Apibrėžtinio integralo taikymas

1. Figūros ploto apskaičiavimas stačiakampėje koordinačių sistemoje

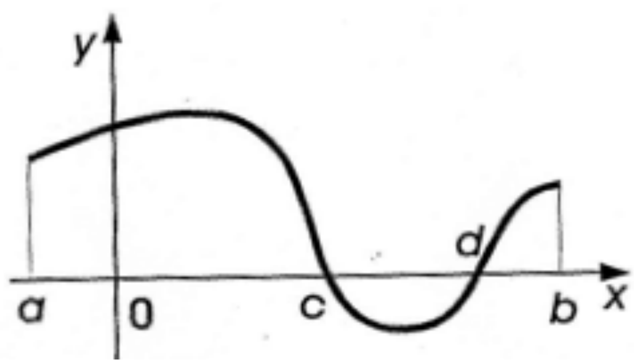
Kreivinės trapecijos, apribotos funkcijos $f(x) \geq 0$ grafiko, absicių ašies ir tiesių $x = a$ bei $x = b$, plotas lygus

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Jeigu $f(x) \leq 0$ atkarpoje $[a; b]$, tai $S = \int_a^b f(x)dx \leq 0$, tačiau jo modulis lygus figūros plotui. Todėl

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Kai f(x) atkarpoje $[a; b]$ kelis kartus keičia ženklą (1.1 pav.), tai atkarpą $[a; b]$ išskaidomi į atkarpas $[a; c]$, $[c; d]$, $[d; b]$ ir apskaičiuojame kiekvienos dalies plotą. Įvertinę integralų ženklus, gauname:



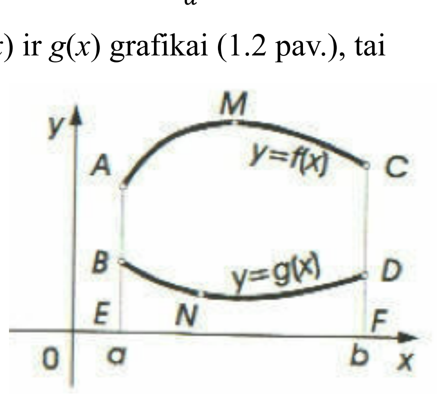
1.1 pav.

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

Arba trumpiau :

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Jei figūra riboja dviejų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikai (1.2 pav.), tai



1.2 pav.

$$S = S_{\text{EAMCF}} - S_{\text{EBNDF}} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

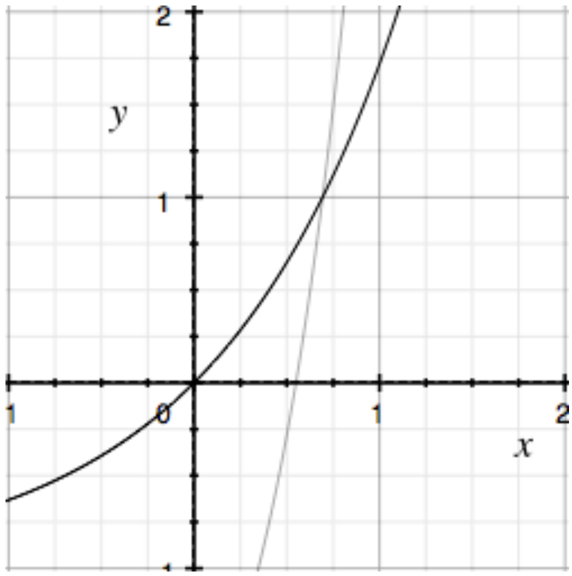
1.1 pavyzdys. Suskaičiuoti figūros, apribotos kreivių y = $e^x - 1$, y = $e^{2x} - 3$, $x = 0$, plotą.

Sprendimas.

$$\begin{cases} y = e^x - 1 \\ y = e^{2x} - 3 \end{cases} \Rightarrow \quad e^{2x} - e^x - 2 = 0\,; \quad e^x = a > 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0, \qquad a_1 = 2\,, \qquad a_2 = -1\ (netinka)$$

$$e^x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = ln2\ , \quad y = 1$$



1.3 pav.

$$x = 0: \ e^0 = 1,$$

$$y_1(0) = e^x - 1 = 0,$$

$$y_2(0) = e^{2x} - 3 = -2.$$

$$S = \int_0^{ln2} (e^x - 1 - e^{2x} + 3)dx = \left(e^x - \frac{1}{2}e^{2x} + 2x\right)\Big|_0^{Ln2} =$$

$$= e^{ln2} - \frac{1}{2}e^{2ln2} + 2ln2 - 1 + \frac{1}{2} =$$

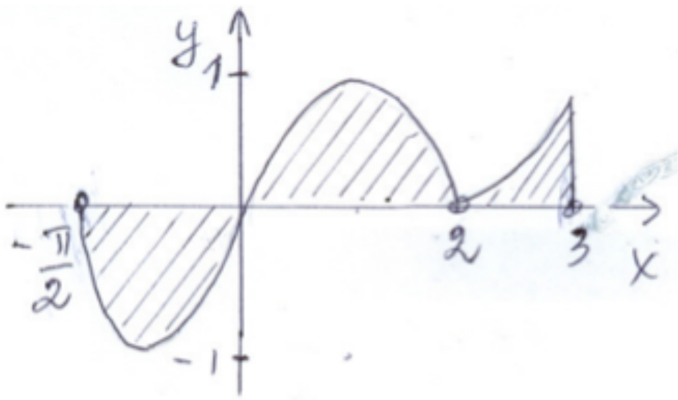
$$= 2ln2 - \frac{1}{2} \approx 0.866.$$

Atsakymas: $S \approx 0.866.$ ■

1.2 pavyzdys. Suskaičiuoti plotą, apribotą kreive

$$y = \begin{cases} \sin(2x)\,, kai\ -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ 2x - x^2\,, kai\ \ 0 < x \le 2, \\ (x-2)^4\,, kai\ 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Ox ašimi ir tiese $x = 3$



1.4 pav.

