo apibrėžimui atliekami standartiniai veiksmai.

Pirma, sritis bet kokiu budu skaidoma į n mažų dalių

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n.$$

Antra, jose laisvai parenkami taškai $P_i = P_i(r_i,\theta_i)$ ir suskaičiuojamos funkcijos reikšmės $F(P_i), i = 1 \dots n$. Trečia, sudaroma integralinė suma

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} F(P_k)\Delta s_k.$$

Iš dvilypio integralo egzistavimo teoremos seka, kad integralinė suma turi ribą, kai $n \to \infty$ ir $\max \Delta s_k \to 0$, nepriklausančią nei nuo suskaidymo, nei nuo taškų P_i parinkimo. Ši riba yra funkcijos $F(r, \theta)$ dvilypis integralas srityje D, t. y.,

$$V = \lim V_n = \lim \sum F(P_k)\Delta s_k = \iint_D F(r, \theta)\, ds.$$

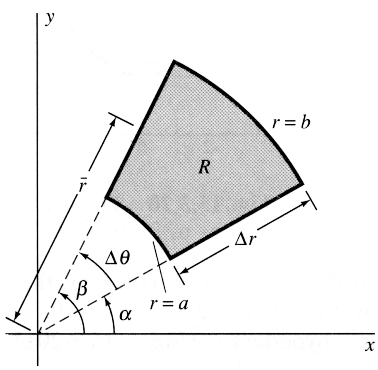
Toliau nagrinėsime dvilypio integralo skaičiavimą polinėse koordinatėse. Iš pradžių imame taip vadinamą polinį stačiakampį, t. y., sritį D aprašytą nelygybėmis (žr. 22 pav.)

$$a \le r \le b, \quad \alpha \le \theta \le \beta.$$

Vieną iš šių kraštinių santykinai galime vadinti ilgiu, kitą — pločiu. Kai $0 < a < b$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, polinis stačiakampis virsta žiedu su vidiniu spinduliu a, o išoriniu b.

Primename, kad skritulio išpjovos su spinduliu r ir centriniu kampu θ plotas gaunamas pagal formulę

$$S_{\text{išp}} = \frac{1}{2} r^2 \theta.$$



Pav. 22.

Naudodami šią formulę, gauname srities D plotą

$$S = \frac{1}{2}b^2(\beta-\alpha) - \frac{1}{2}a^2(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}(b+a)(b-a)(\beta-\alpha) = r^*\Delta r\,\Delta\theta,$$

čia $\Delta r = b-a$, $\Delta\theta = \beta-\alpha$, o $r^* = \frac{1}{2}(a+b)$ yra polinio stačiakampio vidutinis spindulys.

Kadangi dvilypis integralas nepriklauso nuo srities padalijimo, tai dalinkime sritį į lygias dalis koncentriškais apskritimais

$$a = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_m = b, \quad \Delta r = \Delta r_i = r_i - r_{i-1} = \frac{1}{m}(b-a),$$

ir spinduliais

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_k = \beta, \quad \Delta\theta = \Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1} = \frac{1}{k}(\beta-\alpha).$$

Iš viso gauname $m\cdot k = n$ vienodų polinių stačiakampių Δs_i, kurių plotai yra

$$\Delta s_i = r_i^*\Delta r\,\Delta\theta, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Todėl integralinė suma yra

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} F(P_i)\cdot\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} F(r_i^*,\theta_i^*)r_i^*\Delta r\,\Delta\theta = \sum_{i=1}^{n} G(r_i^*,\theta_i^*)\Delta r\,\Delta\theta,$$

čia $G(r,\theta) = F(r,\theta)r$.

Paskutinioji suma yra funkcijos $G(r,\theta)$ integralinė suma. Todėl, kai $n\to\infty$ ir $\max\Delta s_i \to 0$, ji virsta dvilypiu integralu

$$\iint_D F(r,\theta)\,ds = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b F(r,\theta)r\,dr\right)d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_a^b F(r,\theta)r\,dr.$$

Einant nuo stačiakampių prie polinių koordinačių, būtų galima daryti formalų kintamųjų pakeitimą

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad ds = r\,dr\,d\theta.$$

su rėžiais $a\le r\le b, \alpha\le\theta\le\beta$. Čia "mažo" stačiakampio ds plotas gaunamas kaip ilgio ir pločio sandauga

$$\iint_D f(x,y)\,ds = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta. \tag{13.1}$$

Integruoti polinėse koordinatėse ypač patogu, kai integravimo sritis yra skritulys arba jo dalis arba kai pointegralinė funkcija priklauso nuo x^2+y^2.