Sprendimas.

$$S = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(2x)dx\ + \int_{0}^{2} (2x - x^2)dx + \int_{2}^{3} (x-2)^4 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2x)\ \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} + \frac{(x-2)^5}{5}\ \Big|_{2}^{3} =$$

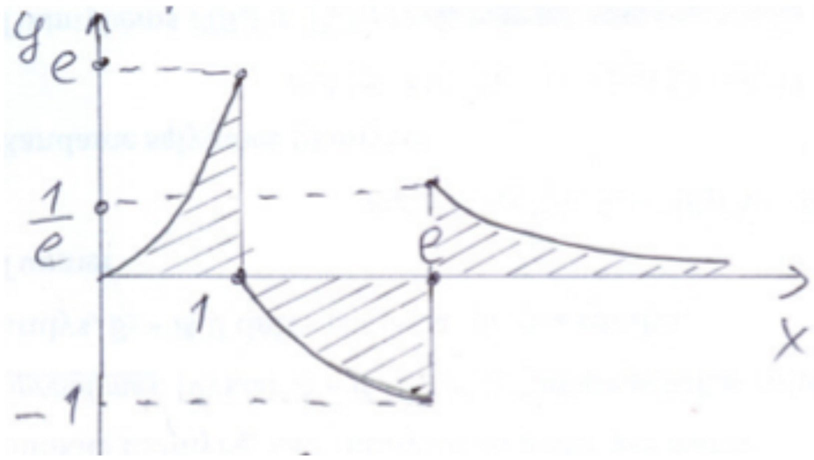
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} + \frac{1}{5} = \frac{38}{15} \approx 2{,}533.$$

Atsakymas: $S \approx\ 2{,}533.$ ■

1.3 pavyzdys. Suskaičiuoti plotą apribotą kreive

$$y = \begin{cases} xe^x\,, & kai\ 0 \le x \le 1, \\ -lnx\,, & kai\ 1 < x \le e, \\ \dfrac{e^2}{x^3}\,, & kai\ x > e. \end{cases}$$

Ox ašimi ir tiesemis $x = 1,\ x = e$.



1. 5 pav.

Sprendimas.

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

$$S_1 = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 xd(e^x) = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$$

$$= e - e^x = e - e + 1 = 1.$$

$$S_2 = -\int_1^e (-lnx)dx = xlnx \Big|_1^e - \int_1^e x(lnx)'dx =$$

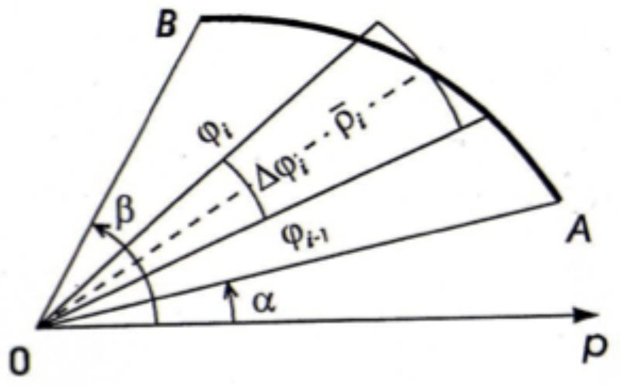
$$= e - x = e - e + 1 = 1.$$

$$S_3 = \int_e^{+\infty} \frac{e^2}{x^3} dx = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{e^2}{2x^2}\right) \Big|_e^A = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{e^2}{2A^2} + \frac{e^2}{2e^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$S = 1 + 1 + 0{,}5 = 2{,}5.$$

Atsakymas: $S = 2{,}5$. ■

2. Figūros ploto apskaičiavimas polinių koordinačių sistemoje



2.1 pav.

Tarkime, kad polinėmis koordinatėmis ρ ir φ apibūdintos kreivės lygtis yra tokia: $\rho = f(\varphi)$; čia f (φ) – tolydi funkcija, kai $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Apskaičiuosime plotą išpjovos OAB, kurią riboja kreivė $\rho = f(\varphi)$ ir spinduliniai vektoriai $\varphi = \alpha$ ir $\varphi = \beta$ (2.1 pav.).

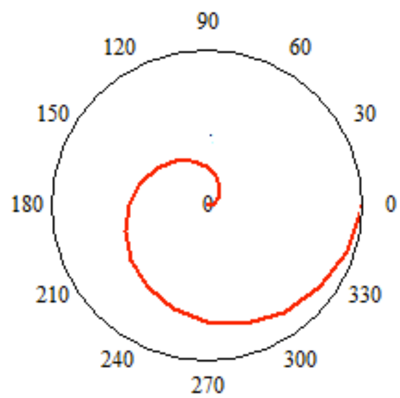
Šią išpjovą spinduliais vektoriais bet kaip padalykime į n dalių. Raskime dalies apribotos spindulių φ_{i-1} ir φ_i, plotą. Kampą tarp šių spindulių pažymėsime $\Delta\varphi = \varphi_i$ - φ_{i-1}. Šioje dalyje bet kur nubrėžkime spindulį vektorių $\bar{p}_i$ ir tą dalį pakeiskime skritulio, kurio centras taško O ir spindulys $\bar{p}_i$, išpjova. Jos plotas lygus $\frac{1}{2}\bar{p}_i^2\Delta\varphi_i$. Tokių išpjovų plotų suma

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i^2\Delta\varphi_i$$

bus apytiksliai lygi duotosios figūros plotui. Tikslią ploto reikšmę gausime apskaičiavę ribą, kai $\lambda = \max\Delta\varphi_i \to 0$. Kadangi ši suma yra funkcijos $\rho^2 = (f(\varphi))^2$ integralinė suma, tai jos riba, kai $\lambda \to 0$, lygi apibrėžtiniam integralui $\frac{1}{2}\int_a^\beta \rho^2 d\varphi$. Taigi figūros plotas

$$S = \frac{1}{2}\int_a^\beta \rho^2 d\varphi.$$

2.1 pavyzdys Suskaičiuoti Archimedo spiralės (2.2 pav) $\rho = a\varphi$ ribojamą plotą kai $\alpha = 0$ ir $\beta = 2\pi$ (viena vija)



2.2 pav.

Sprendimas.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\frac{\varphi^3}{3}\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{4}{3}a^2\pi^3 .$$

Tuo tarpu skritulio, kurio spindulys $r = 2\pi a$ plotas lygus $4\pi^3 a^2$. Spiralės vijos plotas lygus $\frac{1}{3}$ skritulio ploto (tai buvo žinoma dar Archimedui apie 287-212 pr. Kr.)

Atsakymas: $S = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$. ■

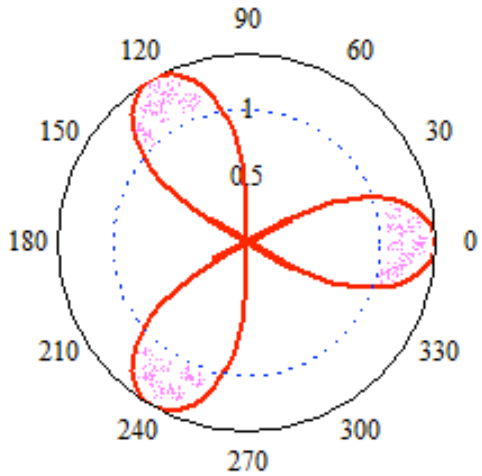
2.2 pavyzdys. Apskaičiuoti plotą, apribotą kreivemis $\rho^2 = 2\cos(3\varphi)$, $\rho = 1$ $(\rho \geq 1)$ (2.3 pav.)

Sprendimas.

Randame susikirtimo taškus:

$$\begin{cases}\rho^2 = 2\cos(3\varphi) \\ \rho = 1\end{cases} \Rightarrow \cos(3\varphi) = \frac{1}{2}, \quad 3\varphi = \mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Kai $k = 0$, tai $\varphi = \mp\frac{\pi}{9}$



2.3 pav

Imsime ploto dalį, kai $\varphi \in [\,0\,,\ \frac{\pi}{9}\,]$, o tai kaip matyti iš brėžinio, sudaro $\frac{1}{6}$ viso ploto. Todėl

$$S = 6\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{9}} 2\cos(3\varphi)\,d\varphi = 2\sin(3\varphi)\,\Big|_{0}^{\frac{\pi}{9}} = = \sqrt{3} \approx 1{,}732.$$

Atsakymas: $S = 1{,}732$. ■

2.3 pavyzdys. Suskaičiuoti plotą apribotą kreive $(x^2 + y^2) = 2a^2xy$ (2.4 pav.)

Sprendimas.

Kadangi turime neišrekštinę funkciją, tai skaičiavimai bus žymiai paprastesni, jei pereisime prie polinių koordinačių.

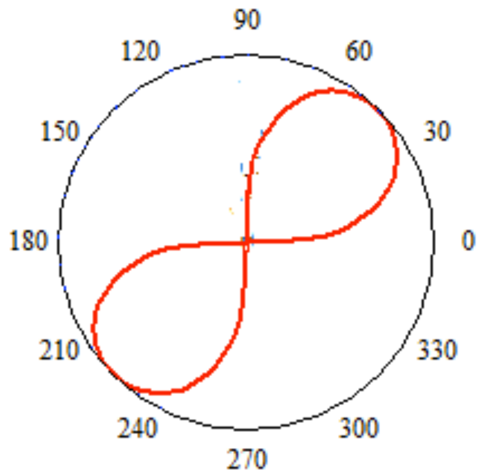
$$\begin{cases} x = \rho\, cos\varphi \\ y = \rho\, sin\varphi \end{cases}$$

Įstatę į duotą lygtį gauname

$$(\rho^2 cos^2\varphi + \rho^2 sin^2\varphi)^2 = 2a^2\rho\, cos\varphi\, \rho\, sin\varphi$$

Supaprastinę turesime lygtį

$$\rho^2 = a^2 \sin(2\varphi)$$



2.4 pav.

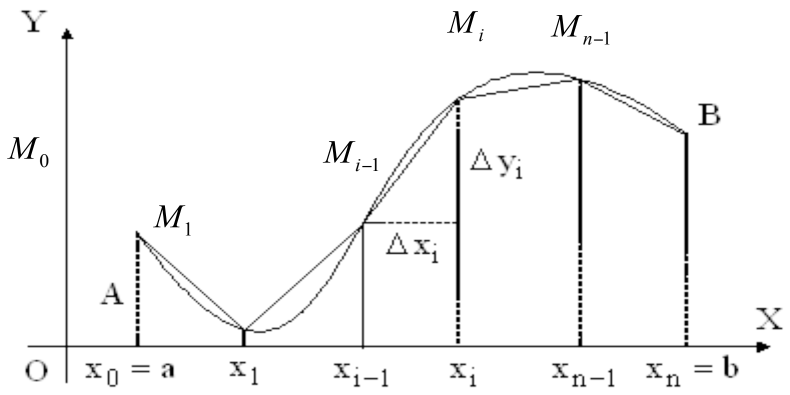
$\sin(2\varphi) = 0 \ \ => \ \ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, kai skaičiavimui įmame vieną „viją“.

$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin(2\varphi)\, d\varphi = -\frac{a^2}{2}\cos(2\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Atsakymas: $S = a^2$. ∎

3. Kreivės lanko ilgis stačiakampėje koordinačių sistemoje

Tarkime, kad stačiakampėse koordinatėse nusakyta kreivė, kurios lygtis $y = f(x)$. Rasime šios kreivės lanko AB ilgį (3.1 pav.). Pirmiausia apibrėšime, ką vadiname kreivės lanko ilgiu. Tuo tikslu lanką AB bet kaip taškais $A = M_0, M_1, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_n = B$, padalykime į n dalių. Sakykime, kad šių taškų abscisės yra $a = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b$. Per gautus taškus išveskime stygas $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}B$. Stygos $M_{i-1}M_i$ ilgį



pažymėkime Δs_i. Tuomet laužtės, įbrėžtos į lanką AB, ilgis bus lygus $\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$ .Pažymėkime max Δx_i raide λ.

Apibrėžimas. *Kreivės lanko AB ilgiu L vadinama riba, prie kurios artėja įbrėžtos į tą kreivę laužtės ilgis, kai* $\lambda \to 0$.

Taigi

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$$

Dar tarkime, kad funkcija $f(x)$ ir jos išvestinė $f'(x)$ atkarpoje $[a;b]$ tolydžios. Pažymėkime $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Pagal Pitagoro teoremą

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i .$$

Skirtumui $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ pritaikome Lagranžo teoremą. Tuomet $\Delta y_i = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i; c_i \in (x_{i-1}; x_i)$. Todėl

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f'(c_i)\Delta x_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

ir $$\Delta s_i = \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i .$$

Vadinasi,

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i .$$

Kadangi $f'(x)$tolydi atkarpoje $[a;b]$, tai $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ irgi tolydi, todėl egzistuoja parašytos integralinės sumos riba, kuri lygi apibrėžtiniam integralui :

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_a^b ds;$$

čia $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$. Dydis ds vadinamas ***kreivės lanko ilgio diferencialu.***

3.1 pavyzdys. Suskaičiuoti puskubinės parabolės $y^2 = 7*(x-4)^3$dalies, kurią atkerta tiesė $x = 8$, ilgį.

Sprendimas.

Kadangi $y^2 \geq 0$, tai $7(x-4)^3 \geq 0$ ir $x \geq 4$.

Be to $(-y)^2 = y^2$, tai kreivė simetrinė Ox ašies atžvilgiu.

$$y = \sqrt{7}(x-4)^{\frac{3}{2}};\ y' = \frac{3}{2}\sqrt{7}(x-4)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{7}(x-4)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}7(x-4)$$

$$L = 2\int_4^8 \sqrt{1+\frac{63}{4}(x-4)}\,dx =$$

$$= \frac{24}{63}\int_4^8 \left(1+\frac{63}{4}(x-4)\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\frac{63}{4}x-4\right) =$$

$$= \frac{2*8}{3*63}\left(1+\frac{63}{4}(x-4)\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_4^8 =$$

$$= \frac{16}{189}(1+63)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{189} = \frac{8176}{189} \approx 43{,}259$$

3.2 pavyzdys. Apskaičiuokite elipsės $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ lanko ilgį. Iš elipsės lygties randame

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Todėl

$$y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{a^2-k^2x^2}{a^2-x^2}};$$

čia $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ (k – elipsės ekscentritetas). Tuomet elipsės ilgis

$$L=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^2-k^2x^2}{a^2-x^2}}dx=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt$$

(keitinys $x=a\sin t$).

Taigi gavome apibrėžtinį integralą, kuris irgi vadinamas antrojo tipo elipsiniu integralu. Jis žymimas simboliu :

$$\mathrm{E}(k;\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt .$$

Panašiai žymimas ir pirmojo tipo elipsinis integralas :

$$F(k;\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} .$$

Yra sudarytos šių integralų reikšmių lentelės.