Pavyzdys 13.1. Kunas iš apačios yra apribotas xOy plokštuma, o iš viršaus — sukimosi paraboloidu $z=25-x^2-y^2$. Rasti kuno turį.

Sprendimas 13.1. Kuno projekcija xOy plokštumoje yra skritulys $x^2+y^2=25$. Dėl kuno simetrijos, galima skaičiuoti ketvirtadalį turio ir gautą rezultatą dauginti iš 4. Taigi:

$$V=4V_1=4\iint_D \left(25-x^2-y^2\right)ds=4\int_0^5 dx\int_0^{\sqrt{25-x^2}}\left(25-x^2-y^2\right)dy.$$

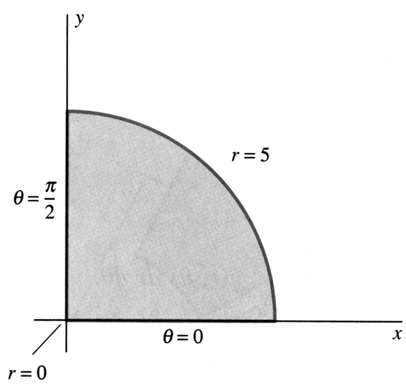
Vidinį integralą pagal y nesunku suintegruoti. Sustatę rėžius, susiduriame su iracionalių funkcijų integralais

$$\int\sqrt{25-x^2}\,dx,\qquad \int x^2\sqrt{25-x^2}\,dx,\qquad \int(25-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Jiems suintegruoti reikia gana sudėtingų trigonometrinių pakeitimų (žr. **??** skyrių).

Perėjus prie polinių koordinačių, integravimo sritis užrašoma paprasčiau. Pirmas skritulio ketvirtis (žr. 23 pav.) aprašomas nelygybėmis

$$0\le r\le 5\quad \text{ir}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$



Pav. 23.

Čia abiejų kintamųjų kitimo ribos yra pastovus dydžiai (o ne funkcijos), todėl yra patogi bet kuri integravimo tvarka.

Pointegralinė funkcija supaprastėja, nes

$$x^2 + y^2 = (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2.$$

Pagaliau gauname

$$\begin{aligned} V &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^5 \left(25 - r^2\right) r\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{25}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^5 \\ &= 4 \cdot \frac{625}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{625\pi}{2}. \end{aligned}$$

Bendru atveju taisyklinga sritis polinėse koordinatėse aprašoma nelygybėmis

$$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \quad \text{ir} \quad \alpha \le \theta \le \beta.$$

Todėl dvilypis integralas paverčiamas kartotiniu

$$\iint_D F(r,\theta)\,ds = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} F(r,\theta) r\,dr.$$

Pirmiausia integruojama pagal r, jis kinta spindulio didėjimo kryptimi nuo vidinio konturo grafiko $r = r_1(\theta)$ (žiurint iš poliaus) iki išorinio, t. y., $r = r_2(\theta)$.

Išorinis kintamasis yra kampas θ. Jis apeinamas teigiama kryptimi, t. y. prieš laikrodžio rodyklę.

Kai $f(x,y) \equiv 1$ visoje srityje D, tai analogiškai stačiakampėms koordinatėms gauname formulę plotui skaičiuoti

$$S = \iint_D r\,dr\,d\theta.$$

Pavyzdys 13.2. Kunas iš apačios yra apribotas sukimosi paraboloidu $z_1 = x^2 + y^2$ (šakos aukštyn), o iš viršaus — sukimosi paraboloidu $z_2 = 8 - x^2 - y^2$ (šakos žemyn). Rasti kuno turį.

Sprendimas 13.2. Abudu paviršiai kertasi kreive, kuri randama sprendžiant sistemą

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 8 - x^2 - y^2. \end{cases}$$

Išeliminavus kintamajį z, gaunamas apskritimas $x^2+y^2=4$, su centru $(0,0)$ ir spinduliu 2. Todėl kuno projekcija horizontalioje xOy plokštumoje, o tuo pačiu ir integravimo sritis D, yra skritulys $x^2+y^2\le 4$.

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (z_2-z_1)\,ds = \iint_D \left(8-r^2-r^2\right) ds \\
&= \iint_D \left(8-2r^2\right) r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(8r-2r^3\right) dr \\
&= 2\pi\left(4r^2-\frac{1}{2}r^4\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2} = 16\pi.
\end{aligned}$$

14. Cilindrinės ir sferinės koordinatės

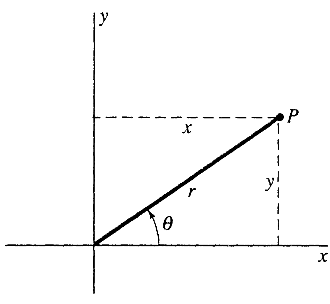
Stačiakampės koordinatės yra vienas iš kelių budų taškams, kreivėms, paviršiams aprašyti. Šiame skyrelyje ketiname supažindinti su dviem koordinačių sistemomis trimatėje erdvėje — cilindrinėmis ir sferinėmis koordinatėmis. Kiekviena iš jų yra savotiškas polinių koordinačių plokštumoje apibendrinimas.