Vadinasi, elipsės ilgis

$$L=4a\mathrm{E}\left(k;\frac{\pi}{2}\right).$$

Pavyzdžiui, kai $a=2, b=\sqrt{3}$, tai $k=0{,}5$ ir $\mathrm{E}\left(0{,}5;\frac{\pi}{2}\right)=1{,}4675$.

Tuomet $L=11{,}74$.

4. Kreivės lanko ilgis, kai kreivė duota parametrinėmis lygtimis.

Tarkime, kad kreivės lygtys yra tokios : $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [t_0; T]$, čia $\varphi(t)$ ir $\psi(t)$ – tolydžios atkarpoje $[t_0; T]$ funkcijos, tolydžias išvestines. Tuomet $y'_x = \dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}, dx = \varphi'_t\, dt$ ir $\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \sqrt{\varphi'^2_t + \psi'^2_t}\,dt$. Vadinasi, jeigu $\varphi(t_0) = a, \varphi(T) = b$, tai

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt = \int_{t_0}^T ds; \text{ čia } ds = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\,dt.$$

4.1 pavyzdys. Suskaičiuokime kreivės $x = 3(t^2 + 1), y = t^3 - 3t$ kilpos ilgį.

Sprendimas.

Iš $x = 3(t^2) + 1$ turime, kad $x \geq 3$, o $y(-t) = -y(t)$. Grafikas simetriškas Ox ašies atžvilgiu. Ox ašį kertai kai $y = 0 \Rightarrow t^3 - 3t = 0 \Rightarrow t_1 = 0; t_2 = \pm\sqrt{3}$.

$x(0) = 3;$ $x(\pm\sqrt{3}) = 12.$ Grafiko patikslinimui suskaičiuojame :

$x(1) = 6;$ $y(1) = -2;$ $y(-1) = 2.$

$x'_t = 6t$; $y'_t = 3t^2 - 3.$

$$L = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{36t^2 + 9t^4 - 18t^2 + 9}\,dt =$$

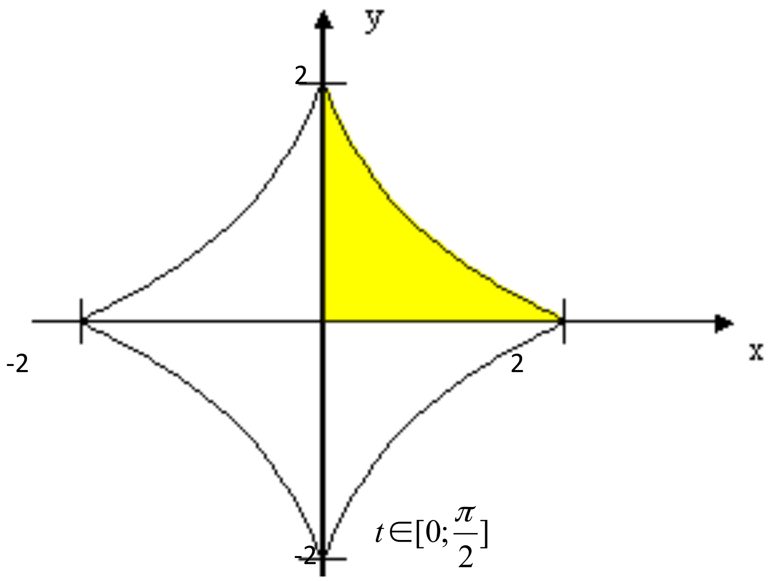
$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(3t^2 + 3)^2}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} (3t^2 + 3)\,dt =$$

$$= 2(t^3 + 3t)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}.$$

Atsakymas. $L = 12\sqrt{3} \approx 20{,}785$.

4.2 pavyzdys. Apskaičiuoti astroidės ilgį.

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$$



Figūra simetriška – ją sudaro 4 vienodos dalys, todėl

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\cdot 3\cos^2 t\cdot \sin t)^2 + (2\cdot 3\sin^2 t\cdot \cos t)^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\rho}{2}} 6\sqrt{\cos^2 t\cdot \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt =$$

$$= 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot \sin t\cdot dt = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot d(\sin t) = 24\cdot \frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} 12$$

5. Kreivės lanko ilgis polinių koordinačių sistemoje.

Tarkime, kad kreivės lygtis polinių koordinačių sistemoje yra $\rho = f(\varphi),\ \varphi \in [\alpha;\beta]$. Šią lygtį galima pakeisti parametrinėmis lygtimis, naudojant ryšio tarp stačiakampių ir polinių koordinačių formules $x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$. Tuomet, įrašę į šias lygtis vietoj ρ dydį $f(\varphi)$, gauname :

$$x = f(\varphi)\cos\varphi, \quad y = f(\varphi)\sin\varphi;$$

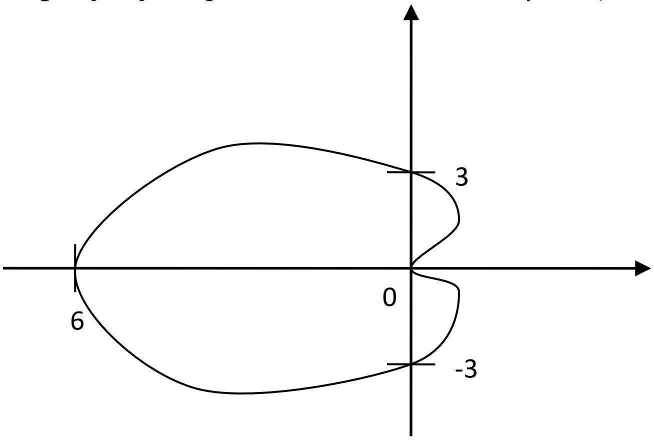
čia parametras φ vaidina parametro t vaidmenį. Tuomet $L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2_{\varphi} + y'^2_{\varphi}}\,d\varphi$. Randame :

$$x'_{\varphi} = \rho'_{\varphi}\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \qquad y'_{\varphi} = \rho'_{\varphi}\sin\varphi + \rho\cos\varphi, \text{ todėl}$$

$$\sqrt{x'^2_{\varphi} + y'^2_{\varphi}} = \sqrt{\rho^2 + p'^2_{\varphi}} \qquad \text{ir } L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_{\varphi}}\,d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} ds;$$

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_{\varphi}}\,d\varphi.$$

5.1 pavyzdys. Apskaičiuokite kardioidės ρ = 3(1-cosφ) lanko ilgį.



φ	0	π/4	π/2	¾ π	π
ρ	0	0,9	3	5,1	6

$$\rho' = 3\sin\varphi$$

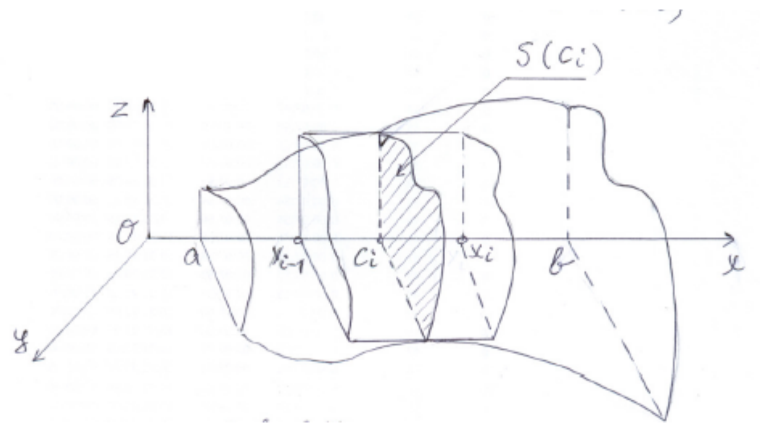
$$L = 2\int_0^{\pi}\sqrt{(9\sin\varphi)^2 + (3(1-\cos\varphi))^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{9\sin^2\varphi + 9 - 18\cos\varphi + 9\cos^2\varphi}\cdot d\varphi =$$

$$= 2\cdot 3\int_0^{\pi}\sqrt{2 - 2\cos\varphi}\cdot d\varphi = 6\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = \left(\ 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\ \right) = 12\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= -24\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = -24(0-1) = 24$$

6. Kūno tūrio skaičiavimas pagal skerspjūvio plotą

Tegu yra bet kokios formos kūnas V apribotas uždaru paviršiumi(arba keliais paviršiais) ir yra tarp plokštumų $x = a$ ir x = b (aprėžta uždara trimatės erdvės sritis)



Statmenai ašiai Ox per bet kurį tašką $x \in [a, b]$ brėžiame statmeną ašiai Ox pjūvį. Akivaizdu, kad pjūvio plotas priklauso nuo x, t.y. S = S(x). Jei funkcijos, kurių grafikai(paviršiai) riboja kūną V yra tolydžios funkcijos, tai pjūvio plotas atkarpoje [a,b] yra tolydinė funkcija S(x).

Intervalą [a, b] bet kokiu būdu skaidome į dalinius intervalus taškais x_i, i=1,2,…,n:

$a=x_0<x_1<x_2<x_{i-1}<x_i<x_n=b$.

Kiekvienoje dalinėje atkarpoje $[x_{i-1}, x_i]$,i=1,2,…,n laisvai pasirenkame tašką c_i ($x_{i-1} \le c_i \le x_i$) ir per šį tašką brėžiame statmeną ašiai Ox pjūvį. Jo plotas bus $S(c_i)$. Imame šį pjūvį pagrindu cilindrinio kūno, kurio sudaromosios lygiagrečios Ox ašiai. Tokio cilindrinio kūno tūris lygus

$V(c_i) = S(c_i)\,(x_{i-1} - x_i) = S(c_i)\Delta x_i$.

Tuomet duotojo kūno V tūris apytiksliai lygus tokių cilindrinių kūnų tūrių sumai:

$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$

Tikslią tūrio reikšmę gausime apskaičiavę ribą, kai $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$, $1 \le i \le n$
Tada tūris V lygus:

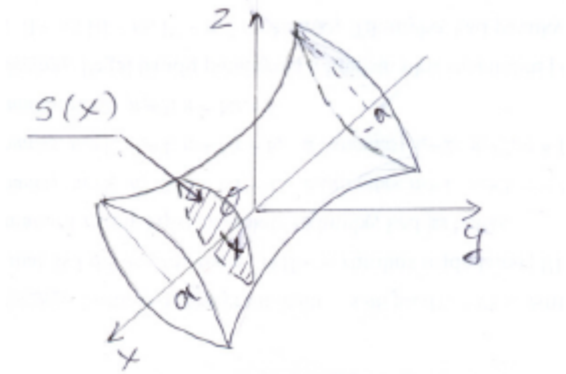
$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$

Gavome, kad kūno tūris lygus ribai integralinės sumos intervale [a, b], kurios funkcija yra S(x), todėl
$V=\int_a^b S(x)dx$

6.1. Pavyzdys

Suskaičiuoti kūno apriboto vienašakio hiperboloido $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ir plokštumomis *x*=±*a*.

Sprendimas:



Kertant hiperboloidą taške *x* plokštuma statmena ašiai Ox, pjūvyje gauname elipę

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

Kurios kanoninė lygtis yra

$$\frac{a^2y^2}{b^2(a^2+x^2)}+\frac{a^2z^2}{c^2(a^2+x^2)}=1$$

O jos pusašės $\bar{a}=\frac{b\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ $\bar{b}=\frac{c\sqrt{a^2+x^2}}{a}$.

Panaudoję elipsės ploto formulę (S=πab) turime, kad pjūvio plotas bet kokiame taške $x\in[-a,a]$ yra

$$S(x)=\pi\frac{bc(a^2+x^2)}{a^2}$$

Kadangi kūnas yra simetriškas zOy plokštumos atžvilgiu, tai

$V=2\int_0^a\pi\frac{bc(a^2+x^2)}{a^2}dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(a^2x+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{8\pi abc}{3}$.

Atsakymas: V=$\frac{8\pi abc}{3}$

6.2. Pavyzdys

Apskaičiuokime kūno, apriboto paraboloido $z=x^2+\frac{3}{2}y^2$ir plokštumos *z* = 4, tūrį.

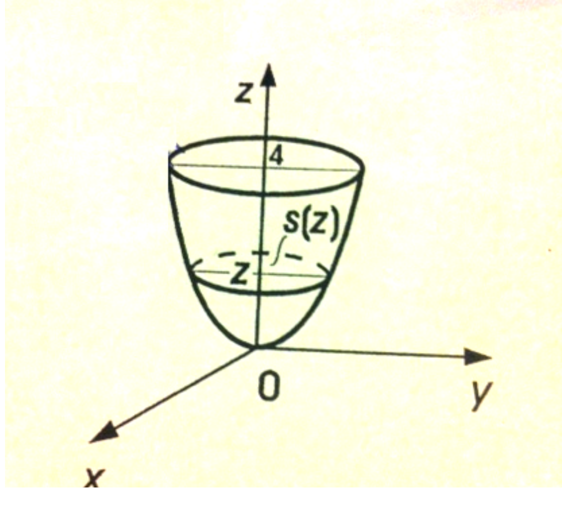
Sprendimas:

Jeigu paraboloidą kirstume plokštuma *z* = *const*, tai jo pjūvyje gautume elipsę

$$x^2+\frac{3}{2}y^2=z$$

kurios kanoninė lygtis

$$\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}z}=1$$

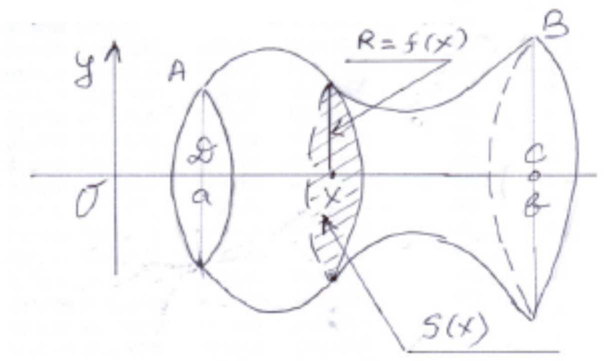


Tos elipsės pusašės lygios $a = \sqrt{z}$, $b = \sqrt{\frac{2}{3}z}$. Kadangi S(z)=πab, tai $S(z) = \pi\sqrt{z} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}z} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}z$.