Primename, kad ryšys tarp taško P stačiakampių koordinačių (x,y) ir polinių (r,θ) plokštumoje yra išreiškiamas lygybėmis (žr. pav. 24)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{14.1}$$

ir

$$r^2 = x^2+y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \text{kai } x \neq 0. \tag{14.2}$$



Pav. 24.

14.1. Cilindrinės koordinatės

Taško P cilindrinės koordinatės (r, θ, z) erdvėje yra naturalus polinių ir stačiakampių koordinačių "hibridas" (žr. pav. 25). Čia taško P projekcijos Q padėtis yra aprašoma dviem polinėmis, o jo atstumas iki horizontalios xOy plokštumos yra z. Taip gaunamos taško P cilindrinės koordinatės (r, θ, z). Jų ryšys su stačiakampėmis seka iš (14.1) ir (14.2) prijungus prie jų tapatybę $z = z$. Taigi,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z, \tag{14.3}$$

ir

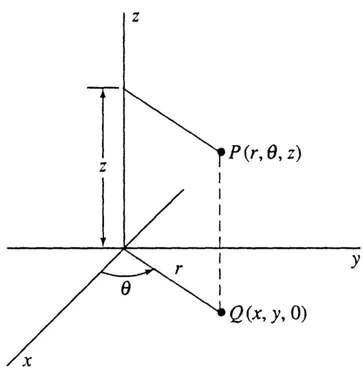
$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad z = z. \tag{14.4}$$

Keli stačiakampių ir polinių koordinačių atitinkamybės pavyzdžiai parodyti lentelėje 1.

Naudojant cilindrines koordinates, kai kurie paviršiai erdvėje aprašomi labai paprastomis lygtimis. Pvz., lygtis $r = c$ ($c = \text{const}$) aprašo sukimosi cilindrą apie Oz ašį su spinduliu c.

Cilindrinės koordinatės tinka ir kitiems sukimosi paviršiams. Pavyzdžiui, sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ir sukimosi kugis $z^2 = x^2 + y^2$ cilindrinėmis koordinatėse aprašomi lygtimis $r^2 + z^2 = a^2$ ir $z^2 = r^2$.

Jeigu yOz plokštumoje esanti kreivė $f(y, z) = 0$ sukama apie Oz ašį, tai gautasis sukimosi paviršius aprašomas lygtimi $f(r, z) = 0$ jau cilindrinėse koordinatėse.



Pav. 25.

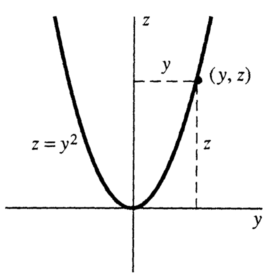
Lentelė 1
Stačiakampių ir cilindrinių
koordinačių atitinkamybė

(x, y, x)	(r, θ, z)
$(1, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$
$(-1, 0, 0)$	$(1, \pi, 0)$
$(0, 2, 3)$	$(2, \frac{\pi}{2}, 3)$
$(1, 1, 2)$	$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 2)$
$(1, -1, 2)$	$(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 2)$
$(-1, 1, 2)$	$(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 2)$
$(-1, -1, -2)$	$(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}, -2)$
$(0, -3, -3)$	$(3, \frac{3\pi}{2}, -3)$

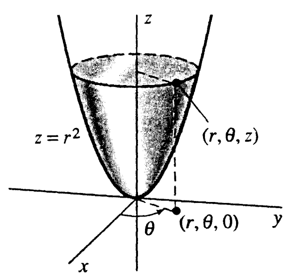
Pavyzdys 14.1. Parabolė $z = y^2$, esanti yOz plokštumoje, sukama apie Oz ašį. Taip gaunamas sukimosi paraboloidas su lygtimi $z = r^2$ (žr. pav. 26 ir pav. 27).

Pavyzdys 14.2. Elipsė $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ sukama apie Oz ašį. Taip gautas paviršius vadinamas sukimosi elipsoidu (žr. pav. 28 ir pav. 29). Jo lygtis cilindrinėse koordinatėse yra

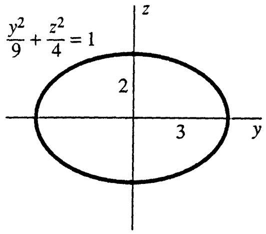
$$\frac{r^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$



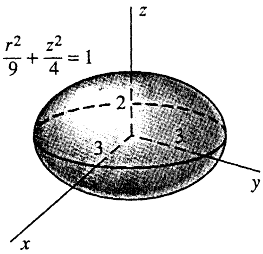
Pav. 26.