Tuomet $V = \int_0^4 \pi\sqrt{\frac{2}{3}}zdz = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$.

7. Sukimo tūris

Turime kreivinę trapeciją ABCD, apribotą tolydinės funkcijos $y=f(x)$ grafiku, Ox ašimi ir tiesėmis $x=a$, $x=b$. Šią trapeciją sukame apie ašį Ox: gauname sukinį



Pjūvis nubrėžtas per bet kokį tašką x⊂[a,b] statmenai ašiai Ox yra skritulys, kurio spindulys $R = f(x)$.
Tuomet $S(x)=\pi R^2 = \pi(f(x))^2$
ir
$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx = \pi\int_a^b y^2 dx$

7.1. Pavyzdys
Figūra, apribota kreivėmis $y = e^{-2x}-1$, $y = e^{-x}+5$, $x=0$ sukama: a) apie ašį Ox b) apie ašį Oy
Suskaičiuoti: a) ir b) atvejais sukimo tūrius.

Sprendimas:
Skaičiuojame kreivių $y=e^{-2x}-1$, $y=e^{-x}+5$ susikirtimo taško coordinates:
$\begin{cases} y = e^{-2x} - 1 \\ y = e^{-x} + 5y \end{cases} \Longrightarrow e^{-2x}-e^{-x}-6=0$
$e^{-x}=a$, $a^2-a-6=0$ $a_1=3$, $a_2=-2$
$e^{-x}=3 \Longrightarrow x=-\ln 3$
$e^{-x}=-2 \Longrightarrow \varnothing$
A:Kai x=-ln3, tai $y=e^{\ln 3}+5=3+5=8$ A(-ln3;8)

a) Sukimo tūris yra dviejų sukinių skirtumas: sukinio, gaunamo sukant apie ašį Ox kreivę $y=e^{-x}+5$ intervale
[-ln3;0] skirtumas su sukiniu, gaunamu sukant tame pačiame intervale kreivę $y = e^{-2x}-1$.

$V=\pi\int_{-ln3}^{0}(e^{-x}+5)^2\,dx-\pi\int_{-ln3}^{0}(e^{-2x}-1)^2dx=$
$=\pi\int_{-ln3}^{0}[(e^{-x}+5)^2-(e^{-2x}-1)^2]dx=\pi\int_{-ln3}^{0}(3e^{-2x}++10e^{-x}-e^{-4x}+24)dx=\pi(-\frac{3}{2}e^{-2x}-10e^{-x}+\frac{e^{-4x}}{4}++24x)\Big|_{-ln3}^{0}=\pi(-\frac{3}{2}-10+\frac{1}{4}-(-\frac{3}{2}e^{2ln3}-10e^{ln3}+\frac{e^{4ln3}}{4}--24ln3))=\pi(-11{,}25+23{,}25+24ln3)=$
$=-\pi(12+24\ln 3)\approx 120{,}533$.

Atsakymas:V≈120,533.

b) Pastebėsime, kad sukinio tūriui skaičiuoti galima naudoti formulę

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Kai intervale [c,d] apie ašį Oy sukama figūra, apribota kreive $x=g(y)$ ir tiesėmis $x = 0$, $y = c$, $y = d$. Iš brėžinio matyti, kad tūris bus atitinkamų dviejų sukinių skirtumas:

$$V = V_2 - V_1$$

Sukiniui (V_2) intervale [0;8] iš lygties $y = e^{-2x}-1$ turime $e^{-2x} = y+1$ arba $x = -\frac{1}{2}\ln(y+1)$. Sukiniui (V_1) intervale [6; 8] iš lygties $y = e^{-x}+5$ turime $x=-\ln(y-5)$. Tada

$$V_2 = \pi \int_0^8 (-\frac{1}{2}\ln(y+1))^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^8 ln^2(y+1)d(y+1)$$

$$= \frac{\pi}{4}((y+1)ln^2(y+1)|_0^8$$

$$-2\int_0^8 \frac{(y+1)\ln(y+1)}{(y+1)}d(y+1))$$

$$= \frac{\pi}{4}(9ln^2 9 - 2(y+1)\ln(y+1)|_0^8$$

$$+2\int_0^8 \frac{y+1}{y+1}dy = \frac{\pi}{4}\left(9ln^2 3^2 - 2\cdot 9ln9 + 2y\Big|_0^8\right) = \frac{\pi}{4}(9\cdot 4ln^2 3 - 18\cdot 2ln3 + 16)$$

$$= \pi(9ln^2 3 - 9ln3 + 4.$$

$$V_1 = \pi \int_6^8 ln^2(y-5)d(y-5)$$

$$= \pi((y-5)ln^2(y-5)|_6^8$$

$$-2\int_6^8 \frac{(y-5)ln(y-5)}{(y-5)}d(y-5)) = \pi(3ln^2 3 - 2(y-5)\ln(y-5)|_6^8 + 2y|_6^8)$$

$$= \pi(3ln^2 3 - 6ln3 + 4).$$

$$V_y = V_2 - V_1 = \pi(9ln^2 3 - 9ln3 + 4 - 3ln^2 3 + 6ln3 - 4) = \pi(6ln^2 3 - 3ln3) \approx 12{,}369.$$

Atsakymas: $V_y \approx 12{,}369$.

Egzistuoja kita sukinio apie Oy ašį tūrio skaičiavimo formulė, kuri pateikiama be įrodymo(pabandykite įrodyti)

$$V_y = 2\pi \int_a^b |xy| dx$$

Kai kreivinė trapecija, kuri sukama apie ašį Oy virš Ox ašies arba žemiau.
Aukščiau pateiktam pavyzdžiui 3 suskaičiuosime tūrį , kai apie ašį Oy sukama figūra apribota kreive $y = e^{-x} + 5$, $y = 8$, $x = 0$. Tai bus sukinio tūris V_1, kurį gavome skaičiuodami sukinio apie Oy ašį tūrį.

$$V_1 = V_{cilindro} - V_y^{(1)}$$

kur $V_y^{(1)}$ yra sukimo tūris, gaunamas sukant kreivinę trapeciją apie ašį Oy, apribotą kreivėmis $y=e^{-x}+5$, $x = -\ln 3$, $x=0$, $y=0$.

$$V_{cilindro} = \pi h R^2 = \pi \cdot 8 ln^2 3 = 8\pi ln^2 3.$$

$$V_y^{(1)} = 2\pi \int_{-ln3}^{0} (x)\,(e^{-x} + 5)dx$$

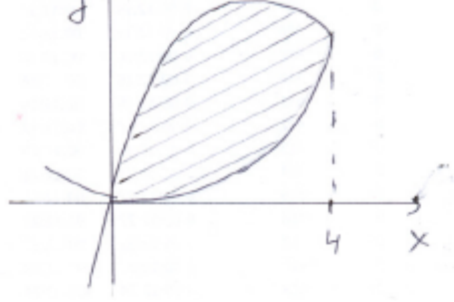
$$= -\pi \int_{-\ln 3}^{0} (xe^{-x} + 5x)dx = -2\pi\left(\int_{-\ln 3}^{0} x\, d(-e^{-x}) + \frac{5x^2}{2}\Big|_{-\ln 3}^{0}\right)$$

$$= -2\pi\left(-xe^{-x}\Big|_{-\ln 3}^{0} - 2{,}5\ln^2 3\right) = \pi(6\ln 3 - 4 + 5\ln^2 3) = \pi(6\ln 3 - 4 + 5\ln^2 3.$$

$$V_i = 8\pi ln^2 3 - \pi(6ln3 - 4 - 5ln^2 3) = \pi(3ln^2 3 - 6ln3 + 4).$$

Sukinio tūrio skaičiavimo formulę $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$
arba $V_y = 2\pi \int_a^b |xy| dx$ galima naudoti ir tuo atvieju kai atitinkamų kreivių lygtys išrekštos parametrinėmis lygtimis
x=g(t) , y=h(t) , $t_1 \le t \le t_2$ $(g(t_1) = a, g(t_2) = b)$.
Tada $V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} h^2(t) g'(t) dt$
arba
$V_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |g(t) \cdot h(t)| \cdot g'(t) dt$

7.2. Pavyzdys
Figūra yra parametrinėmis lygtimis
$x = 4t - t^2$ $y = 4t^2 - t^3$ apribota plokštumos dalis(kilpa). Suskaičiuoti sukinio, gauto sukant šią figūrą apie a)Ox ašį b) Oy ašį



Sprendimas:
Nustatome apibrėžimo sritį kintamojo x atžvilgiu:
$x'_t = 4 - 2t$,
$4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow x_{max}(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$
$\Rightarrow x \in (-\infty; 4]$.
Toliau randame taškus, kuriuose grafikas kerta koordinatines ašis. Susikirtimas su Ox ašimi:

$$y = 0 \Rightarrow 4t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(4 - t) = 0$$

$$\Longrightarrow t_1 = 0 \ \ ir \ t_2 = 4.$$

Šioms t reikšmėms $x(0)=0$ ir $x(4)=0$, t.y. kreivė kerta pati save koordinačių pradžioje (kreivės kartotinis taškas).

Lygties $x = 4t - t^2$ koordinačių sistemoje (t, x) grafikas – parabolė su viršune taške (2; 4). Kadangi parabolė simėtriška tiesės $t = 2 \pm a$, kur a bet koks realus skaičius. Iš čia gauname, kad kai t kinta intervale [0; 2] tarime duotos kreivės grafiko uždaros dalies apatinę dalį, o kai $t \in [2; 4]$- viršutinę dalį. Iš tikro: tegu ažą, tada iš $t = 2 \pm a$ turime $t_1 = 1 \ \ o \ t_2 = 3$ ir $x(1)=3$, $x(3)=3$, o $y(1)=3$, $y(3)=9$

Tada

$$V_x = \pi \int_4^2 (4t^2 - t^3)^2(4 - 2t)dt$$

$$- \pi \int_0^2 (4t^2 - t^3)(4 - 2t)dt$$

$$= -\pi \int_2^4 (4t^2 - t^3)^2(4 - 2t)dt - \pi \int_0^2 (4t^2 - t^3)(4 - 2t)dt$$

$$= -\pi \int_0^4 (4t^2 - t^3)(4 - 2t)dt$$

$$= -\pi \int_0^4 (64t^4 - 64t^5 + 20t^6 - 2t^7)dt = -\pi(\frac{64t^5}{5} - \frac{64t^6}{6} + \frac{20t^7}{7} - \frac{2t^8}{8}) \Big|_0^4$$

$$= \frac{16384}{105}\pi \approx 490{,}208.$$

b) atvejis

$$V_y = V_{2y} - V_{1y} = 2\pi \int_2^4 (4t - t^2)(4t^2 - t^3)dt - 2\pi \int_0^2 (4t - t^2)(4t^2 - t^3)dt$$

Pirmojo integralo(ir antrojo) pointegrinė funkcija intervale [2;4] yra neneigiama, todėl jei rėžius imsime $t_1 = 4 \ \ o \ t_2 = 2$ kaip atveju a) tai gausime „neigiamą tūrį“, nors $x(4)=0$, $x(2)=4$.

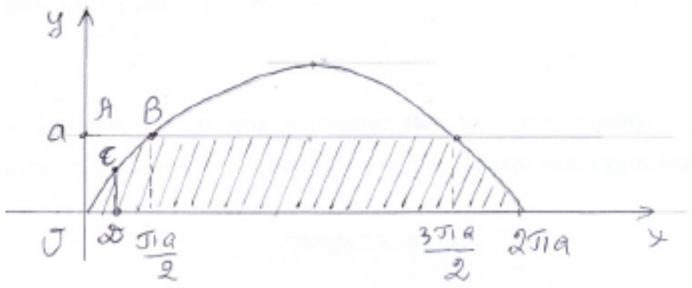
$$V_{2y} = 2\pi \int_2^4 (16t^3 - 8t^4 + t^5)dt = 2\pi(\frac{16t^4}{4} - \frac{8t^5}{5} + \frac{t^6}{6})\Big|_2^4 = \frac{2048\pi}{15} - \frac{704\pi}{15} = \frac{1344}{15}\pi = 89{,}6\pi.$$

$V_{1y} = \frac{704}{15}\pi$. $V = \left(\frac{1344}{15} - \frac{704}{15}\right)\pi = \frac{640}{15}\pi \approx 134{,}041$

Atsakymas: $V_x \approx 490{,}208$, $V_y \approx 134{,}041$.

7.3. Pavyzdys

Figūra ribojama cikloidės $x = a(\pm\sin t)$, y = a(1- cos t) $t \in [0; 2□]$ dalies, esančios tarp tiesių $y = 0$ ir $y = a$ sukama apie tiesę $y = a$. suskaičiuoti gauto sukinio tūrį.