Pav. 27.



Pav. 28.



Pav. 29.

14.2. Sferinės koordinatės

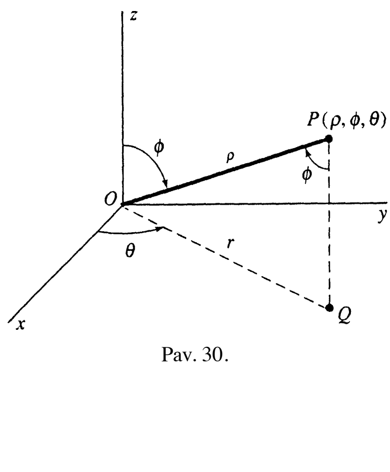
Paveiksle 30 parodytos sferinės koordinatės.

Pirmoji sferinė koordinatė r yra tiesiog atstumas $\rho = |OP|$ nuo koordinačių pradžios taško O iki P. Antroji sferinė koordinatė ϕ yra kampas tarp OP ir Oz ašies teigiamos pusės, todėl jo kitimo ribos yra intervalas $[0, \pi]$. Pagaliau kampas θ toks pat kaip cilindrinėse arba polinėse koordinatėse, t.y. tarp OQ ir Ox ašies teigiamos pusės. Todėl θ kitimo ribos yra intervalas $[0, 2\pi]$. Abu kampai ϕ ir θ matuojami radianais.

Ryšys tarp stačiakampių ir sferinių koordinačių gaunamas iš stataus trikampio OPQ ir (14.1). Stačiakampių ir sferinių koordinačių atitinkamybės pavyzdžiai parodyti lentelėje 2.

Taigi:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\phi. \end{aligned} \tag{14.5}$$



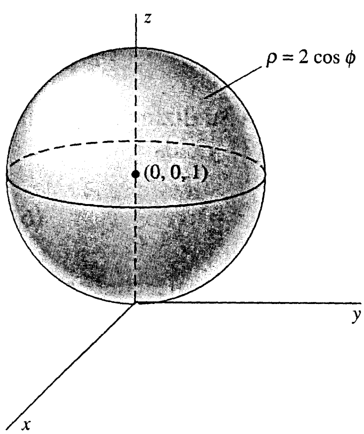
Pav. 30.

Lentelė 2
Stačiakampių ir sferinių koordinačių atitinkamybė

(x, y, x)	(ρ, ϕ, θ)
$(1, 0, 0)$	$(1, \frac{\pi}{2}, 0)$
$(0, 1, 0)$	$(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$(0, 0, 1)$	$(1, 0, 0)$
$(0, 0, -1)$	$(1, \pi, 0)$
$(1, 1, \sqrt{2})$	$(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
$(-1, -1, \sqrt{2})$	$(2, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$
$(1, -1, -\sqrt{2})$	$(2, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$

Sferinių koordinačių pavadinimas susijęs su sfera, o tiksliau — su sferiniu paviršiumi. Mat, jo lygtis yra $\rho = c$ ($c = \text{const}$). Ką aprašo kitos paprasčiausios sferinės lygtys? Pavyzdžiui, lygtis $\phi = c$ ($c = \text{const}$) aprašo begalinį kugį. Jeigu $0 < c < \frac{\pi}{2}$, tai gauname kugį, esantį virš horizontalios xOy plokštumos. Jeigu $\frac{\pi}{2} < c < \pi$, tai kugis yra žemiau xOy plokštumos. Lygtis $\phi = \frac{\pi}{2}$ aprašo xOy plokštumą.

Panagrinėkime lygtį $\rho = 2\cos\phi$. Čia $\cos\phi \geq 0$, todėl $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Tai reiškia, kad



Pav. 31.

paviršius yra virš xOy plokštumos. Abi lygties puses dauginame iš ρ, gauname

$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$

arba panaudojus (14.1) ir (14.2)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

stačiakampėse koordinatėse. Išskyrę pilną kvadratą turime standartinę sferos lygtį

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

su centru $(0, 0, 1)$ ir spinduliu $R = 1$ (žr. pav. 31).

Analogiškai sferinė lygtis $\rho = 2\sin\phi\sin\theta$ stačiakampėse koordinatėse pavirsta gerai žinoma standartine lygtimi

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1.$$

Ši lygtis aprašo sferą su centru $(0, 1, 0)$ ir spinduliu $R = 1$.