Sprendimas:

$$V = V_{cilindro} - 2V_{OAB}$$
$$V_{cilindro} = S \cdot H = \pi a^2 \cdot \pi a = \pi^2 a^3.$$

V_{OAB} - sukinio tūris, gaunamas sukant figūrą OAB apie tiesę y=a. Parametro t reikšmė, atitinkanti tašką B yra sistemos sprendinys:

$$\begin{cases} y = a \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$
$$CD = a - a(1 - \cos t) = a\cos t.$$

$$V_{OAB} = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t)^2\, a(1 - \cos t)dt = \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2\, t - cos^3\, t)dt = \pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos t \cdot cos^2 t)dt = \pi a^3 (\frac{1}{2} t \Big| \begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ 0\end{matrix} + \frac{1}{4}\sin 2t \Big| \begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ 0\end{matrix} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2 t)d(\sin t) = \pi a^3 (\frac{\pi}{4} - \sin t \Big| \begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ 0\end{matrix} + \frac{sin^3\, t}{3} \Big| \begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ 0\end{matrix}) = \pi a^3 (\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}) = \pi a^3 \frac{3\pi - 8}{12}$$

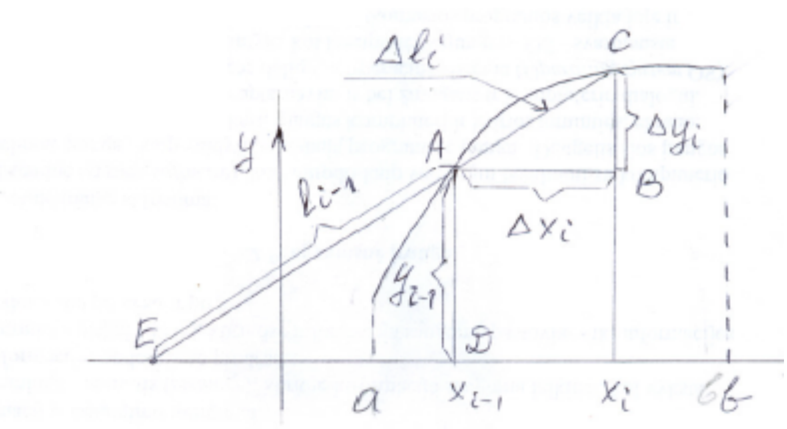
$$V = 2\pi^2 a^3 - 2\pi a^3 \frac{3\pi - 8}{12} = \pi a^3 \frac{9\pi + 8}{6}.$$

Atsakymas: $V = \pi a^3 \frac{9\pi+8}{6}$.

8. Sukinio paviršiaus plotas

Stašiakampėje koordinačių sistemoje intervale [a, b] turime kreivės grafiką, kurios lygtis $y=f(x)$, $f(x)$ ir $f'(x)$- tolydžios funkcijos.

Kreivę sukdami apie Ox ašį gauname sukinio paviršių (šoninį). Skaičiuojame gauto paviršiaus plotą. Panašiai kaip kreivės lanko ilgio skaičiavime, intervalą [a ,b] padalinę bet koki būdu į n dalinių intervalų skaičiuojame i-osios dalies paviršiaus plotą ΔS_i:



$$\Delta S_i \approx \pi(y_{i-1}+\Delta y_i)(l_{i-1}+\Delta l_i)-\pi y_{i-1}l_{i-1} = \pi(y_{i-1}\Delta l_i + l_{i-1}\Delta y_i + \Delta y_i \Delta l_i).$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{l_{i-1}}{y_{i-1}} = \frac{\Delta l_i}{\Delta y_i} \Rightarrow l_{i-1} = \frac{y_{i-1}\Delta l_i}{\Delta y_i} \ ir$$

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2}.$$

Tada

$$\Delta S_i \approx \pi\left(y_{i-1}\Delta l_i + \frac{y_{i-1}\Delta l_i}{\Delta y_i}\cdot \Delta y_i + \Delta y_i \Delta l_i\right) = 2\pi y_i \sqrt{\Delta x_i{}^2 + \Delta y_i{}^2}.$$

Dėmenį $\Delta y_i \Delta l_i$ atmetame, nes jis yra aukštesnės eilės nykstantis dydis negu Δx_i.

$$\Delta S_i \approx 2\pi y_i \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i = 2\pi y_i \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i \Rightarrow$$

$$\Delta S_i \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_i \sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\,\Delta x_i \Rightarrow$$

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi \int_a^b y ds.$$

Kai kreivės lankas duotas parametrinėmis lygtimis
$x = g(t)$, $y = h(t)$,$t_1 \le t \le t_2$,tai

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} h(t)\sqrt{\left(g'(t)\right)^2 + \left(h'(t)\right)^2}dt.$$

Kai kreivės lanko lygtis duota polinėje koordinačių sistemoje

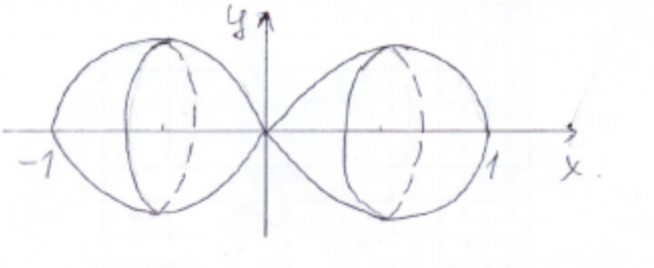
$$\rho = f(\varphi), \qquad 0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$$

Tai sukinio apie polinę ašį paviršiaus plotas lygus

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho \sin\alpha \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi.$$

8.1 *Pavyzdys*

Suskaičiuoti sukinio, gauto sukant kreivę $8y^2 = x^2 - x^4$ aplink Ox ašį paviršiaus plotą.



Sprendimas:

Nustatome apibrėžimo sritį:

$x^2 - x^4 \geq 0 \Rightarrow x^2(1 - x^2) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Kadangi kreivės grafikas simetriškas koordinačių ašių atžvilgių, tai plotą skaičiuosime, kai $x \in [0; 1]$ ir padvigubinsime.

Iš $8y^2 = x^2(1 - x^2)$

$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{8}}$, $(x \in [0; 1])$ ir $y' = \frac{1}{\sqrt{8}}\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

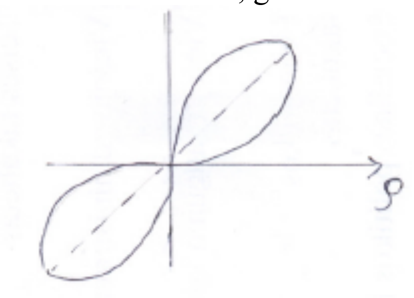
$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1 - 4x^2 + 4x^4}{8(1 - x^2)}} = \sqrt{\frac{9 - 12x^2 + 4x^4}{8(1 - x^2)}} = \frac{3 - 2x^2}{\sqrt{8}\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$S = 4\pi \int_0^1 \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{3 - 2x^2}{\sqrt{8}\sqrt{1 - x^2}} dx = 4\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^1 (3x - 2x^3) dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Atsakymas: $S = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$.

8.2. Pavyzdys

Suskaičiuoti sukinio, gauto sukant kreivę $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$ aplink polinę ašį paviršiaus plotą.



$$\rho = 0 \Rightarrow \sin 2\varphi = 0 \Rightarrow$$
$$\varphi_1 = 0 , \varphi_2 = \frac{\pi}{2} , \alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi} \ ; \ \rho' = a\frac{cos2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$$

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\sin 2\varphi} \cdot \sin\varphi \frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi = 4\pi a^2 \left(-\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi a^2.$$

Atsakymas: $= 4\pi a^2$.